

GOVERNMENT OF TAMIL NADU

గణితము

(MATHEMACTICS-TELUGU)

పదవ తరగతి

(X-STANDARD)

అంటరానితనం
అమానుషం - నేరం

Department of School Education

A Publication Under
Government of Tamilnadu
Distribution of Free Textbook Programme
(NOT FOR SALE)

First Edition - 2011
(This Book is published under Uniform System of School Education scheme)

TRANSLATORS

P. Balasubramanyam
P.G. Asst.
Govt. (B). Hr. Sec. School
Uthukottai - 602026
Tiruvallur(Dist)

H. Jyothiswari
B.T. Asst.
Govt. Girls High School
Pallipat - 631207.
Tiruvallur(Dist)

Konikki Mani
B.T. Asst.
Govt. High School
Veligaram - 631207.
Tiruvallur(Dist)

Laser Typeset, Layout: **Bhagavan**   Wrapper Design: **V. James**

Textbook Printing

Tamilnadu Textbook Corporation,

College Road, Chennai - 600 006.

Price : Rs.

This book has been printed on 80 G.S.M. Maplitho Paper

Printed by Offset at :

తొలిపలుకు

తమిళనాడులో విద్యయందు, ప్రత్యేకంగా పాఠశాల విద్యయందు ఆశ్చర్యకరమైన మార్పు ఏర్పడి, వీటి మూలంగా అన్ని పాఠశాలలో ఒకే విద్యావిధానం, క్రమబద్ధమైన పాఠ్యప్రణాళిక ఆధారంగా 'ఏకీకృత విద్యావిధానం' అమలు చేయుట మనస్సునకు ఆనందాన్ని కలిగిస్తున్నది. తమిళనాడు ప్రభుత్వం ఏర్పరచిన ఈ సదావకాశాన్ని సంపూర్ణ విద్యాభివృద్ధికై ఉపయోగించుకొనవలెను.

విజ్ఞానశాస్త్రమునన్నింటికి "రాణి" అయిన గణితశాస్త్రం స్వత:సిద్ధమైన విలువను, దీనికి తగు అందాన్ని కలిగి ఎల్లప్పుడూ ప్రకాశించు ఒక పాఠ్యాంశముగానున్నది. విజ్ఞానశాస్త్రము, ఇంజనీరింగ్ మరియు ఇతర పాఠ్యాంశములలో గణితం విడదీయరాని సంబంధం కలిగియున్నది. కావున, విజ్ఞానశాస్త్రం మరియు సాంకేతికాభివృద్ధికి వ్యక్తిగతంగా ఒకరు ఎన్నుకొను రంగంలో ప్రకాశించుటకు గణితజ్ఞానము మిక్కిలి ఆవశ్యమగును. కఠోర గణిత శిక్షణ అనునది ఒకనికి గణిత జ్ఞానముతో కూడిన, క్రమమైన చింతన సామర్థ్యము, సంక్లిష్ట సమస్యలను విశ్లేషించు సామర్థ్యమునిచ్చును.

తమిళ కవులలో దీర్ఘదర్శి అయిన తిరువళ్ళువర్, సుమారు రెండు వేల సంవత్సరములకు ముందే గణిత విద్యా విలువను మరియు వాటి ముఖ్యత్వమును తెలుపు విధంగా,

எண்ணென்ப ஏனை எழுத்தென்ப இவ்விரண்டும்
கண்ணென்ப வாழும் உயிர்க்கு. – குறள் (392)

అనగా సంఖ్యలు మరియు అక్షరములు భువిలోని ప్రజలకు రెండు కళ్ళువంటివి అని అర్థము.

మన నిత్యజీవితంలో ఏర్పడు సమస్యలను సాధించుట, వీటిని ఎదుర్కొనుటకు కావలసిన సామర్థ్యము అవసరమగుచున్నది. గణితము అనునది సమస్యలను సాధించుటకు ఉపయోగపడు సాధనము మాత్రమేగాదు, అది మిక్కిలి శక్తివంతమైన సృజనాత్మకతను పెంపొందించు శక్తిగానున్నది. ఈ సత్యాలన్నింటిని విద్యార్థులు మనస్సునందుంచుకొని, వీరి మనస్సంతోషం కోసం, అభివృద్ధికోసం గణితంను మరల మరల అభ్యసనం చేయవలెను.

దేశంలో భావితరాల వారికి మంచి భవిష్యత్తును ఏర్పరుచుటకు మంచి గణిత శిక్షణ అవసరము. ప్రస్తుతము నేర్చుకొను గణిత ప్రాథమిక భావనలు ఉన్నత విద్యలో గణితం మరియు విజ్ఞానశాస్త్ర పాఠ్యాంశములకు ఆధారముగానుండును. గణిత ప్రాథమిక భావనలను నేర్చుకొనుటయేగాక, వాటిని ఏవిధంగా సమస్యల సాధనకు అన్వయించవలయునో నేర్చుకొనవలెను.

గణితశాస్త్ర అభ్యసనమునకు రెండు ముఖ్య కారకములైన ప్రాథమిక సిద్ధాంతములు మరియు సమస్య పరిష్కారములను లోతుగా అర్థం చేసుకొను దిశగా ఈ పుస్తకమునందు చర్యలు తీసుకొనబడినది. గణిత ప్రాథమిక భావనలను మరియు సమస్య పరిష్కారంలో వీటిని ఉపయోగించి, అర్థం చేసుకొనుటకు సహాయపడునని అభిప్రాయపడుచున్నాము. వివిధ పరిస్థితులలో గణితం ఎట్లు అభివృద్ధి చెందుతున్నదో, ఎట్లు ఉపయోగపడుచున్నదో తెలియజేయుటకు ఎక్కువ శ్రద్ధ వహించితిమి, ఈ పాఠ్యపుస్తకములోని అధ్యాయములు సహజంగాను, తర్కరీతిగాను, మంచి ఉదాహరణలతోను క్రమపరచియున్నాము. ఇంకను, గణితాభ్యాసం చేయుటకు గణిత భావనలను అర్థం చేసుకొనుటకు అవసరమైనరీతిలో ఒక్కొక్క అధ్యాయముగా క్రమపరచబడినది. విద్యార్థులు, ఉపాధ్యాయుల సహాయముతో గణిత భావనలను, వీటి సంబంధములను తెలుసుకొన్న తరువాత అభ్యాస లెక్కలకు జవాబులు కనుగొనుట మంచి పద్ధతియని నమ్ముతున్నాము.

సంఖ్యా విజ్ఞానశాస్త్రము, గణిత శాస్త్రములో ఒక భాగముగా విస్తరించియున్నదని జ్ఞప్తియందుచుకొనుము. విద్యార్థులు గణితం అభ్యసించుటయందు తరగతిలోని ఉపాధ్యాయుని పాత్ర చాలా ముఖ్యమైనది. అతని సహాయము, ఆలోచనలు, మార్గదర్శకములు అభ్యసనమునకు ఎనలేనివి. ప్రాథమిక గణితం నుండి ఉన్నత గణితమునకు మారు దశలో ఉపాధ్యాయులు ప్రముఖ పాత్ర వహించుదురు. ఈ ఉద్దేశ్యమును పూర్తిచేయుటకు ఒక ఉత్ప్రేరకముగా ఈ పాఠ్యపుస్తకము అమరియున్నదని నమ్ముతున్నాము. ఉపాధ్యాయులు, విద్యార్థులు ఇరువైపుల విషయ పరిజ్ఞాన మార్పునకు ఉపాధ్యాయుడు శ్రమించిన, ఈ పాఠ్యపుస్తకము నుండి అత్యధిక ఫలితం పొందవచ్చును. విదార్థి–కేంద్ర అభ్యసన తరగతులకు ఈ ప్రయత్నం నిస్సందేహంగా ఉపకరించును. గణితాన్వేషణకు అన్ని విధాల సామర్థ్యమును పెంపొందించు మార్గము ఈ పాఠ్యపుస్తక ముఖ్యోద్దేశ్యమగును. ఇంతకు ముందే తెలిపిన విధంగా గణితాభ్యసనము రెండు విధములు. అందులో ఒకటి గణిత ప్రాథమిక అభ్యసము, మరొకటి సమస్యల పరిష్కారములో వాటిని ఉపయోగించుట అగును. ఉదాహరణలను అభ్యసనము చేయుట ద్వారా, పద్ధతులను సరైన రీతిలో అర్థం చేసుకొనవచ్చును. ప్రాథమిక భావనలను అభ్యాస సమస్యలయందు ఉపయోగించిన తరువాత వాటితో నూతన సమస్యలను సృష్టించుట ద్వారా మాత్రమే ఒకరి గణితజ్ఞానము పెంపొందును.

"గణిత సమస్యలను సాధన చేయుట ద్వారా గణితమును నేర్చుకొనవచ్చు"

(We Learn Mathematics by doing Mathematics)

మేధావులు, ఉపాధ్యాయులు మరియు విద్యార్థులు ఈ పాఠ్యపుస్తకాభివృద్ధికి సలహాలిచ్చిన, మేము మిక్కిలి సంతోషించగలము.

Murthy R
Chairperson

పాఠ్య ప్రణాళిక

పాఠము	పాఠ్యాంశము	ఆశించు అభ్యసన ఫలితములు	బోధనా పద్ధతులు	పీరియడ్ల సంఖ్య
I. సమితులు మరియు ప్రమేయములు	• పరిచయం • సమితి పరిక్రియల ధర్మములు • డీ మార్గన్ సూత్రములు– వెన్ చిత్రము ద్వారా సరిచూచుట • $n(A \cup B \cup C)$సూత్రము • ప్రమేయములు	• సమితి పరిక్రియల ఆధార భావనలు – పునర్విమర్శ • సమితి పరిక్రియల ధర్మములు అర్థం చేసుకొనుట – వ్యత్యయ న్యాయము, సహచర్య న్యాయము, విభాగ న్యాయము (మూడు సమితులు మాత్రమే) • పూరక సమితుల న్యాయములను అర్థం చేసుకొనుట. • డీ మార్గన్ సూత్రములను అర్థం చేసుకొనుట, వెన్ చిత్రము ద్వారా వివరించుట. • పద సమస్యలను సూత్రము ద్వారా, వెన్ చిత్రము ద్వారా సాధించుట. • నిర్వచనము, రకములు, ప్రమేయముల ను తెలుపు పద్ధతులను అర్థం చేసుకొనుట. • ప్రమేయముల రకములను సులభ ఉదాహరణలతో అర్థం చేసుకొనుట.	అన్ని వివరణలను వెన్ చిత్రమును ఉపయోగించుము. ఆర్థికశాస్త్రం, వైద్యశాస్త్రం, విజ్ఞానశాస్త్రం మొదలగు వాటి నుండి ప్రమేయములకు ఉదాహరణలిమ్ము.	26
II. వాస్తవ సంఖ్యల క్రమానుగత శ్రేణులు	• పరిచయం • వరుసలు • అంకశ్రేఢి (A.P) • గుణశ్రేఢి (G.P) • శ్రేణులు	• అంకశ్రేఢి, గుణశ్రేఢిలను గుర్తించి అర్థంచేసుకొనుట. • అంకశ్రేఢి, గుణశ్రేఢిలోని 'n' వ పదమును కనుగొనుట. • అంకశ్రేఢి, గుణశ్రేఢి 'n' పదముల మొత్తమును తీర్మానించుట. • కొన్ని పరిమిత శ్రేణుల మొత్తమును నిర్ణయించుట.	నిర్మాణ పద్ధతిని ఉపయోగించుము. బిందు నిర్మాణ పద్ధతిని –బోధన ఉపకరణంగా ఉపయోగించుము. నిర్మాణ పద్ధతి ఉపయోగించి సూత్రమును ఉత్పాదించుము.	27
III. బీజగణితము	• రేఖీయ సమీకరణముల సాధన. • బహుపద సమాసములు. • సంయోజిత భాగహారము • గరిష్ట సామాన్య భాజకము (గ.సా.భా) మరియు కనిష్ట సామాన్య గుణిజము(క.సా.గు). • అకరణీయ సమాసములు • వర్గమూలము • వర్గసమీకరణములు	• రెండు చలరాశుల ఒక జత రేఖీయ సమీకరణముల భావనను అర్థంచేసుకొనుట. • రెండు చలరాశుల ఒక జత రేఖీయ సమీకరణములను తొలగించు పద్ధతి. • అడ్డుగుణకార పద్ధతి ద్వారా సాధించుట. • ఒక ప్రత్యేక వర్గ సమీకరణము నుండి బహుపద సమాసముల శూన్యములకు మరియు గుణకములకు మధ్య గల సంబంధము అర్థంచేసుకొనుట.	ఉదాహరణలతో వివరించుట. చార్టులను బోధనోపకరణముగా ఉపయోగించుము. మొదటగా సంఖ్యల గ.సా.భా, క.సా.గు లను పునర్విమర్శ చేయుట.	

III. బీజగణితము		• ఇవ్వబడిన బహుపద సమాసము యొక్క శేషము, భాగఫలమును సంయోజిత భాగాహార పద్ధతి ద్వారా నిర్ణయించుట. • సంయోజిత భాగాహార పద్ధతి ద్వారా ఇవ్వబడిన బహుపద సమాసము యొక్క కారణాంకములు నిర్ణయించుట. • అకరణీయ సమాసముల గ.సా.భా మరియు క.సా.గు మధ్య గల భేదమును అర్థం చేసుకొనుట. • అకరణీయ సమాసముల ను సూక్ష్మీకరించుట.(సులభ సమస్యలుగా) • వర్గమూలమును అర్థం చేసుకొనుట. • వర్గసమీకరణ నియమ రూపమును అర్థం చేసుకొనుట. • వర్గసమీకరణమును సాధించుట (వాస్తవ మూలములు మాత్రమే)–కారణాంక పద్ధతి, వర్గము పూరించు పద్ధతి, వర్గసమీకరణ సూత్రములను ఉపయోగించి. • వర్గసమీకరణమును అనుసరించి పద సమస్యలను సాధించుట. • మూలముల స్వభావము మరియు విచక్షణీల మధ్య గల పరస్పర సంబంధమును తెలుసుకొనుట. • మూలములివ్వబడిన వర్గసమీకరణమును ఏర్పరుచుట.	భిన్నముల ప్రక్రియలను పోల్చుట. సంఖ్యలలో వర్గమూలముల ప్రక్రియలను పోల్చుట. మూలముల స్వభావమును బీజగణితము, రేఖాచిత్రము ద్వారా ఊహించుటకు సహాయపడుట.	40
IV. మాత్రికలు	• పరిచయం • పరిచయము మాత్రికల రకములు • సంకలనము, వ్యవకలనము • గుణకము • మాత్రికల సమీకరణము	• మాత్రికలను అమర్చుట, తరగతిని గుర్తించుట. • మాత్రికల రకములను తెలుసుకొనుట. • ఇవ్వబడిన మాత్రికల సంకలనము, వ్యవకలనము చేయుట. • ఒక మాత్రికను అదిశ మాత్రికతోను, వ్యత్యయ మాత్రికతోను గుణించుట. • ఇవ్వబడిన మాత్రికలను గుణించుట (2x2; 2x3; 3x2 తగిన మాత్రికలతో). • రెండు చలరాశుల సమీకరణములను మాత్రికల పద్ధతి ద్వారా సాధించుట.	దీర్ఘ చతురస్రాకార పద్ధతిన సంఖ్యలను అమర్చుట. నిజ జీవిత పరిస్థితులను ఉపయోగించుట సంఖ్యా వ్యవస్థలను ఉపయోగించుట.	16

V. నిరూపక జ్యామితి	• పరిచయం • రెండు బిందువుల మధ్య దూరము–పునర్విమర్శ • విభజన సూత్రము, మధ్య బిందువు సూత్రము, గురుత్వకేంద్ర సూత్రము • త్రిభుజ మరియు చతుర్భుజ వైశాల్యము • సరళరేఖ	• రెండు బిందువుల మధ్య దూరమును పునర్విమర్శ ఇవ్వబడిన రెండు బిందువుల మధ్య బిందువును గుర్తించుట. • విభజన సూత్రము ద్వారా విభజన బిందువును నిర్ణయించుట. • త్రిభుజ వైశాల్యమును లెక్కించుట. • రెండు బిందువులు, సమీకరణములు ఇవ్వబడిన సరళరేఖ వాలును కనుగొనుట. • ఇవ్వబడిన వివరములతో ఒక సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుట. • వాలు–అంతరఖండ రూపము, బిందువు–వాలు రూపము, రెండు బిందువుల రూపము అంతరఖండ రూపము ద్వారా సరళరేఖ సమీకరణము కనుగొనుట. • ఒక బిందువు ద్వారా పోవు సరళరేఖకు (i) సమాంతరముగా (ii) లంబముగానున్న సరళరేఖా సమీకరణమును కనుగొనుట.	సరళ జ్యామితీయ ఫలితమును త్రిభుజము మరియు చతుర్భుజములకు సంబంధపరచి, ఉపయోగమును సరిచూడుము. $y = mx + c$ రూపమును ప్రారంభ బిందువుగా తీసుకొనుట.	25
VI. రేఖాగణితము	• ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం (నిరూపణతో) • ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంత విపర్యము (నిరూపణతో) • కోణసమద్విఖండన సిద్ధాంతం (నిరూపణ–అంతరం మాత్రమే) • కోణసమద్విఖండన సిద్ధాంత విపర్యము (నిరూపణ – అంతరం మాత్రమే) • సరూప త్రిభుజములు • పైథాగరస్ సిద్ధాంతము • స్పర్శరేఖా–జ్యా సిద్ధాంతము	• సిద్ధాంతములను అర్థం చేసుకొనుటకు వాటిని సాధించుటకు సులభ సమస్యలను చేయుట.	కాగితము మడుచుట ద్వారా సౌష్టవమును తెలుసుకొనుట, మార్పుల సాంకేతికతను తెలుసుకొనుట. సరైన నిరూపణలను తెలుసుకొనుట. పటములను గీయుట పటములతో కూడిన, తర్క రీతిగా, సోపానములుగా నిరూపణలు – వివరించుట మరియు చర్చించుట.	20
VII. త్రికోణమితి	• పరిచయం • సర్వసమీకరణములు • ఎత్తులు మరియు దూరములు	• త్రికోణమితి సర్వసమీకరణములు తెలుసుకొనుట, వీటిని సులభ సమస్యలో ఉపయోగించుట. • త్రికోణమితి నిష్పత్తులను అర్థం చేసుకొనుట మరియు వీటిని ఎత్తులు, దూరమును కనుగొనుటకు ఉపయోగించుట. (రెండు లంబకోణ త్రిభుజములను మించక)	బీజీయ సూత్రములు ఉపయోగించుట. త్రికోణమితి సర్వసమీకరణములు ఉపయోగించుట. రమారమి విలువుల స్వభావమును వివరించుట.	21

VIII. గణనము	• పరిచయం • స్తూపము, శంఖువు, గోళము, అర్ధగోళము, శంఖుఖండముల ఉపరితల వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమాణము. • సంయుక్త ఆధారముల ఉపరితల వైశాల్యము, ఘనపరిమాణము. • స్థిర ఘనపరిమాణము.	• స్తూపము, శంఖువు, గోళము, అర్ధగోళము, శంఖుఖండముల ఉపరితల వైశాల్యము, ఘనపరిమాణము తెలుసుకొనుట (నిర్ణయించుట) • సంయుక్త ఆకారముల ఉపరితల వైశాల్యము, ఘనపరిమాణము (రెండు మాత్రమే). • స్థిర ఘనపరిమాణములలో కొన్ని సమస్యలు.	సంయుక్త ఆకారములను తయారుచేయుటకు త్రిపరిమాణమును ఉపయోగించుట(మోడల్స్) మోడల్స్, చిత్రపటములను బోధనాపకరణములుగా ఉపయోగించుట. నిజ జీవిత పరిస్థితుల నుండి కొన్ని ఉదాహరణలను ఎన్నుకొనుట.	24
IX. ప్రయోగాత్మక రేఖాగణితము	• పరిచయం • వృత్తమునకు స్పర్శరేఖల నిర్మాణము • త్రిభుజ నిర్మాణము • చక్రీయ చతుర్భుజ నిర్మాణము	• వృత్తమునకు స్పర్శరేఖలు నిర్మించుట. • త్రిభుజమును నిర్మించుట. ఇవ్వబడినవి ఆధారము, శీర్షకోణము మరియు (a) మధ్యదూరము (b) ఎత్తు • చక్రీయ చతుర్భుజమును నిర్మించుట.	స్పర్శరేఖల పొడవులు బీజగణిత పద్ధతిలో సరిచూచుటను పరిచయము చేయుట. వృత్తములో కోణములు ధర్మములను పటము గీయుటకు ముందు పునర్విమర్శచేయుట.	15
X. రేఖా చిత్రములు	• పరిచయం • ద్విఘాత రేఖాచిత్రములు • ప్రత్యేక రేఖాచిత్రములు	• ద్విఘాత సమీకరణమును రేఖాచిత్రము ద్వారా సాధించుట. • పద సమస్యలను రేఖాచిత్రము ద్వారా సాధించుట.	నిజ జీవిత పరిస్థితులను పరిచయము చేయుట.	10
XI. సాంఖ్యక శాస్త్రము	• కేంద్రస్థానపు కొలతలు – పునర్విమర్శ • విస్తరణ కొలతలు • విచలన గుణకము	• సమూహము మరియు సమూహము కాని దత్తాంశముల అంకమధ్యమము–పునర్విమర్శ. • విస్తరణ భావనను అర్థంచేసుకొనుట మరియు వ్యాప్తి, క్రమవిచలనము, విచలనము కనుగొనుట. • విచలన గుణకమును లెక్కించుట.	పరీక్షలు, ఆటలు వంటి నిజజీవిత పరిస్థితులను ఉపయోగించుట.	16
XII. సంభావ్యత	• పరిచయం • సిద్ధాంతపరంగా సంభావ్యత • సంభావ్యత సంకలన సిద్ధాంతము	• యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములు, ప్రతిరూప ఆవరణ, ఘటనలు–పరస్పర వర్జితములు, పూరకములు, ఖచ్చిత మరియు అసాధారణ ఘటనలు అర్థం చేసుకొనుట. • సంభావ్యత సంకలన సిద్ధాంతమును సులభ సమస్యల సాధనకు ఉపయోగించుట, వాటిని అర్థము చేసుకొనుట.	నాణెమును ఎగురవేయుట, పాచికలు దొర్లించుట, పేక కట్టనుండి పేక ముక్కను తీయుట.	15

విషయసూచిక

1 సమితులు మరియు ప్రమేయాలు

"A set is Many that allows itself to be thought of as a One"
- Georg Cantor

- పరిచయం
- సమితులు
- సమితి పరిక్రియల ధర్మములు
- డీ-మోర్గాన్ సూత్రములు
- ప్రమేయములు



జార్జ్ బూలే
(1815-1864)
ఇంగ్లాండ్

తర్క సంబంధములను తెలియజేయు సంకేతములకు మరియు బీజీయ సంకేతములకు మధ్య చాలా దగ్గరి పోలిక గలదని బూలే విశ్వసించెను.

ఇతను తర్క సంబంధములను తెలియజేయుటకు గణిత సంకేతములను ఉపయోగించెను. అతని కాలములో కంప్యూటర్ లేనప్పటికి ప్రస్తుత కంప్యూటర్ అంకగణితమునకు బూలన్ బీజగణితమే మూలాధారము.

నవీన కంప్యూటర్ తర్కమునకు మూలాధారముగా నుండునది ఈ బూలన్ తర్కము. కనుక కంప్యూటర్ విజ్ఞానశాస్త్రమునకు పునాదివేసినది బూలేయే అని చెప్పవచ్చు.

1.1. పరిచయం

గణితశాస్త్ర మౌళిక భావనలలో, సమితి భావన అనునది ఒకటి. సమితి సిద్ధాంతములోని సంకేతము మరియు పరిభాష, గణితశాస్త్రంలోని ప్రతిభాగములో ఉపయోగపడుచున్నది. కావున సమితి సిద్ధాంతమును గణితశాస్త్రము యొక్క భాష అని చెప్పవచ్చును. ఈ పాఠ్యాంశము 19వ శతాబ్దము చివరిలో **జార్జ్ బూలే** (1815 – 1864) మరియు **జార్జ్ కాంటర్** (1845 – 1918) లు చేసిన సేవల నుంచి ఉత్పన్నమైనది. ఆ తర్వాత 20 వ శతాబ్దములో గణితశాస్త్రంలోని అన్ని విభాగముల అభివృద్ధికి లోతైన ప్రభావమును చూపినది. ఇది సంబంధము లేని అనేక ఆలోచనలను ఏకీకృతము చేయుటకు సహాయపడి, గణితశాస్త్ర పురోగతికి దోహదపడినది.

9 వ తరగతిలో రెండు సమితుల సమితి పరిక్రియలయిన సమ్మేళనము, ఛేదనము మరియు భేదములను గూర్చి నేర్చుకొంటిమి. ఇచట సమితులకు సంబంధించిన మరికొన్ని భావనలను మరియు గణితశాస్త్రంలోని మరియొక ముఖ్య సమితుల ప్రమేయమును గూర్చి నేర్చుకొనెదము. మొదట కొన్ని ఉదాహరణలతో ప్రాథమిక నిర్వచనములను పున:శ్చరణ చేసుకొనెదము. మనము సహజ సంఖ్యల సమితిని $\mathbb{N}$ తోను, వాస్తవ సంఖ్యల సమితిని $\mathbb{R}$ తోను సూచించెదము.

1.2 సమితులు (Sets)

నిర్వచనము

బాగుగా నిర్దేశించబడిన వస్తువుల సముదాయమును సమితి అని అందురు. ఆ సమితిలోని వస్తువులను ఆ సమితి యొక్క మూలకములు లేక సభ్యులు అని అందురు.

ఇచట "బాగుగా నిర్దేశించబడినది" అనగా ఆ వస్తువు సమితికి చెందినదా లేదా అను లక్షణమును ఎటువంటి సందేహము లేకుండా నిర్వచింపబడునది.

ఉదాహరణకు "చెన్నైలోని పొడవైన వ్యక్తులు" అను సేకరణ సమితిని రూపొందించదు. ఎందుకనగా ఇక్కడ " పొడవైన వ్యక్తులు " అను నిర్ణయించు లక్షణమును స్పష్టముగా నిర్వచింపబడలేదు. కావున, ఈ సేకరణ సమితిని నిర్వచింపదు.

సంకేతము (Notation):

సాధారణంగా సమితులను A, B, X మొదలగు పెద్ద అక్షరములతో సూచింతురు. సమితిలోని మూలకములను సూచించుటకు x, y మొదలగు చిన్న అక్షరములను వాడుదుము. $x \in Y$ అనగా x అనునది Y సమితిలోని ఒక మూలకము. $t \notin Y$ అనగా t అనునది Y సమితికి చెందిన మూలకము కాదు.

ఉదాహరణలు

(i) తమిళనాడులోని అన్ని ఉన్నత పాఠశాలల విద్యార్థుల సమితి.

(ii) తమిళనాడులోని అన్ని ఉన్నత పాఠశాలలు లేక కళాశాలలో గల విద్యార్థుల సమితి.

(iii) పూర్ణాంకములలోని అన్ని ధనాత్మక సరి సంఖ్యల సమితి.

(iv) పూర్ణాంకముల వర్గము ఋణాత్మకముగా నుండు సమితి.

(v) చంద్రునిపై దిగిన వ్యక్తుల సమితి.

పై (i), (ii), (iii), (iv) మరియు (v) లలో నిర్వచించిన వాటిని క్రమముగా A, B, C, D మరియు E సమితులను సూచించుననుకొనెదము. ఏ పూర్ణాంక వర్గమైనను సున్న లేక ధనాత్మక పూర్ణాంకముగా నుండును మరియు వర్గము ఋణాత్మకమగు ఎటువంటి పూర్ణసంఖ్య లేదనుటను గమనింపుము. కావున, D ఎటువంటి మూలకమును కలిగియుండదు. అటువంటి సమితిని శూన్య సమితి అని అందురు. శూన్య సమితిని ϕ తో సూచించెదము.

నిర్వచనము

(i) పరిమిత సంఖ్య గల మూలకములను కలిగియున్న సమితిని పరిమిత సమితి *(Finite Set)* అని అందురు.

(ii) పరిమిత కాని సమితిని అపరిమిత సమితి *(Infinite Set)* అని అందురు.

పైన ఇవ్వబడిన వాటిలో A సమితి, ఒక పరిమిత సమితి అలాగే C సమితి ఒక అపరిమిత సమితి. శూన్య సమితిలో ఎటువంటి మూలకములు లేకుండుటను గమనింపుము. అనగా శూన్య సమితిలోని మూలాకముల సంఖ్య సున్న. కావున శూన్య సమితి కూడ ఒక పరిమిత సమితి అగును.

నిర్వచనము

X అనునది ఒక పరిమిత సమితి అయిన X లోని మూలకముల సంఖ్యను ఆది సంఖ్య లేక సమితి పరిమాణము అని అందురు. X అనునది ఒక అపరిమిత సమితి అయిన X యొక్క ఆది సంఖ్యను ∞ సంకేతముతో సూచించెదము. సమితి X యొక్క ఆది సంఖ్యను $n(X)$ చే సూచించెదము.

పై ఉదాహరణలలో A, B సమితులను గమనించిన, A లోని ప్రతి మూలకము B లోను మూలకముగా నుండుటను చూడవచ్చు. ఇటువంటి సందర్భములలో A ని B యొక్క ఉపసమితి అని చెప్పెదము. మనమిప్పుడు 9 వ తరగతిలో నేర్చుకొనిన కొన్ని నిర్వచనములను పున:శ్చరణ చేసెదము.

ఉపసమితి (Subset): X, Y అనునవి రెండు సమితులనుకొనుము. X అనునది Y యొక్క ఉపసమితి అని చెప్పిన X లోని ప్రతిమూలకము Y లోను మూలకమగును. అనగా X అనునది Y యొక్క ఉపసమితి అనిన $z \in X$ అయితే $z \in Y$ అగును

X అనునది Y యొక్క ఉపసమితి అయిన దానిని $X \subseteq Y$ అని సూచించెదము.

సమితి సమానత్వము (Set Equality): రెండు సమితులు X, Y అనునవి సమానము అనుటకు రెండింటిలోను ఖచ్చితంగా ఒకే రకమైన మూలకములను కలిగియుండవలెను. అటువంటి సందర్భములో $X = Y$ అని వ్రాసెదము. అనగా $X = Y$ అయినచో $X \subseteq Y$ మరియు $Y \subseteq X$ అగును.

తుల్య సమితులు (Equivalent Sets): $n(X) = n(Y)$. అయిన X, Y అను రెండు పరిమిత సమితులను తుల్య సమితులు అని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణకు, $P = \{x \mid x^2 - x - 6 = 0\}$ మరియు $Q = \{3, -2\}$ అనుకొనుము. ఇచట P, Q లు ఒకే రకమైన మూలకములను కలిగియుండుటను చూడవచ్చు. కనుక $P = Q$ అగును. $F = \{3,\ 2\}$ అయిన, అపుడు F, Q లు తుల్య సమితులు. కానీ $Q \neq F$.

ప్రమేయ భావననుపయోగించి, రెండు అపరిమిత సమితుల తుల్యత్వమును నిర్వచింపవచ్చును.

ఘాతసమితి (Power Set): A అను సమితి ఇవ్వబడినది, A యొక్క అన్ని ఉపసమితుల సముదాయమును $P(A)$ తో సూచించిన, $P(A)$ అనునది సమితి A యొక్క ఘాతసమితి.

$n(A) = m$ అయితే, $P(A)$ లోని మూలకముల సంఖ్య $n(P(A)) = 2^m$

ఉదాహరణకు $A = \{a,b,c\}$ అయితే $P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}. \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ మరియు $n(P(A)) = 8$.

ఇవ్వబడిన రెండు సమితులను ఉపయోగించి క్రొత్త సమితులను ఏవిధంగా ఏర్పరచగలము?

రెండు సమితులలోని మూలకములను ఒకటిగా చేర్చి ఒక కొత్త సమితిగా ఏర్పరచడం ఒక పద్ధతి. మరొక పద్ధతిలో రెండు సమితులలో ఉమ్మడిగానున్న మూలకములను మాత్రము తీసుకొని సమితిగా ఏర్పరచడం మరియు ఒక సమితిలో మాత్రము ఉండి మరొక్క సమితిలో లేని మూలకములను తీసుకొని సమితిని ఏర్పరచడం. వీటిని సూత్రీకరించుటకు క్రింది నిర్వచనములు దోహదపడును. ప్రతి నిర్వచనమునకు వేన్ చిత్రములు చేర్చబడినవి.

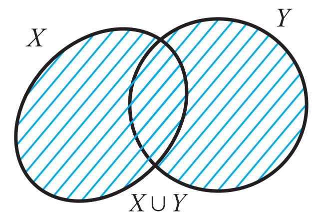
1.3 సమితులలో పరిక్రియలు (Operations on Sets):

X, Y అనునవి రెండు సమితులనుకొనుము. క్రింది కొత్త సమితులను నిర్వచించెదము

(i) **సమ్మేళనం:** $X \cup Y = \{z / z \in X$ లేక $z \in Y\}$

(X సమ్మేళనము Y అని చదువుము)

$X \cup Y$ అనునది X లోని అన్ని మూలకములను మరియు Y లోని అన్ని మూలకములను కలిగియుండుటను గమనింపుము. దీనిని పటము 1.1 లో చూపబడినది. మరియు $X \subseteq X \cup Y$; $Y \subseteq X \cup Y$ అగుటను గమనింపుము.

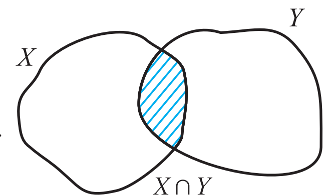


పటము.1.1

(ii) **ఖండనము లేక ఛేదనము:** $X \cap Y = \{z / z \in X$ మరియు $z \in Y\}$

(X ఖండనము Y అని చదువుము)

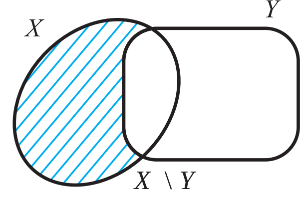
$X \cap Y$ అనునది X మరియు Y అను రెండింటిలోను ఉమ్మడిగా ఉన్న మూలకములగుటను గమనింపుము. దీనిని పటము 1.2 లో చూపబడినది. మరియు $X \cap Y \subseteq X$; $X \cap Y \subseteq Y$ అగుటను గమనింపుము.



పటము.1.2

(iii) **సమితిభేదం(వ్యత్యాసం):** $X \backslash Y = \{z/z \in X$ కానీ $z \notin Y\}$

(X భేదం Y అని చదువుము)

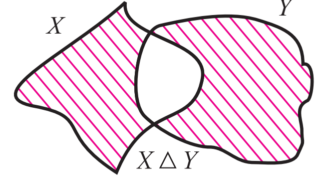


పటము.1.3

$X \setminus Y$ అనునది X లో మాత్రము ఉండి Y లో లేని మూలకములు. దీనిని పటము 1.3 లో చూపబడినది. కొందరు రచయితలు $A \backslash B$ కి బదులు $A - B$ ని వాడుదురు. మనము $A \backslash B$ అను సంకేతమునే వాడుదుము. ఎందుకనగా గణితశాస్త్రంలో ఈ సంకేతమునే విరివిగా వాడుచున్నారు.

(iv) **సౌష్ఠవ భేదం:** $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$

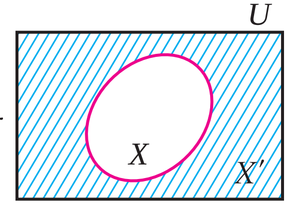
(X సౌష్ఠవ భేదం Y అని చదువుము).



పటము.1.4

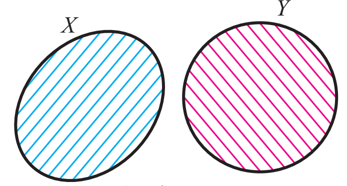
$X \triangle Y$ అనునది $X \cup Y$ లో మాత్రము ఉండి $X \cap Y$ లో లేని మూలకములు.

(v) **పూరకము:** U ని విశ్వసమితి అనుకొనిన, $X \subseteq U$ అయితే $U \setminus X$ ని U పరముగా X యొక్క పూరకము అందురు. అయితే మనము తీసుకొన్న విశ్వసమితి స్థిరమైనదయితే $U \setminus X$ ని X' చే సూచించెదము మరియు దీనినే X పూరకము అందురు.



పటము.1.5

(vi) **వియుక్త సమితులు:** రెండు సమితులు X మరియు Y అనునవి వియుక్తము అనుకొనిన వాటికి ఉమ్మడిగా ఏ మూలకము ఉండదు. అనగా X మరియు Y అనునవి వియుక్తమైన $X \cap Y = \phi$ అగును.



పటము.1.6

సూచన

సాధారణముగా వెన్ చిత్రముల ద్వారా సమితులను తెలియజేయుటకు వృత్తములను ఉపయోగించెదము. అయినను వెన్ చిత్రము ద్వారా సమితిని తెలియజేయిటకు ఏదేని మూయబడిన వక్రమును కూడా ఉపయోగించెదము. కాని సమితిలోని మూలకములను వ్రాయునపుడు ఒకసారి వ్రాసినది మరొక్కసారి వ్రాయరాదు.

మనము ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణలు చూసెదము:

A$=\{x/x$ అనునది 12 కన్నా తక్కువగా నుండు ధనాత్మక పూర్ణాంకము$\}$, $B = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 12, 15\}$ మరియు $C = \{-2, -1, 0, 1, 3, 5, 7\}$. అనుకొనుము. ఇప్పుడు క్రింది వాటిని కనుగొనుము.

(i) $A \cup B = \{x/x \in A$ లేక $x \in B\}$

$= \{x/x$ అనునది 12 కన్నా తక్కువగా నుండు ధనాత్మక పూర్ణాంకము, లేక $x{=}12$ లేక $x{=}15\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15\}$.

(ii) $C \cap B = \{y/y \in C$ మరియు $y \in B\} = \{1, 7\}$.

(iii) $A \backslash C = \{x/x \in A$ కానీ $x \notin C\} = \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$.

(iv) $A \triangle C = (A \backslash C) \cup (C \backslash A)$

$= \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\} \cup \{-2, -1, 0\} = \{-2, -1, 0, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$.

(v) $U = \{x \,/\, x$ అనునది పూర్ణాంకము$\}$ ను విశ్వసమితి అనుకొనుము.

0 అనునది ఋణాత్మకమో, ధనాత్మకమో కాదు. కావున $0 \notin A$.

ఇప్పుడు $A' = U \setminus A = \{x/x$ అనునది ఒక పూర్ణాంకము కానీ A లో లేనిది$\}$

$= \{x/x$ అనునది సున్న లేక ఋణ పూర్ణాంకము లేక 12 అంతకన్నా ఎక్కువగా ఉండు ధనపూర్ణాంకములు$\}$

$= \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0\} \cup \{12, 13, 14, 15, \cdots\}$

$= \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 12, 13, 14, 15, \cdots\}$.

ఉపయోగకరమైన కొన్ని ఫలితములను క్రోడీకరించెదము.

U అనునది విశ్వసమితి మరియు A, B లు U యొక్క ఉపసమితులనుకొనిన క్రిందివి వర్తించును.

(i) $A \setminus B = A \cap B'$

(ii) $B \setminus A = B \cap A'$

(iii) $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \phi$

(iv) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

(v) $(A \setminus B) \cap B = \phi$

(vi) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

సమితి పరిక్రియల ధర్మముల కొన్నింటిని నిర్వచించెదము.

1.4 సమితి పరిక్రియల ధర్మములు(న్యాయములు)

A, B మరియు C అను ఏవేని మూడు సమితులకు, ఈ క్రిందివి వర్తించును.

(i) స్థిత్యంతర లేక వినిమయ ధర్మము

(a) $A \cup B = B \cup A$ (సమితి సమ్మేళనము వినిమయమగును)

(b) $A \cap B = B \cap A$ (సమితి ఖండనము వినిమయమగును)

(ii) సహచర్య ధర్మము

(a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (సమితి సమ్మేళనము సహచర్యమగును)

(b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (సమితి ఖండనము సహచర్యమగును)

(iii) విభాగ ధర్మము

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (సమ్మేళనము మీద ఖండనమును విభజించుట)

(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ఖండనము మీద సమ్మేళనమును విభజించుట)

అనేకముగా ఇవ్వబడిన సమితుల ద్వారా ఈ ధర్మములను సరిచూచెదము.

పై ధర్మములను ఉదాహరణలతో నిరూపించుటకన్నా, గణితశాస్త్రయ నిరూపణలివ్వడమే ఉత్తమం. ఇది ఈ పుస్తక ఉద్దేశ్యమునకు ఎక్కువే అయినను కఠినమైన గణిత నిరూపణలను అర్థంచేసుకొని అభినందించుటకు మనము ఒక ధర్మమును తీసుకొని నిరూపించెదము.

(i) వినిమయ ధర్మము

ఈ భాగములో A మరియు B అనునవి ఏవేని రెండు సమితులయిన $A \cup B$ మరియు $B \cup A$ సమానమని నిరూపించవలెను. సమితుల సమానత్వ నిర్వచనం నుండి రెండు సమితులు సమానమనిన అవి ఒకే రకమైన మూలకములను కలిగియుండవలెను.

మొదట $A \cup B$ లోని ప్రతి మూలకము $B \cup A$ లోను మూలకమగునని చూపెదము. కావున $z \in A \cup B$ అనునది ఒక స్వతంత్రమైన మూలకమనుకొనిన, A మరియు B యొక్క సమ్మేళన నిర్వచనం నుండి $z \in A$ లేక $z \in B$ అనగా

ప్రతి $z \in A \cup B \implies z \in A$ or $z \in B$

$\implies z \in B$ or $z \in A$

$\implies z \in B \cup A$ ($B \cup A$ నిర్వచనం నుండి) (1)

ప్రతి $z \in A \cup B$ కి (1) సత్యమగుటచే పైదాని నుండి $A \cup B$ లోని ప్రతి మూలకము $B \cup A$ లోను మూలకమగును. కాబట్టి ఉపసమితి నిర్వచనం నుండి $(A \cup B) \subseteq (B \cup A)$ అగును

ఆ తర్వాత $y \in B \cup A$ ను ఒక స్వతంత్ర మూలకముగా తీసుకొని, y అనునది $A \cup B$ లోను మూలకమగునని చూసెదము.

ఇప్పుడు, ప్రతి $y \in B \cup A \implies y \in B$ లేక $y \in A$

$\implies y \in A$ లేక $y \in B$

$\implies y \in A \cup B$ ($A \cup B$ నిర్వచనం నుండి) (2)

ప్రతి $y \in B \cup A$ కి (2) సత్యమగుటచే పై దాని నుండి $B \cup A$ లోని ప్రతిమూలకము $A \cup B$ లోను మూలకమగును. కాబట్టి ఉపసమితుల నిర్వచనం నుండి $(B \cup A) \subseteq (A \cup B)$ అగును.

కావున $(A \cup B) \subseteq (B \cup A)$ మరియు $(B \cup A) \subseteq (A \cup B)$ అని చూపబడినది. ఇది $(A \cup B) = (B \cup A)$ అయినప్పుడు మాత్రమే సంభవించును. ఇదే పద్ధతిలో తక్కిన ధర్మములను నిరూపించవచ్చు.

గణితశాస్త్రంలో నిరూపణ గురించి (About proofs in Mathematics)

గణితశాస్త్రంలో ఒక ప్రవచనమును సత్యప్రవచనము అనిన అది ఎల్లప్పుడూ సత్యముగానే ఉండవలెను. ఒక ప్రవచనము ఏదేని ఒక సందర్భములో అసత్యమైన దానిని అసత్య ప్రవచనము అని అందురు. ఉదాహరణకు క్రింది కొన్ని ప్రవచనములను చూసెదము.

(i) ఏదేని ఒక ధనాత్మక బేసి పూర్ణాంకము ప్రధానాంకమగును. (ii) త్రిభుజములోని కోణముల మొత్తం 180^0

(iii) ప్రతి ప్రధానాంకము ఒక బేసి పూర్ణాంకము

(iv) A మరియు B అను ఏవేని రెండు సమితులలో $A \setminus B = B \setminus A$ అగును

ఇక్కడ ప్రవచనము (i) అసత్యము, ఎందుకనగా అనేకమైన ధనాత్మక బేసి పూర్ణాంకములు ప్రధానాంకములైనను, 9, 15, 21, 45 వంటి మొదలగు పూర్ణాంకములు ధనాత్మకము మరియు బేసి సంఖ్యలు, కానీ ప్రధానాంకములు కాదు.

ప్రవచనము (ii) సత్యము, ఎందుకనగా ఏ త్రిభుజమును తీసుకొన్నను కోణముల మొత్తము 180^0 కు సమానము.

ప్రవచనము (iii) అసత్యము, ఎందుకనగా 2 ప్రధానాంకము, కానీ సరి పూర్ణాంకము. 2 తప్ప మిగిలిన ప్రధానాంకములకు ప్రవచనము (iii) సత్యమగును. కావున ఒక ప్రవచనమును సత్యమని నిరూపించవలెనన్న అది అన్ని సందర్భములలోను సత్యముగా నుండవలెను. ఒక ప్రవచనము అసత్యమని నిరూపించుటకు, ఏదేని ఒక సందర్భములో అసత్యమని చూపిన చాలు.

ప్రవచనము (iv) అసత్యము. ఈ ప్రవచనమును విశ్లేషించెదము. మనము $A\backslash B$ కనుగొనుటకు A నుంచి B లో ఉన్న మూలకములన్నింటిని తొలగించెదము. అదే విధంగా $B\setminus A$ ని కనుగొనెదము.. కావున ఖచ్చితంగా ఈ ప్రవచనం అసత్యము. ఉదాహరణకు A = {2, 5, 8} మరియు B = {5, 7, – 1} అయిన $A\setminus B=\{2,8\}$ మరియు $B\setminus A=\{7,-1\}$. కనుక $A\setminus B\neq B\setminus A$. కావున ప్రవచనము (iv) అసత్యము.

ఉదాహరణ 1.1

A = {– 10, 0, 1, 9, 2, 4, 5}, B = {– 1, – 2, 5, 6, 2, 3, 4} సమితులకు

(i) సమితి సమ్మేళనము వినిమయమని సరిచూడుము మరియు వెన్ చిత్రము ద్వారా నిరూపించుము.

(ii) సమితి ఖండనము వినిమయమని సరిచూడుము మరియు వెన్ చిత్రము ద్వారా నిరూపించుము.

సాధన

(i) $A\cup B=\{-10,0,1,9,2,4,5\}\cup\{-1,-2,5,6,2,3,4\}$

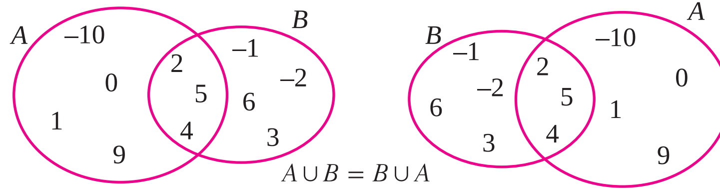
$=\{-10,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,9\}$ (1)

మరియు $B\cup A=\{-1,-2,5,6,2,3,4\}\cup\{-10,0,1,9,2,4,5\}$

$=\{-10,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,9\}$ (2)

కనుక (1) మరియు (2) ల నుండి $A\cup B=B\cup A$ అని నిరూపించబడినది.

వెన్ చిత్రము ద్వారా



పటము.1.7

కనుక నిరూపించబడినది

(ii) సమితి ఖండనముల వినిమయ న్యాయమును నిరూపించుట..

$A\cap B=\{-10,0,1,9,2,4,5\}\cap\{-1,-2,5,6,2,3,4\}$

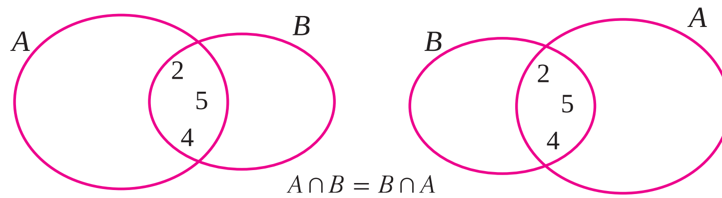
$=\{2,4,5\}.$ (1)

మరియు $B\cap A=\{-1,-2,5,6,2,3,4\}\cap\{-10,0,1,9,2,4,5\}$

$=\{2,4,5\}.$ (2)

కనుక (1) మరియు (2) ల నుండి $A\cap B=B\cap A$ అని నిరూపించబడినది.

వెన్ చిత్రము ద్వారా



పటము.1.8

కనుక నిరూపించబడినది

ఉదాహరణ 1.2

A = {1,2,3,4,5}, B = {3,4,5,6} మరియు C = {5,6,7,8} లకు (i) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$. అని చూపుము మరియు (ii) వెన్ చిత్రము ద్వారా సరిచూడుము.

సాధన

(i) $B\cup C = \{3,4,5,6\}\cup\{5,6,7,8\} = \{3,4,5,6,7,8\}$

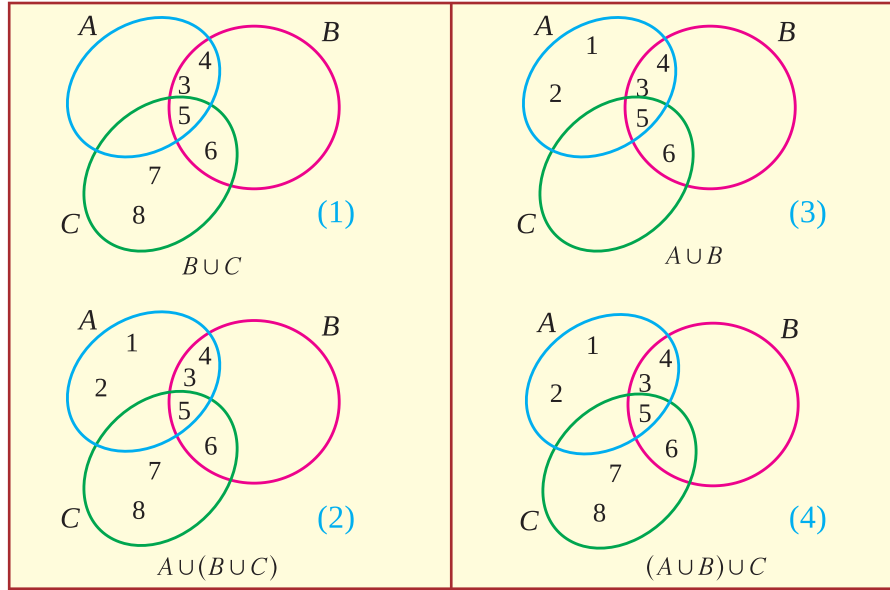
$\therefore\ A\cup(B\cup C) = \{1,2,3,4,5\}\cup\{3,4,5,6,7,8\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ (1)

మరియు $A\cup B = \{1,2,3,4,5\}\cup\{3,4,5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$

$\therefore\ (A\cup B)\cup C = \{1,2,3,4,5,6\}\cup\{5,6,7,8\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ (2)

(1) మరియు (2) ల నుండి $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ అని నిరూపించబడినది.

(ii) వెన్ చిత్రమునుపయోగించి



పటము.1.9

కనుక (2) మరియు (4) నుండి సమితి సమ్మేళనములో సహచర్య న్యాయము నిరూపించబడినది.

ఉదాహరణ 1.3

A = {a, b, c, d}, B = {a, c, e} మరియు C = {a, e} లకు (i) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$. అని చూపుము మరియు (ii) వెన్ చిత్రము ద్వారా సరిచూడుము.

సాధన

(i) A = {a, b, c, d}, B = {a, c, e} మరియు C = {a, e} అని ఇవ్వ బడినది.

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ అని నిరూపించుటకు మొదట $A\cap(B\cap C)$ తీసుకొనెదము.

$B\cap C = \{a,c,e\}\cap\{a,e\} = \{a,e\}$

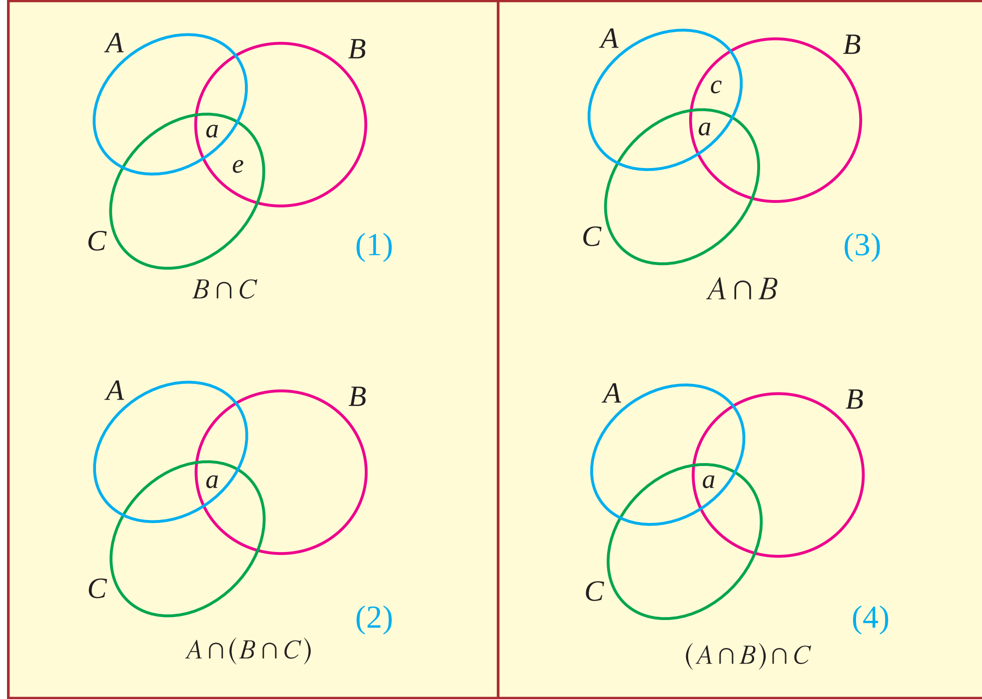
$A\cap(B\cap C) = \{a,b,c,d\}\cap\{a,e\} = \{a\}$. (1)

తరువాత $A\cap B = \{a,b,c,d.\}\cap\{a,c,e\} = \{a,c\}$

$(A\cap B)\cap C = \{a,c\}\cap\{a,e\} = \{a\}$ (2)

(1) మరియు (2) లు మనకు కావలసిన ఫలితము ఇచ్చును.

(ii) వెన్ చిత్రము ద్వారా



కనుక (2) మరియు (4) నుండి $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$ సరిచూడబడినది. పటము.1.10

ఉదాహరణ 1.4

ఇవ్వబడిన A = {*a*, *b*, *c*, *d*, *e*}, B = {*a*, *e*, *i*, *o*, *u*} మరియు C = {*c*, *d*, *e*, *u*} లకు

(i) $A\setminus(B\setminus C)\neq(A\setminus B)\setminus C$ అని చూపుము (ii) వెన్ చిత్రము ద్వారా సరిచూడుము.

సాధన

(i) మొదట $A\setminus(B\setminus C)$ ని కనుగొనెదము.

$(B\setminus C) = \{a,e,i,o,u\}\setminus\{c,d,e,u\} = \{a,i,o\}$

$A\setminus(B\setminus C) = \{a,b,c,d,e\}\setminus\{a,i,o\} = \{b,c,d,e\}.$ (1)

తరువాత $(A\setminus B)\setminus C$ ను కనుగొనెదము.

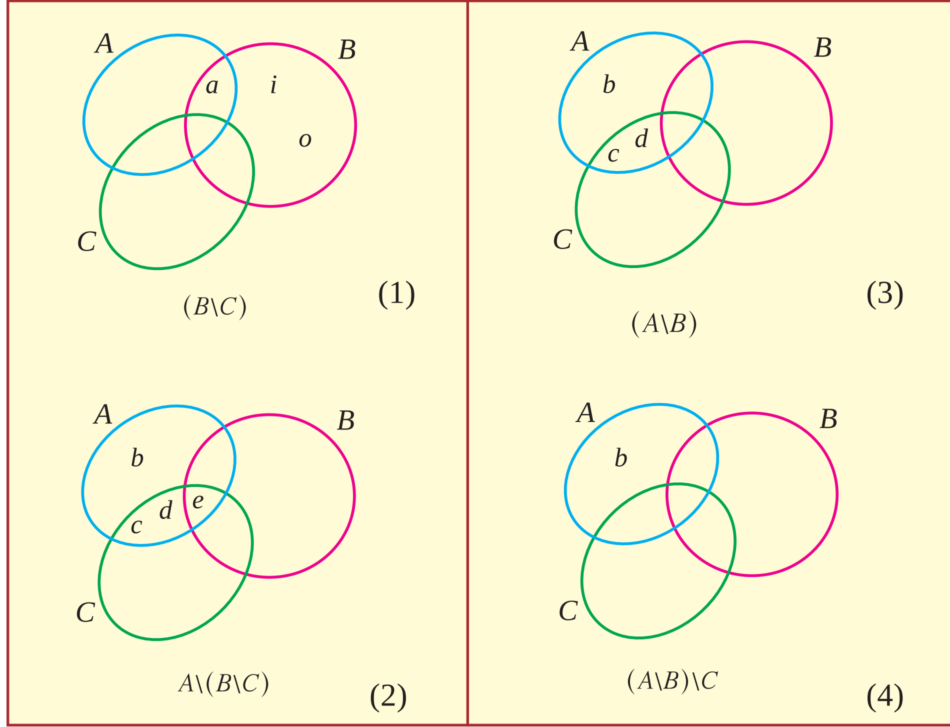
$A\setminus B = \{a,b,c,d,e\}\setminus\{a,e,i,o,u\} = \{b,c,d\}$

$(A\setminus B)\setminus C = \{b,c,d\}\setminus\{c,d,e,u\} = \{b\}.$ (2)

(1) మరియు (2) ల నుండి $A\setminus(B\setminus C)\neq(A\setminus B)\setminus C$.

కావున సహచర్య న్యాయము సమితి భేదమునకు వర్తించదు.

(ii) వెన్ చిత్రము ద్వారా



కావున (2) మరియు (4) నుండి $A\setminus(B\setminus C)\neq(A\setminus B)\setminus C$ సరిచూడబడినది. పటము.1.11

సూచనలు

సమితి భేదం సాహచర్య న్యాయమును పాటించదు. అయినను A, B మరియు C సమితులు పరస్పర వియుక్తములయిన $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\setminus C$ అగును. దీనిని సులభముగా నిరూపించవచ్చును. B మరియు C వియుక్తములయిన $B\setminus C = B$ అగును. A, B లు వియుక్తమయిన $A\setminus B = A$ అగును. కావున $A\setminus(B\setminus C) = A$ అగును. మరల, $A\setminus B = A$ మరియు A, C లు వియుక్తములయిన $A\setminus C = A$ అగును. కావున $(A\setminus B)\setminus C = A$. కావున మనము అనుకున్నట్లు $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\setminus C$ అగును. కాబట్టి పరస్పర వియుక్త సమితులకు సమితి భేదములో సహచర్య న్యాయము వర్తించును.

ఉదాహరణ 1.5

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, -2, 3, 4, 5, 6\}$ మరియు $C = \{2, 4, 6, 7\}$ అయిన

(i) $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ అని చూపుము. (ii) వెన్ చిత్రము ద్వారా సరిచూడుము.

సాధన

(i) మొదట $A\cup(B\cap C)$ కనుగొనెదము.

$$B\cap C = \{1, -2, 3, 4, 5, 6\}\cap\{2, 4, 6, 7\} = \{4, 6\}$$

$$A\cup(B\cap C) = \{0, 1, 2, 3, 4\}\cup\{4, 6\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}. \quad (1)$$

తరువాత

$$A\cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}\cup\{1, -2, 3, 4, 5, 6\}$$

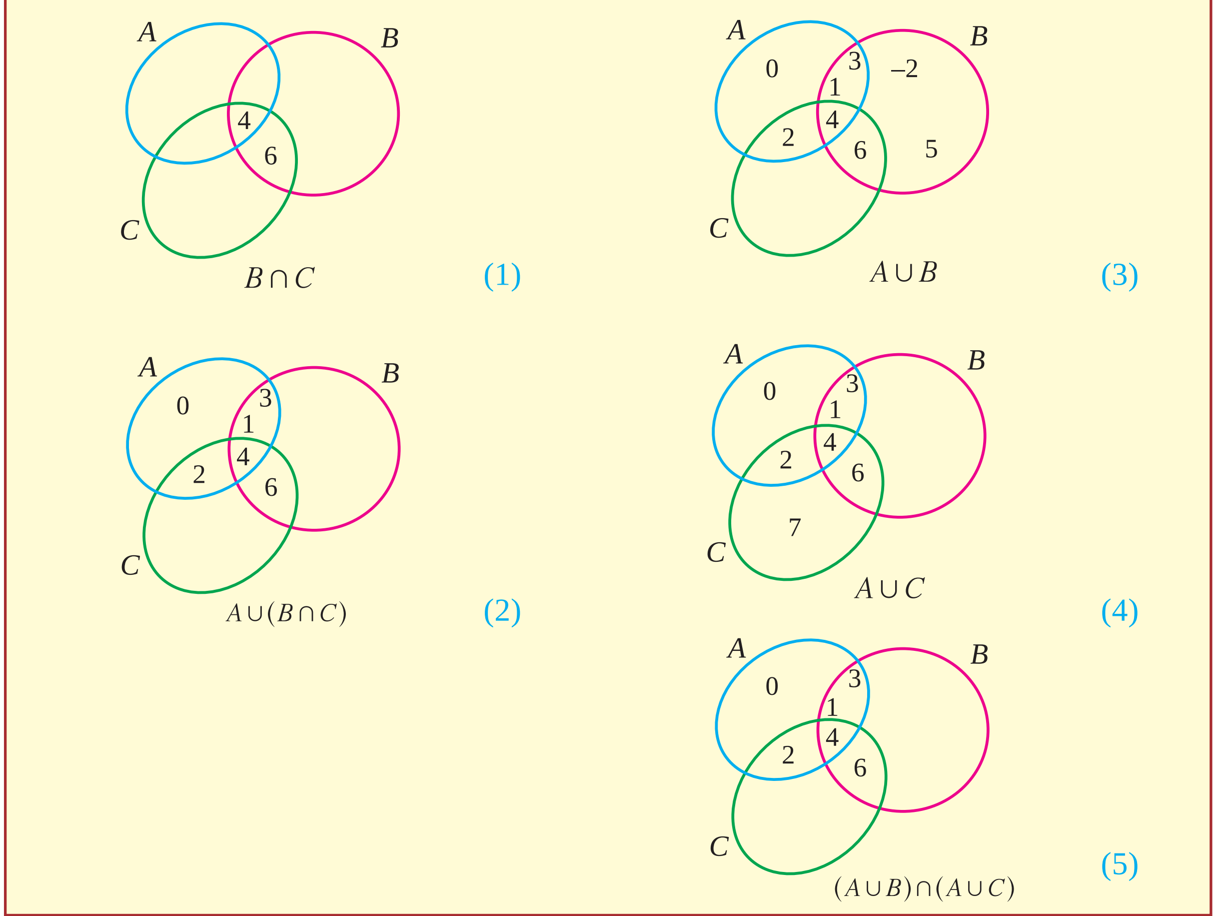
$$= \{-2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$A\cup C = \{0, 1, 2, 3, 4\}\cup\{2, 4, 6, 7\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7\}.$$

$$(A\cup B)\cap(A\cup C) = \{-2,0,1,2,3,4,5,6\}\cap\{0,1,2,3,4,6,7\}$$
$$= \{0,1,2,3,4,6\}. \qquad (2)$$

(1) మరియు (2) ల నుండి $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ అని నిరూపితమైనది.

(ii) వెన్ చిత్రము ద్వారా



పటము.1.12

(2) మరియు (5) ల నుండి $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ సరిచూడబడినది.

ఉదాహరణ 1.6

$A = \{x \mid -3 \le x < 4, x\in\mathbb{R}\}, B = \{x \mid x < 5, x\in\mathbb{N}\}$ మరియు

$C = \{-5,-3,-1,0,1,3\}$ అయిన $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$ అని చూపండి.

సాధన మొదట గమనించవలసినది సమితి A నందు −3 లేక అంతకంటే ఎక్కువ మరియు 4 కంటె తక్కువ గల వాస్తవ సంఖ్యలు (పూర్ణాంకములే కాకుండా) కలవు.

సమితి B లో 5 కంటే తక్కువ గల అన్ని ధన పూర్ణాంకములు కలవు. కావున,

$A = \{x \mid -3 \le x < 4, x\in\mathbb{R}\}$; అనగా A లో −3 నుండి 4 వరకు గల వాస్తవసంఖ్యలు కలవు. అయితే 4 చేరదు.



మరియు $B = \{x \mid x < 5, x\in\mathbb{N}\} = \{1,2,3,4\}$.

ఇపుడు కనుగొనవలసినది $B\cup C = \{1,2,3,4\}\cup\{-5,-3,-1,0,1,3\}$

$= \{1, 2, 3, 4, -5, -3, -1, 0\}$; కావున

$A \cap (B \cup C) = A \cap \{1, 2, 3, 4, -5, -3, -1, 0\}$

$= \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$. (1)

తరువాత కనుగొనవలసినది $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cap B = \{x \mid -3 \le x < 4, x \in \mathbb{R}\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3\}$;

మరియు $A \cap C = \{x \mid -3 \le x < 4, x \in \mathbb{R}\} \cap \{-5, -3, -1, 0, 1, 3\}$

$= \{-3, -1, 0, 1, 3\}$. కావున

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 2, 3,\} \cup \{-3, -1, 0, 1, 3\}$

$= \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$. (2)

(1) మరియు (2) ల నుండి $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

అభ్యాసము 1.1

1. $A \subset B$ అయిన $A \cup B = B$ అని చూపుము (వెన్ చిత్రము ఉపయోగించి).
2. $A \subset B$ అయిన $A \cap B$ మరియు $A \setminus B$ కనుగొనుము (వెన్ చిత్రము ఉపయోగించి).
3. P = $\{a, b, c\}$, Q = $\{g, h, x, y\}$ మరియు R = $\{a, e, f, s\}$ క్రింది వాటిని కనుగొనుము.
   (i) $P \setminus R$ (ii) $Q \cap R$ (iii) $R \setminus (P \cap Q)$.
4. A = {4, 6, 7, 8, 9}, B = {2, 4, 6} మరియు C= {1, 2, 3, 4, 5, 6} అయిన
   (i) $A \cup (B \cap C)$ (ii) $A \cap (B \cup C)$ (iii) $A \setminus (C \setminus B)$ లను కనుగొనుము.
5. $A = \{a, x, y, r, s\}, B = \{1, 3, 5, 7, -10\}$ సమితి సమ్మేళనముల వినిమయ న్యాయమును సరిచూడుము.
6. $A = \{l, m, n, o, 2, 3, 4, 7\}$ మరియు $B = \{2, 5, 3, -2, m, n, o, p\}$ లకు సమితి ఖండనముల వినిమయ న్యాయమును సరిచూడుము.
7. A = {x/x అనునది 42 యొక్క ప్రధాన కారణాంకములు}, $B = \{x \mid 5 < x \le 12, x \in \mathbb{N}\}$ మరియు $C = \{1, 4, 5, 6\}$ అయిన $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ సరిచూడుము.
8. P = $\{a, b, c, d, e\}$, Q = $\{a, e, i, o, u\}$ మరియు R = $\{a, c, e, g\}$ అయిన సమితి ఖండనముల సహచర్య న్యాయమును సరిచూడుము.
9. A = {5, 10, 15, 20}, B = {6, 10, 12, 18, 24} మరియు C = {7, 10, 12, 14, 21, 28} అయిన $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ అని సరిచూడుము. మీ జవాబును న్యాయపరచుము.
10. A = {–5, –3, –2, –1}, B = {–2, –1, 0} మరియు C = {–6, –4, –2} అయిన A\(B\C) మరియు (A\B)\C లను కనుగొనుము. సమితి భేద పరిక్రియల గూర్చి మీ అభిప్రాయమేమి?
11. A = {–3, –1, 0, 4, 6, 8, 10}, B = {–1, –2, 3, 4, 5, 6} మరియు C = {–1, 2, 3, 4, 5, 7} అయిన
    (i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ అని చూపుము
    (iii) వెన్ చిత్రమునుపయోగించి (i) ని సరిచూడుము. (iv) వెన్ చిత్రమునుపయోగించి (ii) ని సరిచూడుము.

1.5 డీ మార్గన్ న్యాయములు

అగస్టన్ డీమార్గాన్ తండ్రి (ఆంగ్లేయుడు) ఇండియాలోని తూర్పిండియా కంపెనీలో పని చేస్తుండెను. అగస్టీన్ డీ మార్గన్ (1806 – 1817) భారతదేశమునందు తమిళనాడులోని మధురై నందు జన్మించెను. కేంబ్రిడ్జ్‌లో ట్రినిటి కళాశాల నందు విద్యనభ్యసించెను. సమ్మేళనము, ఖండనము మరియు పూరకము అను మూడు ప్రాథమిక సమితి పరిక్రియల ద్వారా డీ మార్గన్ న్యాయములను సంబంధపరచవచ్చును.

సమితి భేదమునకు డీ మార్గన్ న్యాయములు:

A, B మరియు C అనునవి ఏవేని మూడు సమితులు అనుకొనిన

(i) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (ii) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

సమితి పూరకమునకు డీ మార్గన్ న్యాయములు:

U విశ్వసమితి యందు A మరియు B సమితులు గలవని అనుకొనిన

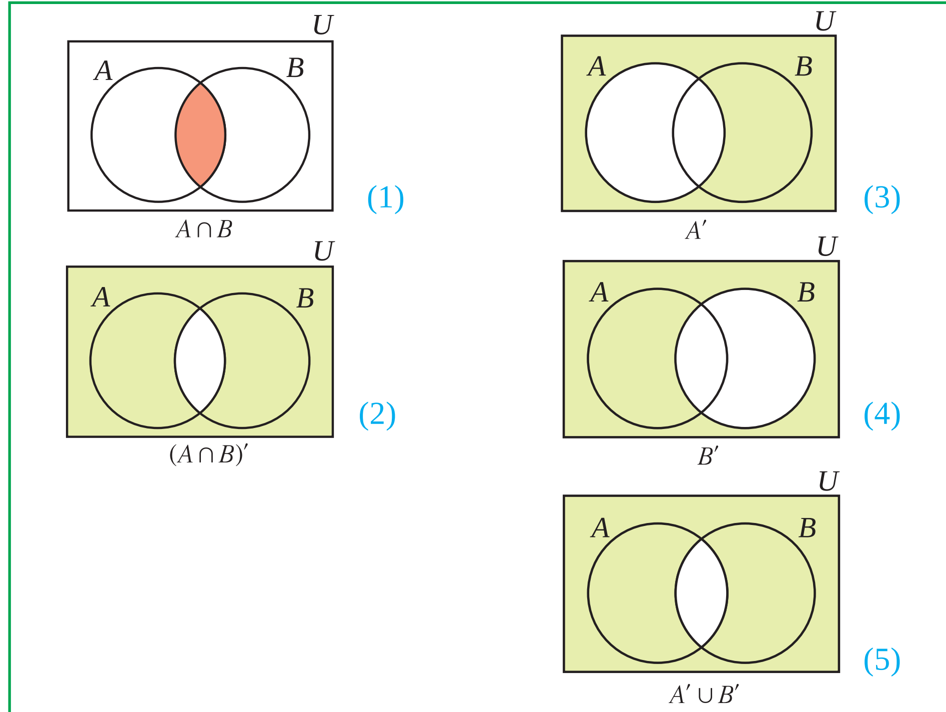
(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

సమితి భేదము నుంచి సమితి పూరక న్యాయ నిరూపణ కోసము, ఏదేని ఒక సమితి D కి $D' = U \setminus D$ అగునని పరిశీలించవచ్చును. దీనిని మనము నిరూపించవలసిన అవసరంలేదు. అయితే సమస్య పరిష్కారములో ఈ న్యాయములను ఎట్లు ఉపయోగించవలెనో తెలుసుకొనవలయును.

ఉదాహరణ 1.7

$(A \cap B)' = A' \cup B'$ ను వెన్ చిత్రమునుపయోగించి సరిచూడుము.

సాధన



పటము.1.13

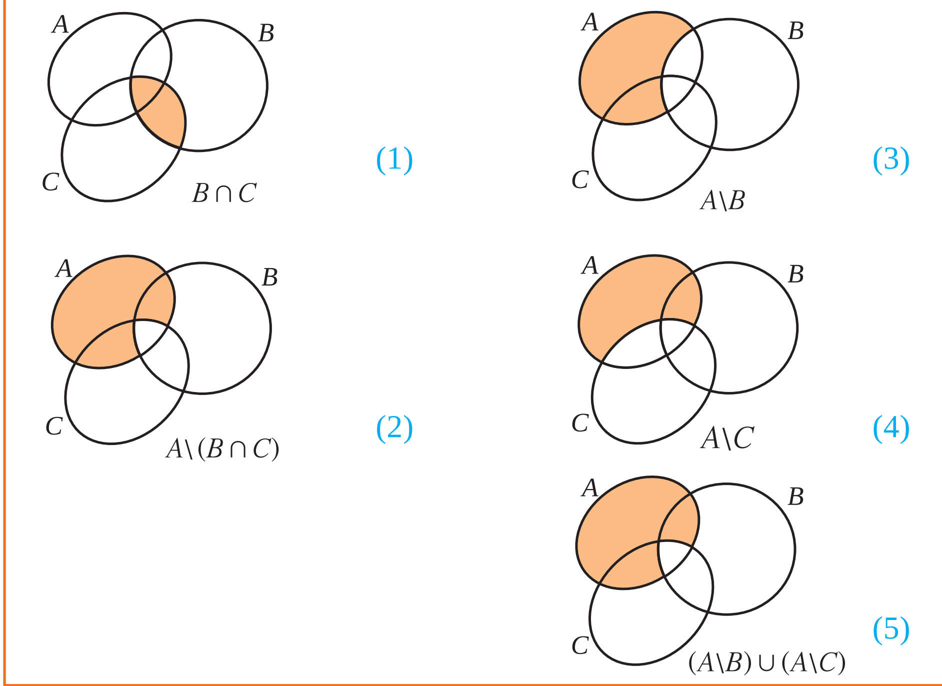
(2) మరియు (5) ల నుండి $(A \cap B)' = A' \cup B'$ సరిచూడబడినది.

ఉదాహరణ 1.8

వెన్ చిత్రమునుపయోగించి సమితి భేదములకు డీ మార్గన్ న్యాయమును సరిచూడుము.

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

సాధన



పటము.1.14

(2) మరియు (5) ల నుండి $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ సరిచూడబడినది.

ఉదాహరణ 1.9

$U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $A = \{-2, 2, 3, 4, 5\}$ మరియు $B = \{1, 3, 5, 8, 9\}$ అనుకొనిన, సమితి పూరకముల డీ మార్గన్ న్యాయములను సరిచూడుము.

సాధన మొదట సరిచూడవలసినది $(A \cup B)' = A' \cap B'$. ఇందులో తీసుకొనవలసినది

$$A \cup B = \{-2, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 3, 5, 8, 9\} = \{-2, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\};$$

$$(A \cup B)' = U \setminus \{-2, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\} = \{-1, 0, 6, 7, 10\}. \quad (1)$$

తరువాత కనుగొనవలసినది $A' = U \setminus A = \{-1, 0, 1, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$B' = U \setminus B = \{-2, -1, 0, 2, 4, 6, 7, 10\}.$$

కావున $A' \cap B' = \{-1, 0, 1, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{-2, -1, 0, 2, 4, 6, 7, 10\}$

$$= \{-1, 0, 6, 7, 10\}. \quad (2)$$

(1) మరియు (2) ల నుండి $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

ఇదే విధముగా పై సమితులనుపయోగించి $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ను సరిచూడవచ్చును. వివరణలు అభ్యాసమునకు వదిలివేయబడినవి.

ఉదాహరణ 1.10

$A = \{a, b, c, d, e, f, g, x, y, z\}$, $B = \{1, 2, c, d, e\}$ మరియు $C = \{d, e, f, g, 2, y\}$ అయిన $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ ను సరిచూడుము.

సాధన మొదట కనుగొనవలసినది $B \cup C = \{1, 2, c, d, e\} \cup \{d, e, f, g, 2, y\}$

$= \{1, 2, c, d, e, f, g, y\}$.

$A \setminus (B \cup C) = \{a, b, c, d, e, f, g, x, y, z\} \setminus \{1, 2, c, d, e, f, g, y\}$

$= \{a, b, x, z\}$. (1)

$A \setminus B = \{a, b, f, g, x, y, z\}$ మరియు $A \setminus C = \{a, b, c, x, z\}$

అదేవిధముగా $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{a, b, x, z\}$. (2)

కావున (1) మరియు (2) ల నుండి $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

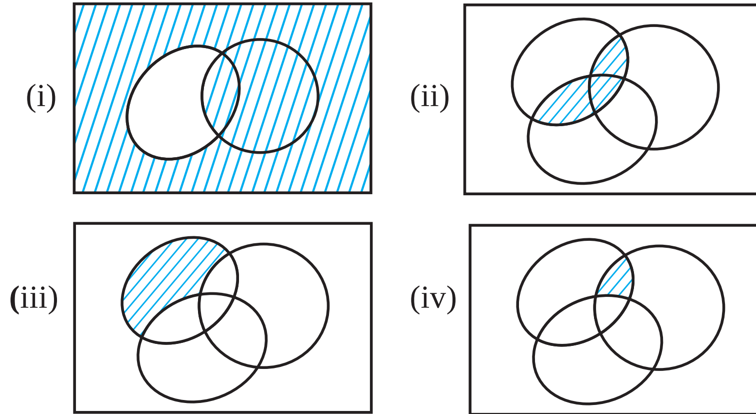
అభ్యాసము 1.2

1. క్రింది వాటిని వెన్ చిత్రము ద్వారా తెలుపుము.

   (i) U = {5, 6, 7, 8, ..., 13}, A = {5, 8, 10, 11} మరియు B = {5, 6, 7, 9, 10}

   (ii) U = {a, b, c, d, e, f, g, h}, M = {a, b, f, g} మరియు N = {a, b, d, e, g}

2. ఛాయ వేసిన ప్రతి ప్రాంతమును వివరించుము. U, $A, B, C, \cup, \cap$,′ మరియు \ అను గుర్తులను అవసరమగుచోట ఉపయోగించుము.



3. క్రింద వివరించిన A, B మరియు C అను మూడు సమితులను వెన్ చిత్రము ద్వారా గీయుము?

   (i) $A \cap B \cap C$ (ii) A మరియు B వియుక్తములు కాని రెండు C యొక్క ఉపసమితులు

   (iii) $A \cap (B \setminus C)$ (iv) $(B \cup C) \setminus A$ (v) $A \cup (B \cap C)$

   (vi) $C \cap (B \setminus A)$ (vii) $C \cap (B \cup A)$

4. $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$ ను వెన్ చిత్రము ద్వారా సరిచూడుము.

5. $U = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$, $A = \{8, 16, 24\}$ మరియు $B = \{4, 16, 20, 28\}$ అయిన $(A \cup B)'$ మరియు $(A \cap B)'$ కనుగొనుము.

6. ఇవ్వబడిన $U = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, A = {a, b, f, g} మరియు B = {a, b, c} లకు సమితి పూరకముల డీ మార్గన్ న్యాయములను సరిచూడుము.

7. క్రింద ఇవ్వబడిన సమితులను ఉపయోగించి సమితి భేదముల డీ మార్గన్ న్యాయములను సరిచూడుము:
A = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}, B = {1, 2, 5, 7} మరియు C = {3, 9, 10, 12, 13}.

8. $A = \{10,15,20,25,30,35,40,45,50\}$, $B = \{1,5,10,15,20,30\}$ మరియు
$C = \{7,8,15,20,35,45,48\}$ అయిన $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ ను సరిచూడుము.

9. వెన్ చిత్రమునుపయోగించి క్రిందివి సరియైనవేనని చూపుము.

(i) $A \cap (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(iii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (iv) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(v) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (vi) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

1.6 సమితుల పరిమాణత్వము (లేక) ఆది సంఖ్య (Cardinality of sets)

IX వ తరగతిలో $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ అను సూత్రమునుపయోగించి, రెండు సమితుల సమస్యలను సాధించుటను నేర్చుకొంటిమి. A, B మరియు $A \cap B$ యొక్క ఆదిసంఖ్యలు తెలిసినపుడు $A \cup B$ సమితి యొక్క ఆదిసంఖ్యను గణించుటకు ఈ సూత్రము ఉపయోగపడును. A, B మరియు C మూడు సమితులు అనుకొనిన, $A \cup B \cup C$ యొక్కఆదిసంఖ్యను కనుగొనుటకు అనురూప సూత్రము ఏమి? ఈ సందర్భంలో ఈ సూత్రము ఇవ్వబడినది.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

పై సూత్రము ఉపయోగమును క్రింది ఉదాహరణతో విశదీకరించ వచ్చును.

ఉదాహరణ 1.11

ఒక విద్యార్థుల సమూహములో, 65 మంది కాలి బంతి, 45 మంది హాకీ, 42 మంది క్రికెట్, 20 మంది కాలిబంతి మరియు హాకీ, 25 మంది కాలిబంతి మరియు క్రికెట్, 15 మంది హాకీ మరియు క్రికెట్ మరియు 8 మంది మూడింటిని ఆడెదరు. అయిన సమూహములోని విద్యార్థుల సంఖ్యను కనుగొనుము. (సమూహములోని ప్రతి విద్యార్థి కనీసము ఒక ఆటను ఆడుదురని అనుకొనుము.)

సాధన F, H మరియు C అనునవి క్రమముగా కాలిబంతి, హాకీ మరియు క్రికెట్ ఆడువారి సంఖ్యగా తీసుకొనిన

$n(F) = 65$, $n(H) = 45$ మరియు $n(C) = 42$.

మరియు $n(F \cap H) = 20$, $n(F \cap C) = 25$, $n(H \cap C) = 15$ మరియు $n(F \cap H \cap C) = 8$.

మొత్తం సమూహములోని విద్యార్థుల సంఖ్య $n(F \cup H \cup C)$ ను కనుగొనుట.

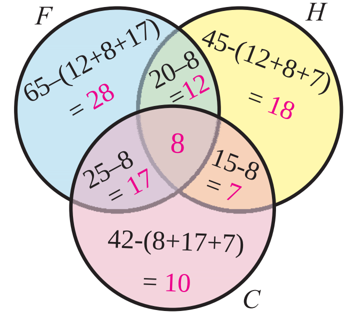
సూత్రము ద్వారా $n(F \cup H \cup C) = n(F) + n(H) + n(C) - n(F \cap H)$

$$- n(H \cap C) - n(F \cap C) + n(F \cap H \cap C)$$

$$= 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + 8 = 100.$$

కావున, సమూహములోని విద్యార్థుల సంఖ్య = 100.

మరొక పద్ధతి:



పటము.1.15

వెన్ చిత్రము ద్వారా ఇదే సమస్యను సాధించవచ్చును. ప్రస్తుతము నిత్య జీవితములో వచ్చు కొన్ని సమస్యలను వెన్ చిత్రము మరియు తర్కము ద్వారా సాధించుటకు వీలగును. వెన్ చిత్రముయందు 3 ఖండన సమితులు కలవు. ప్రతి ఒక్కటీ ఒక ఆటను తెలుపును. పటమును చూచి, సమూహములో గల ఆటగాళ్ళ సంఖ్యను ఇవ్వబడిన వాక్యములను చదివి జాగ్రత్తగా లెక్కించి పూరింపుము.

సమూహములోని విద్యార్థుల సంఖ్య

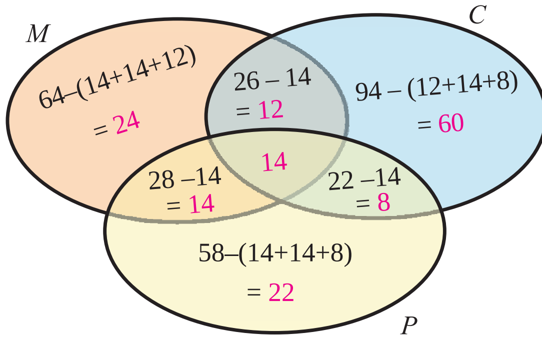
$= 28 + 12 + 18 + 7 + 10 + 17 + 8 = 100.$

ఉదాహరణ 1.12

విశ్వవిద్యాలయ విద్యార్థుల పరిశీలనలో, 64 మంది గణితము, 94 మంది సంగణక శాస్త్రము, 58 మంది భౌతిక శాస్త్రము, 28 మంది గణితము మరియు భౌతిక శాస్త్రము, 26 మంది గణితము మరియు సంగణక శాస్త్రము, 22 మంది సంగణక శాస్త్రము మరియు భౌతిక శాస్త్రము, మరియు 14 మంది మూడింటిని తీసుకొనిరి. పరిశీలనలో గల విద్యార్థుల సంఖ్యను కనుగొనుము. ఒకే ఒక విభాగమును మాత్రము తీసుకొన్నవారు ఎందరు. కనుగొనుము.

సాధన ఇచ్చిన వివరములు వెన్ చిత్రములో తెలుపవలెను.

M, C, P అనునవి క్రమముగా విద్యార్థులు తీసుకొనిన గణితశాస్త్రము, సంగణక శాస్త్రము మరియు భౌతిక శాస్త్రము అనుకొనిన, ఇచ్చిన వివరములు వెన్ చిత్రములో పూరింపబడినవి.



పటము.1.16

$n(M \cap C \cap P') = 26 - 14 = 12$

$n(M \cap P \cap C') = 28 - 14 = 14$

$n(C \cap P \cap M') = 22 - 14 = 8$

పరిశీలనలో గల విద్యార్థుల సంఖ్య

$= 24 + 12 + 60 + 8 + 22 + 14 + 14 = 154$

గణిత శాస్త్రము మాత్రము తీసుకొన్న విద్యార్థుల సంఖ్య $= 64–(14+14+12) = 24$

సంగణక శాస్త్రము మాత్రము తీసుకొన్న విద్యార్థుల సంఖ్య $= 94 – (12+14+8) = 60$

భౌతిక శాస్త్రము మాత్రము తీసుకొన్న విద్యార్థుల సంఖ్య $= 58 – (14+14+8) = 22$

ఒకే ఒక విభాగమును మాత్రము తీసుకొనిన విద్యార్థుల సంఖ్య $= 24 + 60 + 22 = 106$

ఉదాహరణ 1.13

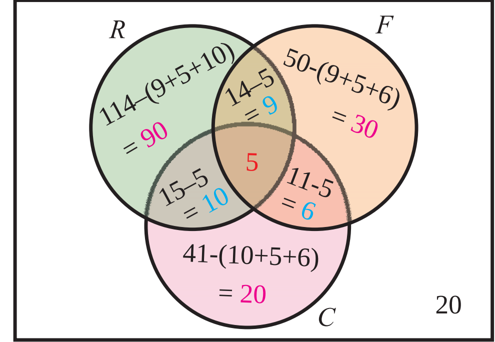
ఒక ఆకాశవాణి కేంద్రము 190 విద్యార్థులపై వారికి ఇష్టమైన సంగీత రకములను తెలుసుకొనుటకు పరిశీలన జరిపెను. ఈ పరిశీలనలో 114 మంది రాక్ సంగీతము, 50 మంది జానపద సంగీతము, 41 మంది శాస్త్రీయ సంగీతము ఇష్టపడిరి. 14 మంది రాక్ సంగీతము మరియు జానపద సంగీతము, 15 మంది రాక్ సంగీతము మరియు శాస్త్రీయ సంగీతము, 11 మంది శాస్త్రీయ సంగీతము మరియు జానపద సంగీతము, 5 మంది మూడింటిని ఇష్టపడిరి. అయిన

(i) మూడింటిని ఇష్టపడనివారు ఎంత మంది?

(ii) రెండు రకములను మాత్రము ఇష్టపడువారు ఎంత మంది?

(iii) రాక్ సంగీతము కాక జానపద సంగీతము ఇష్టపడువారు ఎంత మంది? కనుగొనుము.

సాధన R, F మరియు C అనునవి క్రమముగా రాక్ సంగీతము, జానపద సంగీతము మరియు శాస్త్రీయ సంగీతము ఇష్టపడు విద్యార్థుల సమితి అనుకొనిన,



పటము.1.17

ఇవ్వబడిన వివరములను వెన్ చిత్రములో పూరింపుము.

$n(R \cap F \cap C') = 14 - 5 = 9$

$n(R \cap C \cap F') = 15 - 5 = 10$

$n(F \cap C \cap R') = 11 - 5 = 6.$

వెన్ చిత్రము నుండి 3 రకముల సంగీతములలో ఏదేని ఒక రకమును ఇష్టపడు విద్యార్థుల సంఖ్య

$90 + 9 + 30 + 6 + 20 + 10 + 5 = 170.$

పరిశీలన చేయబడిన విద్యార్థుల సంఖ్య = 190.

మూడింటిని ఇష్టపడని విద్యార్థుల సంఖ్య = 190 – 170 = 20.

రెండింటిని మాత్రము ఇష్టపడు విద్యార్థుల సంఖ్య = 9 + 6 + 10 = 25.

రాక్ సంగీతము కాక జానపదసంగీతము ఇష్టపడు విద్యార్థుల సంఖ్య = 30 + 6 = 36.

అభ్యాసము 1.3

1. A మరియు B లు రెండు సమితులు మరియు U అనునది విశ్వసమితి, $n(U) = 700$, $n(A) = 200$, $n(B) = 300$ మరియు $n(A \cap B) = 100$ అయిన $n(A' \cap B')$ ను కనుగొనుము.

2. $n(A) = 285$, $n(B) = 195$, $n(U) = 500$, $n(A \cup B) = 410$ ఇవ్వబడిన $n(A' \cup B')$ ను కనుగొనుము.

3. A, B మరియు C అను ఏవేని మూడు సమితులు $n(A) = 17$, $n(B) = 17$, $n(C) = 17$, $n(A \cap B) = 7$, $n(B \cap C) = 6$, $n(A \cap C) = 5$ మరియు $n(A \cap B \cap C) = 2$ అయిన $n(A \cup B \cup C)$ ను కనుగొనుము.

4. క్రింద ఇవ్వబడిన సమితులనుపయోగించి
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$ ని సరిచూడుము.

   (i) A = {4, 5, 6}, B = {5, 6, 7, 8}, మరియు C = {6, 7, 8, 9}

   (ii) A = {a, b, c, d, e}, B = {x, y, z}, మరియు C = {a, e, x}

5. ఒక కళాశాలలో 60 మంది విద్యార్థులు రసాయన శాస్త్రము, 40 మంది భౌతిక శాస్త్రము, 30 మంది జీవ శాస్త్రము, 15 మంది రసాయన మరియు భౌతిక శాస్త్రములు, 10 మంది భౌతిక మరియు జీవ శాస్త్రములు, 5 మంది జీవ మరియు రసాయన శాస్త్రములందు చేరిరి. మూడింటిలో ఏ ఒక్కరూ చేరలేదు. అయిన కనీసము ఒక పాఠములోనైన చేరిన వారెందరు?

6. ఒక నగరంలో ప్రజలు 85% ఆంగ్లము, 40% తమిళము, 20% హిందీ మాట్లాడుదురు మరియు 42% ఆంగ్లము మరియు తమిళము, 23% తమిళము మరియు హిందీ మరియు 10% ఆంగ్లము మరియు హిందీ మాట్లాడుదురు. అయిన మూడు భాషలను మాట్లాడు ప్రజల శాతమును కనుగొనుము?

7. ఒక ప్రకటనా సంస్థ తన 170 మంది ఖాతాదారులలో 115 మంది దూరదర్శిని, 110 మంది ఆకాశవాణి, 130 మంది వార్తా పత్రికలను మరియు 85 మంది దూరదర్శిని మరియు వార్తా పత్రికలు, 75 మంది దూరదర్శిని మరియు ఆకాశవాణి, 95 మంది ఆకాశవాణి మరియు వార్తా పత్రికలు మరియు 70 మంది మూడింటిని వాడుదురు. ఈ వివరములను వెన్ చిత్రము ద్వారా తెలుపుము.

   (i) ఎంత మంది ఆకాశవాణి మాత్రము వాడుదురు?

   (ii) ఎంత మంది దూరదర్శిని మాత్రము వాడుదురు?

   (iii) ఎంత మంది ఆకాశవాణి కాక దూరదర్శిని మరియు వార్తా పత్రికలు వాడుదురు?

8. 4000 మంది విద్యార్థులు గల పాఠశాలయందు 2000 మంది ఫ్రెంచ్ తెలిసినవారు, 3000 మంది తమిళము, 500 మంది హిందీ, 1500 మంది ఫ్రెంచ్ మరియు తమిళము, 300 మంది ఫ్రెంచ్ మరియు హిందీ, 200 మంది తమిళము మరియు హిందీ మరియు 50 మంది మూడు భాషలు తెలిసినవారు కలరు.

   (i) ఏ ఒక్క భాష తెలియని వారెందరు?

   (ii) కనీసము ఒక భాష తెలిసిన వారెందరు?

   (iii) రెండు భాషలు తెలిసిన వారెందరు?

9. 120 కుటుంబములు గల ఒక గ్రామములో, 93 కుటుంబములు వంట చెఱకు, 63 కుటుంబాలు కిరోసిన్, 45 కుటుంబములు వంటగ్యాస్, 45 కుటుంబములు వంట చెఱకు మరియు కిరోసిన్, 24 కుటుంబములు కిరోసిన్ మరియు వంటగ్యాస్, 27 కుటుంబములు వంటగ్యాస్ మరియు వంట చెఱకు వాడుదురు. అయిన వంట చెఱకు, కిరోసిన్ మరియు వంటగ్యాస్ వాడు వారెందరో కనుగొనుము?

1.7 సంబంధములు

మనము సమితి భావనను గూర్చి ముందు భాగమునందు చూచితిమి. ఇచ్చిన సమితులకు సమ్మేళనము, ఖండనము మరియు పూరకముల ద్వారా నూతన సమితులను ఎట్లు సృష్టించవచ్చునో చూచితిమి. ఇపుడు మరొక పద్ధతిలో ఇచ్చిన రెండు సమితులు A మరియు B ద్వారా నూతన సమితులను సృష్టించుటను చూడబోతున్నాము. మరొక ముఖ్యమైన గణిత భావనలు “సంబంధము” మరియు “ప్రమేయము” లను నిర్వచించుటలో ఈ నూతన సమితి ముఖ్య పాత్ర వహించును.

A మరియు B రెండు శూన్యేతర సమితులు అయిన, A తో B యొక్క కార్టీషియన్ లబ్ధము $A \times B$ (A క్రాస్ B) అను నూతన సమితి నిర్వచనము క్రింది విధముగా ఇవ్వబడినది.

$$A \times B = \{(a,b) \backslash a \in A \text{ మరియు } b \in B\}.$$

అదే విధముగా $B \times A$ (B క్రాస్ A) అను సమితిని ఈ విధముగా నిర్వచింపవచ్చును.

$$B \times A = \{(b,a) \backslash b \in B \text{ మరియు } a \in A\}$$

సూచనలు

(i) (a, b) అను యుగ్మములో క్రమము ముఖ్యమైనది. అనగా $a \neq b$ అయినపుడు $(a, b) \neq (b, a)$.

(ii) $A \times B$ కార్టీషియన్ లబ్ధములో A మరియు B సమితులు సమానమైన ఇది సాధ్యమగును .

ఒక ఉదాహరణ చూచెదము

ఒక సెల్‌ఫోన్ దుకాణము C_1, C_2, C_3 అను మూడు రకముల సెల్‌ఫోన్లను విక్రయించెను. C_1 ధర ₹1200, C_2 ధర ₹2500 మరియు C_3 ధర ₹2500 అనుకొనుము.

$A = \{ C_1, C_2, C_3 \}$ మరియు $B = \{1200, 2500\}$ గా తీసుకొనుము.

ఈ సందర్భమున , $A \times B = \{(C_1, 1200), (C_1, 2500), (C_2, 1200), (C_2, 2500), (C_3, 1200), (C_3, 2500)\}$

కానీ $B \times A = \{(1200, C_1), (2500, C_1), (1200, C_2), (2500, C_2,),(1200, C_3), (2500, C_3)$.

$A \neq B$ అయితే $A \times B \neq B \times A$ అని సులభముగా తెలుసుకొనవచ్చును.

$F = \{(C_1, 1200), (C_2, 2500), (C_3, 2500)\}$ అనునది $A \times B$ యొక్క ఒక ఉపసమితి అనుకొనుము.

పై క్రమయుగ్మములో ప్రతి మొదటి మూలకము ఏకైక మూలకముతో సంబంధము కలిగియున్నది. అనగా మొదటి స్థానములో ఏ మూలకమూ, రెండవ స్థానములోని ఒకటి కన్నా ఎక్కువ మూలకములతో యుగ్మము కలిగియుండుట లేదు.

F లో సాధారణంగా మొదటి మూలకము ధరను రెండవ మూలకము సూచించును. తరువాత $E = \{(1200, C_1), (2500, C_2), (2500, C_3)\}$ అనునది $B \times A$ యొక్క ఉపసమితి అయిన, ఇచట C_2 మరియు C_3 అను రెండు వేర్వేరు మూలకములు 2500 అను మొదటి మూలకముతో సంబంధము కలిగియున్నది.

నిర్వచనము

A మరియు B అనునవి రెండు శూన్యేతర సమితులు అనుకొనిన, A నుండి B కు గల సంబంధము R అనునది $A \times B$ యొక్క శూన్యేతర ఉపసమితి అగును. అనగా $R \subseteq A \times B$

R యొక్క ప్రదేశము $= \{x \in A / (x,y) \in R$ కొన్ని $y \in B$ కి$\}$

R యొక్క వ్యాప్తి $= \{y \in B / (x,y) \in R$ కొన్ని $x \in A$ కి$\}$

1.8 ప్రమేయములు (Functions)



పీటర్ డిరిచ్లెట్

(1805-1859)

జెర్మనీ

సంఖ్యా సిద్ధాంతము, వైశ్లేషకము మరియు యాంత్రికశాస్త్ర విభాగములలో డిరిచ్లెట్ ఎనలేని కృషి చేసిరి.

ఇతడు 1837 లో ప్రమేయమును $y = f(x)$ అను గుర్తుతో నవీన భావనను పరిచయంచేసెను. మరియు ఇతను సుపరిచితమైన ఫిజియాన్హోల్ సూత్రమును సూత్రీకరించెను.

A మరియు B లు ఏవేని రెండు శూన్యేతర సమితులు అనుకొనుము. ఒక ప్రమేయం A నుండి B కి గల సంబంధము, $f \subseteq A \times B$ అగుటకు ఈ క్రిందివి వర్తించవలెను:

(i) f ప్రదేశం $= A$.

(ii) $(x, y) \in f$ అగుటకు, ప్రతి $x \in A$ కు ఒకే ఒక $y \in B$ గా నుండవలెను.

A నుండి B కు గల ప్రమేయము అనునది ఒక ప్రత్యేక సంబంధము కలిగియుండి పై *(i)*, *(ii)* లను తృప్తిపరచునదిగా నుండుటను గమనించుము. అటువంటి ప్రమేయమును ప్రతిసర్జనము (mapping) అని అందురు.

A నుండి B కు గల ప్రమేయము f ను $f\colon A \to B$ గా సూచించ వలయును. మరియు $(x,y) \in f$ అయిన దానిని $y = f(x)$ అని వ్రాయవలెను.

సంబంధముల భావనను ఉపయోగించకుండా ప్రమేయమును సవరించి క్రింది విధంగా నిర్వచించవచ్చును. అయినను అనేక సమయాల్లో ఈ సూత్రీకరణను, ప్రమేయము యొక్క వాడుకలోని నిర్వచనముగా ఉపయోగపడుచున్నది.

నిర్వచనము

A మరియు B లు ఏవైనా రెండు శూన్యేతర సమితులు అనుకొనుము. A నుండి B కు ఒక ప్రమేయం f అగుటకు నియమం, ప్రతి మూలకం $x \in A$ కు ఏకైక మూలకం $y \in B$ గా వుండును. మనము దీనిని $y = f(x)$ గా సూచించవచ్చును అనగా x ప్రమేయం y అని అర్థం.

ప్రమేయం యొక్క **ప్రదేశం (domain)** సమితి A అగును. ప్రమేయం యొక్క **సహ ప్రదేశం (co-domain)** సమితి B అగును. f లో x యొక్క **ప్రతిబింబమును (image)** y అనబడును మరియు y యొక్క **పూర్వబింబము (pre-image)** x అనబడును. f లో A యొక్క అన్ని ప్రతిబింబముల మూలకముల సమితిని f యొక్క **వ్యాప్తి (range)** అందురు. సహప్రదేశము యొక్క ఉపసమితిని ఆ ప్రమేయం యొక్క వ్యాప్తి అగునని గమనింపుము.

1837 ప్రాంతములో, **పీటర్ డిర్చలెట్** మరియు **నికోలై లాబచెవస్కైలు** వేర్వేరుగా ప్రమేయమునకు ఆధునిక నిర్వచనం ఇచ్చెరి. దీనికి ముందు ప్రమేయమునకు సరైన నిర్వచనం లేదు.

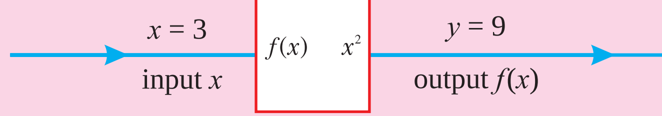
పై నిర్వచనములకు ముందు విభాగము 1.7 లో పరిగణింపబడిన ఉదాహరణ నుండి, సమితి

$F = \{(C_1, 1200), (C_2, 2500), (C_3, 2500)\}$ అనునది ఒక ప్రమేయమును తెలియజేయును. ఎందుకనగా $F \subseteq A \times B$ అను సంబంధము *(i)*, *(ii)* నియమములను తృప్తిపరచుచున్నది.

$E = \{(1200, C_1), (2500, C_2), (2500, C_3)\}$ అనునది ప్రమేయము కాదు. ఎందుకనగా $(2500, C_2), (2500, C_3) \in E$ అనునది *(ii)* వ నియమమును తృప్తిపరచడంలేదు..

సూచన

(i) ప్రమేయము f ను ఒక యంత్రముగా భావించిన ప్రతి x యొక్క ఉత్పాదకము (input) విలువకు y కు ఏకైక ఉత్పన్నము (output) లభించును.



(ii) ఒక ప్రమేయమును నిర్వచించుటకు ప్రదేశము, సహప్రదేశము మరియు ప్రదేశములోని ప్రతి మూలకము, సహప్రదేశములోని ఏకైక మూలకముతో సంబంధమును పాటించుట అవసరమగుచున్నది.

ఉదాహరణ 1.14

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ మరియు $B = \{-1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12\}$ అనుకొనుము.

$R = \{(1, 3), (2, 6), (3, 10), (4, 9)\} \subseteq A \times B$ ఒక సంబంధము అయిన R ప్రమేయమా అని చూపుము మరియు ప్రదేశము, సహప్రదేశము, R యొక్క వ్యాప్తిని కనుగొనుము.

సాధన R ప్రదేశము $= \{1, 2, 3, 4\} = A$.

ప్రతి $x \in A$ కు ఒకే ఒక $y \in B$. కనుక $y = R(x)$.

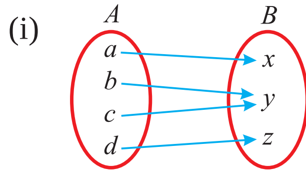
$\therefore$ R ఒక ప్రమేయము. B అనునది సహప్రదేశము అగును.

కనుక $R(1) = 3, R(2) = 6, R(3) = 10$ మరియు $R(4) = 9$. $\therefore$ R వ్యాప్తి $\{3, 6, 10, 9\}$.

ఉదాహరణ 1.15

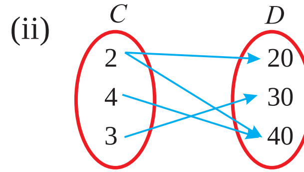
క్రింది బాణా చిత్రములు ఏవి ప్రమేయములగును? వివరింపుము.

(i)



పటము.1.18

(ii)



పటము.1.19

సాధన బాణా చిత్రము *(i)* లో A లోని ప్రతి మూలకమునకు ఏకైక ప్రతిబింబములున్నవి. కావున ఇది ఒక ప్రమేయము. బాణా చిత్రము *(ii)* లో C సమితిలో ఉన్నటువంటి మూలకము 2 నకు రెండు ప్రతిబింబములు 20 మరియు 40 లను కలిగివున్నది. కావున ఇది ప్రమేయము కాదు.

ఉదాహరణ 1.16

$X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$. అయిన క్రింది సంబంధములు X నుండి X కు ప్రమేయములు అగునో కాదో వివరింపుము?

(i) $f = \{ (2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4) \}$

(ii) $g = \{ (3, 1), (4, 2), (2, 1) \}$ (iii) $h = \{ (2, 1), (3, 4), (1, 4), (4, 3) \}$

సాధన

(i) $f = \{ (2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4) \}$

f ప్రమేయము కాదు ఎందుకనగా మూలకం 2 కు రెండు వేర్వేరు మూలకములు 3 మరియు 1 తో సంబంధము కలిగియున్నది.

(ii) సంబంధము $g = \{ (3, 1), (4, 2), (2, 1)\}$ ప్రమేయము కాదు. ఎందుకనగా మూలకము 1 కి ప్రతిబింబము లేదు. $\therefore$ g ప్రదేశము $= \{2, 3, 4\} \neq X$.

(iii) $h = \{ (2, 1), (3, 4), (1, 4), (4, 3) \}$ ను తీసుకొనగా.

X లోని ప్రతి మూలకము X లోని ఏకైక మూలకంతో జతపరచబడినది. కనుక h అనునది ఒక ప్రమేయం.

ఉదాహరణ 1.17

$A = \{ 1, 4, 9, 16 \}$, $B = \{ -1, 2, -3, -4, 5, 6 \}$ కు క్రింది సంబంధములలో ఏవి ప్రమేయములగును? ప్రమేయములయితే వాటి వ్యాప్తిని కనుగొనుము?

(i) $f_1 = \{ (1, -1), (4, 2), (9, -3), (16, -4) \}$

(ii) $f_2 = \{ (1, -4), (1, -1), (9, -3), (16, 2) \}$

(iii) $f_3 = \{ (4, 2), (1, 2), (9, 2), (16, 2) \}$

(iv) $f_4 = \{ (1, 2), (4, 5), (9, -4), (16, 5) \}$

సాధన (i) $f_1 = \{ (1, -1), (4, 2), (9, -3), (16,- 4) \}$.

A లోని ప్రతి మూలకము B లోని ఏకైక మూలకముతో సంబంధమును కలిగియున్నది కనుక f_1 ఒక ప్రమేయమగును.

$\therefore$ f_1 వ్యాప్తి $= \{- 1, 2, - 3, - 4\}$.

(ii) $f_2 = \{ (1, - 4), (1, -1), (9, - 3), (16, 2) \}$.

f_2 ప్రమేయం కాదు. ఎందుకనగా మూలకం 1 కి రెండు వేర్వేరు ప్రతిబింబములు -4 మరియు -1 వున్నవి మరియు f_2 ప్రమేయము కాదనటను గమనింపుము. ఎందుకనగా 4 నకు ప్రతిబింబము లేదు.

(iii) $f_3 = \{ (4, 2), (1, 2), (9, 2), (16, 2) \}$.

A లోని ప్రతి మూలకం B లో ఏకైక మూలకంతో కలుపబడినది. కనుక f_3 ఒక ప్రమేయం.

$\therefore$ f_3 వ్యాప్తి $= \{ 2 \}$.

(iv) $f_4 = \{ (1, 2), (4, 5), (9, - 4), (16, 5) \}$.

A లోని ప్రతి మూలకం B లో ఏకైక మూలకంతో జతపరచబడినది.

కనుక f_4 ఒక ప్రమేయం.

$\therefore$ f_4 వ్యాప్తి $= \{ 2, 5, - 4\}$.

ఉదాహరణ 1.18

$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$. అనుకొనుము.

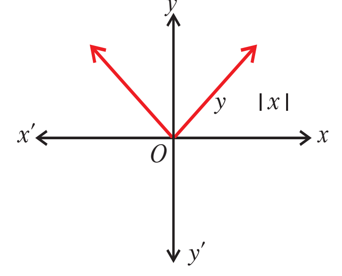
$\{ (x,y) \mid y = |x|, x \in \mathbb{R} \}$ అను సంబంధము ప్రమేయమును నిర్వచించునా? వ్యాప్తిని కనుగొనుము?

సాధన x యొక్క ప్రతి విలువకు $y = |x|$ లో ఏకైక విలువను కలిగియున్నది.

$\therefore$ ఇచ్చినటువంటి సంబంధము ప్రమేయమును నిర్వచించును.

వాస్తవ సంఖ్యల సమితి $\mathbb{R}$ అనునది ప్రమేయ ప్రదేశం అవుతుంది.

కావున $|x|$ ఎల్లప్పుడు, ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య x కు సున్న లేక ధనాత్మకం మరియు ఈ ప్రమేయం నుండి ప్రతి ధన వాస్తవ సంఖ్య ప్రతిబింబముగా ఏర్పడుతుంది. ఋణాత్మకం కాని వాస్తవ సంఖ్యాసమితి వ్యాప్తి అగును. (సున్న లేక ధనాత్మకంగా ఉండును)



పటము 1.20

సూచన

$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$, ప్రమేయంను మూల్యము లేక పరమ మూల్యము ప్రమేయము అందురు.

ఉదాహరణకు $|-8| = -(-8) = 8$ మరియు $|8| = 8$

1.8.1 ప్రమేయమును సూచించు విధానములు:

ప్రమేయమును క్రింది విధముగా సూచించవచ్చును.

(i) క్రమయుగ్మములు (ii) పట్టిక (iii) బాణపు చిత్రములు (iv) రేఖా చిత్రములు

$f : A \to B$ ఒక ప్రమేయము అనుకొనుము.

(i) సమితి $f = \{(x, y) : y = f(x), x \in A\}$ యొక్క అన్ని క్రమయుగ్మములు ప్రమేయమును సూచించును.

(ii) ప్రమేయము f ను పట్టిక రూపంలో x విలువలను మరియు వాటి ప్రతిబింబ విలువలను సూచించవచ్చును.

(iii) f ప్రమేయం యొక్క ప్రదేశము మూలకములను వాటి ప్రతిబింబములకు బాణపు గుర్తులతో సూచింతురు.

(iv) $f = \{(x, y) : y = f(x), x \in A\}$ అను ఒక సమితి క్రమయుగ్మములన్నింటిని $x - y$ తలముపై గుర్తించవలయును. ఒక తలముపై అన్ని బిందువుల సమితిని f ప్రమేయం యొక్క రేఖా చిత్రము అగును.

కొన్ని ఉదాహరణల ద్వారా ప్రమేయములను వివిధ రూపములుగా సూచించుటను గమనింపుము.

అనేక ప్రమేయములకు వాటి రేఖాచిత్రములను పొందవచ్చును. కాని ప్రతి రేఖాచిత్రము ప్రమేయమును సూచించదు.

క్రింది పరీక్ష నుంచి ఇవ్వబడిన రేఖాచిత్రములు ప్రమేయమా కాదా అని నిర్ధారించుచున్నది.

1.8.2 నిలువు రేఖా పరీక్ష (లేక) లంబరేఖా పరీక్ష (Vertical line test)

ఒక రేఖాచిత్రము ప్రమేయము కావలెనన్న ప్రతి నిలువు రేఖ, రేఖాచిత్రమును ఒక బిందువువద్ద ఖండించవలయును.

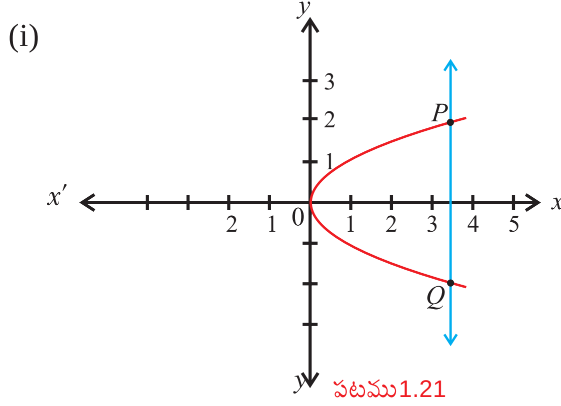
సూచన

కొన్ని నిలువు రేఖలు రేఖాచిత్రమును ఖండించలేకపోవును. ఇది సరియైనది. ఒక నిలువు రేఖ, రేఖా చిత్రములో ఒకటి కంటె ఎక్కువ బిందువులను కలిసినచో అట్టి రేఖాచిత్రము ప్రమేయము కాదు. ఈ సందర్భములో ఒక x విలువకు రెండు y విలువలు ఉంటాయి. ఉదాహరణకు $y^2 = x$ అను రేఖాచిత్రము ప్రమేయము కాదు.

ఉదాహరణ 1.19

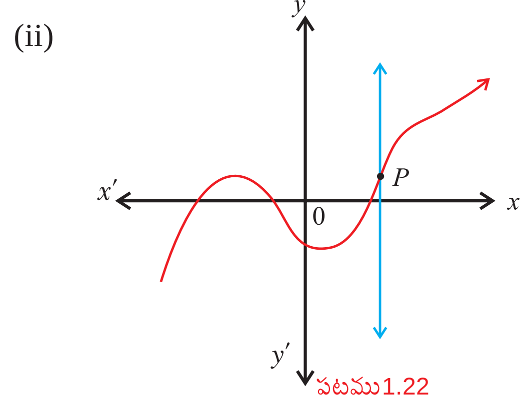
నిలువరేఖ పరీక్షను ఉపయోగించి క్రింది రేఖాచిత్రములు ఏవి ప్రమేయములను సూచించునో తెల్పుము?

(i)



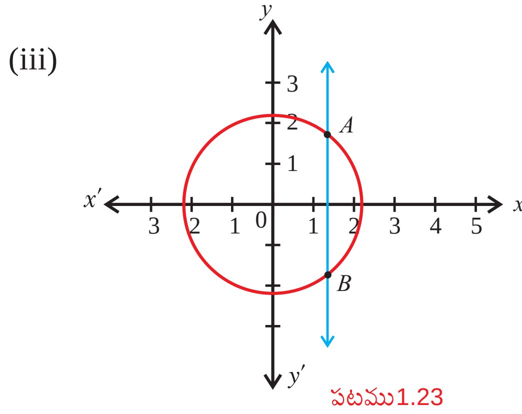
పటము 1.21

(ii)



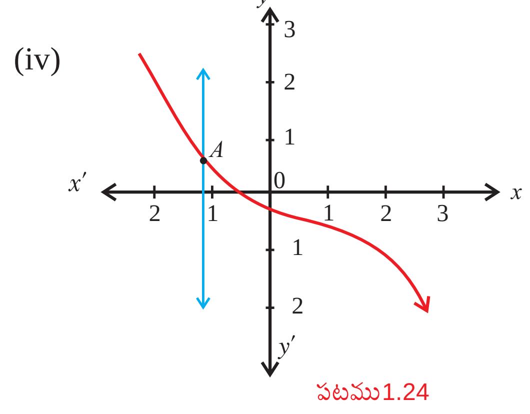
పటము 1.22

(iii)



పటము 1.23

(iv)



పటము 1.24

సాధన

(i) ఇచ్చినటువంటి రేఖాచిత్రము ప్రమేయము కాదు. ఎందుకనగా నిలువురేఖ, రేఖాచిత్రమును రెండు బిందువులు P మరియు Q ల వద్ద ఖండించుచున్నది.

(ii) ఇచ్చినటువంటి రేఖాచిత్రము ప్రమేయము. ఎందుకనగా నిలువురేఖ, రేఖాచిత్రమును గరిష్ఠంగా ఒక బిందువు P వద్ద ఖండించుచున్నది.

(iii) నిలువురేఖ, రేఖాచిత్రమును రెండు బిందువులు A మరియు B ల వద్ద ఖండించుచున్నది. కనుక ఇచ్చినటువంటి రేఖాచిత్రము ప్రమేయము కాదు.

(iv) రేఖాచిత్రము నిలువు రేఖ పరీక్షను తృప్తిపరచుచున్నది. కనుక ఇవ్వబడిన రేఖాచిత్రము ప్రమేయమగును.

ఉదాహరణ 1.20

$A = \{ 0, 1, 2, 3 \}$ మరియు $B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ రెండు సమితులు మరియు $f : A \to B$ ప్రమేయము $f(x) = 2x + 1$ అని నిర్వచింపబడినది ఈ ప్రమేయమును (i) క్రమయుగ్మములు (ii) పట్టిక (iii) బాణాచిత్రము (iv) రేఖాచిత్రములలో సూచించుము.

సాధన $A = \{ 0, 1, 2, 3 \}$, $B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$, $f(x) = 2x + 1$

$f(0) = 2(0) + 1 = 1$, $f(1) = 2(1)+1 = 3$, $f(2) = 2(2) + 1 = 5$, $f(3) = 2(3) + 1 = 7$

(i) క్రమయుగ్మముల సమితి

క్రమయుగ్మముల సమితిని క్రింది ప్రమేయము f ద్వారా సూచించవచ్చును.

$f = \{ (0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7) \}$

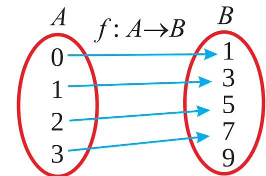
(ii) పట్టిక రూపం

క్రింది విధంగా f ను పట్టిక పద్ధతిలో సూచించవలయును.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	3	5	7

(iii) బాణాచిత్రము (Arrow Diagram)

f ను బాణాచిత్రముగా సూచించవలయును.



పటము 1.25

రెండు సంవృత వక్రములను A మరియు B సమితులను తెలుపు విధంగా గీయవలయును.

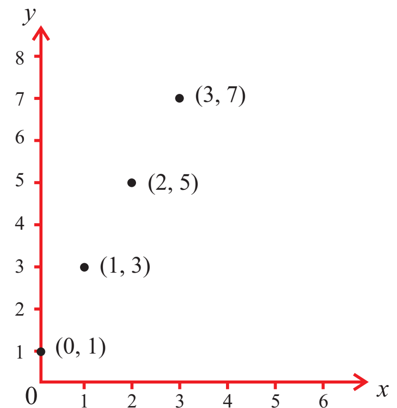
అపుడు A లోని ప్రతి మూలకము B లో వాటి ఏకైక ప్రతిబింబములతో అనుసంధానమును బాణపు గుర్తులతో సూచించవలయును

(iv) రేఖా చిత్రము

$f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} = \{(0,1), (1,3), (2,5), (3,7)\}.$

బిందువులు (0, 1) (1, 3) (2, 5) మరియు (3, 7) లను తలములో చూపిన విధముగా గుర్తించవలెను.

అన్ని బిందువులు ప్రమేయం యొక్క రేఖాచిత్రమును సూచించుచున్నవి.



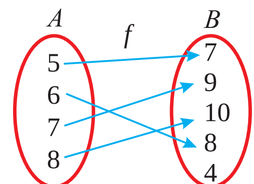
పటము 1.26

1.8.3 ప్రమేయముల రకములు

ప్రమేయముల ధర్మముల నాధారముగా ప్రమేయములను వివిధ రకములుగా విభజించవచ్చును.

(i) ఏక – ఏక ప్రమేయము (లేక) అన్వేక ప్రమేయము (One-One function)

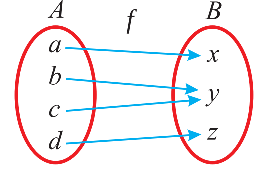
$f : A \to B$ ఒక ప్రమేయము అనుకొనుము. f అను ప్రమేయము A నుండి B కు గల ఏక – ఏక ప్రమేయము అగుటకు A లోని ప్రతి మూలకమునకు B లో విభిన్న మూలకాలతో సంబంధము కలిగి ఉండవలయును. f ఏక – ఏక అగుటకు A లో $u \neq v$ అయిన $f(u) \neq f(v)$ అగును. మరొక విధముగా B లోని మూలకము A లో ఒకటి కంటె ఎక్కువ మూలకాలతో సంబంధమును కలిగియుండ కూడదు.



పటము 1.27

ఏక – ఏక ప్రమేయమును అంతర ప్రమేయము అని కూడా అందురు. పై పటము ఏక – ఏక ప్రమేయమును సూచించును.

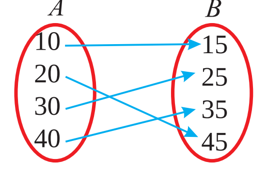
(ii) సంగ్రస్త ప్రమేయము (Onto function)



పటము 1.28

$f : A \to B$ సంగ్రస్త ప్రమేయము కావలెనన్న B లోని ప్రతి మూలకమునకు A లో పూర్వబింబములను కలిగియుండవలెను. f సంగ్రస్తం అగుటకు ప్రతి $b \in B$ కు కనీసం ఒక మూలకం $a \in A$ వుండవలయును. కావున $f(a) = b$, అదే విధంగా f వ్యాప్తి B అగును. సంగ్రస్త ప్రమేయమును బాహ్య ప్రమేయము (Surjective) అని కూడా అందురు. పై పటము నుండి f ఒక సంగ్రస్తము

(iii) ఏక - ఏక మరియు సంగ్రస్త ప్రమేయము (One-One and onto function)



పటము 1.29

ప్రమేయము $f : A \to B$ ఏక - ఏక మరియు సంగ్రస్తము కూడా అయితే f ను ద్విగుణ (Bijective) ప్రమేయము అందురు. $f : A \to B$ ఏక - ఏక సంగ్రస్తము అగుటకు A లోని విభిన్న మూలకములకు B లో అన్ని మూలకములకు విభిన్న ప్రతిబింబములు వుండవలెను.

గమనిక

(i) ఒక ప్రమేయము $f : A \to B$ సంగ్రస్తము అగుటకు $B = f$ వ్యాప్తి.

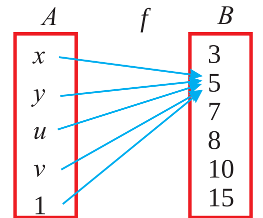
(ii) $f : A \to B$ ఏక - ఏక మరియు సంగ్రస్తము అగుటకు $f(a_1) = f(a_2)$ అయినపుడు A లో $a_1 = a_2$ అగును. మరియు B లో ప్రతి మూలకమునకు A లో కనీసము ఒక పూర్వబింబము వుండవలెను.

(iii) $f : A \to B$ ద్విగుణ ప్రమేయము అగుటకు A మరియు B లు పరిమిత సమితులు అయిన A మరియు B లలో మూలకముల సంఖ్య సమానముగా ఉండవలయును. పటము *1.29* నుండి f ఏక - ఏక మరియు సంగ్రస్తము.

(iv) $f : A \to B$ ద్విగుణ ప్రమేయము, అపుడు A మరియు B లు తుల్య సమితులు.

(v) ఏక–ఏక మరియు సంగ్రస్త ప్రమేయమును ఏక–ఏక సమన్వయము అందురు.

(iv) స్థిర ప్రమేయము (Constant function)



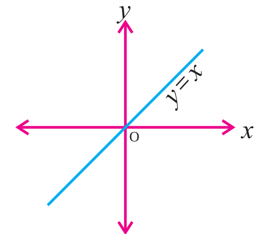
పటము 1.30

ఒక ప్రమేయము $f : A \to B$ స్థిర ప్రమేయము అగుటకు A లో ప్రతి మూలకమునకు B లో ఒకే ఒక ప్రతిబింబము వుండవలయును.

స్థిర ప్రమేయము వ్యాప్తి ఏక మూలక సమితి అగును.

$A = \{ x, y, u, v, 1 \}$, $B = \{ 3, 5, 7, 8, 10, 15 \}$ అనుకొనుము. $f : A \to B$ ను ప్రతి $x \in A$ కు $f(x) = 5$ అని నిర్వచించబడినది. ఇవ్వబడిన పటము స్థిర ప్రమేయమును సూచించును.

(v) తత్సమ ప్రమేయము (Identity function)



పటము 1.31

A ఒక శూన్యేతర సమితి. A ప్రమేయం $f : A \to A$ ఒక తత్సమ ప్రమేయము అగుటకు $f(a) = a \ \forall a \in A$ అగును. తత్సమ ప్రమేయంలో A లోని ప్రతి మూలకము A లోని అదే మూలకమునకు అనుసంధానమగును.

ఉదాహరణకు $A = \mathbb{R}$ అనుకొనుము. ప్రమేయం $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ను $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ అని నిర్వచించిన అది $\mathbb{R}$ పై తత్సమ ప్రమేయం అగును. పటము 1.31 $\mathbb{R}$ పై తత్సమ ప్రమేయమును సూచించును.

ఉదాహరణ 1.21

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $B = \mathbb{N}$ మరియు $f: A \to B$ ను $f(x) = x^2$ అని నిర్వచితమయితే f యొక్క వ్యాప్తిని కనుగొనుము. ప్రమేయ రకమును గుర్తించుము?

సాధన $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$; $B = \{ 1, 2, 3, 4, \cdots \}$

$f: A \to B$ మరియు $f(x) = x^2$ అని ఇవ్వబడినది.

$\therefore\ f(1) = 1^2 = 1$; $f(2) = 4$; $f(3) = 9$; $f(4) = 16$; $f(5) = 25$.

f వ్యాప్తి $= \{ 1, 4, 9, 16, 25\}$

కావున విభిన్న మూలకములకు విభిన్న ప్రతిబింబములున్నవి. కావున ఇది ఏక – ఏక ప్రమేయము కాని సంగ్రస్తము కాదు. ఎందుకంటే $3 \in B$ కి అనుగుణంగా $x \in A$ లేదు కావున $f(x) = x^2 = 3$.

సూచన

ఒక ప్రమేయము $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ను $g(x) = x^2$ గా నిర్వచించిన అది ఏక – ఏక ప్రమేయము కాదు. ఎందుకనగా $u = 1$ మరియు $v = -1$ అయిన $u \neq v$ కానీ $g(u) = g(1) = 1 = g(-1) = g(v)$ కనుక సూత్రము ఒక్కటే ఏక–ఏక లేక సంగ్రస్త ప్రమేయమును ఏర్పరచదు. ఈ నియమమును పాటించవలెనన్న ఏక–ఏక మరియు సంగ్రస్తము నిర్ణయించుటకు ప్రదేశము మరియు సహప్రదేశములను పరిగణించవలెను.

ఉదాహరణ 1.22

ఒక ప్రమేయము $f: [1, 6) \longrightarrow \mathbb{R}$ క్రింది విధముగా నిర్వచించబడినది.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & 1 \leq x < 2 \\ 2x - 1, & 2 \leq x < 4 \\ 3x^2 - 10, & 4 \leq x < 6 \end{cases}$$

(ఇక్కడ $[1, 6) = \{ x \epsilon \mathrm{R} : 1 \leq x < 6\}$)

అయిన క్రింది వాటి విలువలను కనుగొనుము?

(i) $f(5)$ (ii) $f(3)$ (iii) $f(1)$ (iv) $f(2) - f(4)$ (v) $2f(5) - 3f(1)$

సాధన

(i) $f(5)$ విలువను కనుగొనుట: 4 మరియు 6 మధ్యలో 5 వుంటుంది కనుక $f(x) = 3x^2 - 10$ ను ఉపయోగించవలెను.

$\therefore\ f(5) = 3(5^2) - 10 = 65$.

(ii) $f(3)$ విలువను కనుగొనుట. 2 మరియు 4 ల మధ్యన 3 వుంది అని గమనించుము.

కనుక $f(x) = 2x - 1$ ను ఉపయోగించి $f(3)$ ని కనుగొనవలెను.

$\therefore\ f(3) = 2(3) - 1 = 5$.

(iii) $f(1)$ విలువ కనుగొనుట.

ఇపుడు 1 యొక్క అంతరము $1 \leq x < 2$ అయినపుడు $f(x) = 1 + x$ ను ఉపయోగించవలెను.

$\therefore\ f(1) = 1 + 1 = 2$.

(iv) $f(2) - f(4)$ విలువ

ఇపుడు 2 అంతరము $2 \leq x < 4$ కనుక $f(x) = 2x - 1$ ను ఉపయోగించవలయును.

కనుక $f(2) = 2(2) - 1 = 3$.

అదేవిధంగా 4 అంతరము $4 \le x < 6$ కనుక $f(x) = 3x^2 - 10$ ను ఉపయోగించవలయును.

$\therefore\ f(4) = 3(4)^2 - 10 = 3(16) - 10 = 48 - 10 = 38.$

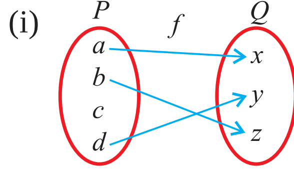
$\therefore\ f(2) - f(4) = 3 - 38 = -35.$

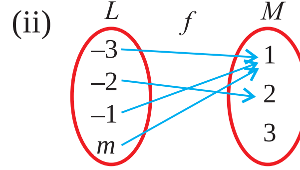
(v) $2f(5) - 3f(1)$ లెక్కించుట.

(i) మరియు (iii) విలువల నుండి $2f(5) - 3f(1) = 2(65) - 3(2) = 130 - 6 = 124.$

అభ్యాసము 1.4

1. ఈ క్రింది బాణాచిత్రములు ఏవి ప్రమేయములో తెల్పండి. మీ జవాబును సరిచూడుము.

(i) 

(ii) 

2. $F = \{ (1,3), (2,5), (4,7), (5,9), (3,1) \}$ అను ప్రమేయం ప్రదేశం మరియు వ్యాప్తిని కనుగొనుము?

3. $A = \{ 10, 11, 12, 13, 14 \}$; $B = \{ 0, 1, 2, 3, 5 \}$ మరియు $f_i : A \to B$, $i = 1,2,3$. అయిన ఈ క్రిందివి ఏ రకమైన ప్రమేయములో తెల్పుము? (కారణమును తెలుపుము)
   (i) $f_1 = \{ (10, 1), (11, 2), (12, 3), (13, 5), (14, 3) \}$
   (ii) $f_2 = \{ (10, 1), (11, 1), (12, 1), (13, 1), (14, 1) \}$
   (iii) $f_3 = \{ (10, 0), (11, 1), (12, 2), (13, 3), (14, 5) \}$

4. $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $Y = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ మరియు $f : X \to Y$ ఈ క్రిందివి ఏవి ప్రమేయములో కనుగొనుము? కారణం తెల్పుము మరియు ప్రమేయమైన ప్రమేయ రకమును తెల్పుము?
   (i) $R_1 = \{ (x, y) | y = x + 2,\ x \in X,\ y \in Y \}$
   (ii) $R_2 = \{ (1, 1), (2, 1), (3, 3), (4, 3), (5, 5) \}$
   (iii) $R_3 = \{ (1, 1), (1, 3), (3, 5), (3, 7), (5, 7) \}$
   (iv) $R_4 = \{ (1, 3), (2, 5), (4, 7), (5, 9), (3, 1) \}$

5. $R = \{(a, -2), (-5, b), (8, c), (d, -1)\}$ అనునది తత్సమ ప్రమేయమును సూచించిన a, b, c మరియు d విలువలను కనుగొనుము.

6. $A = \{ -2, -1, 1, 2 \}$ మరియు $f = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) : x \in A\right\}$ అయిన f వ్యాప్తిని వ్రాయుము. $f : A \to A$ ప్రమేయమగునా కనుగొనుము?

7. $f = \{ (2, 7), (3, 4), (7, 9), (-1, 6), (0, 2), (5, 3) \}$ అను ప్రమేయం $A = \{ -1, 0, 2, 3, 5, 7 \}$, $B = \{ 2, 3, 4, 6, 7, 9 \}$ల నుండి ఏర్పడినది. ఇది (i) ఏక – ఏక ప్రమేయమగునా (ii) సంగ్రస్త ప్రమేయము అగునా (iii) ఏక – ఏక మరియు సంగ్రస్త ప్రమేయమగునా అని తెలుపుము.

8. క్రింది ప్రమేయము నుండి 2 మరియు 3 ల పూర్వబింబములను వ్రాయుము.
   $f = \{ (12, 2), (13, 3), (15, 3), (14, 2), (17, 17) \}$.

9. క్రింద పట్టిక $A = \{5, 6, 8, 10\}$ నుండి $B = \{19, 15, 9, 11\}$ కి ప్రమేయం. ఇక్కడ $f(x) = 2x - 1$ అయిన a మరియు b విలువలను కనుగొనుము.

x	5	6	8	10
$f(x)$	9	11	15	19

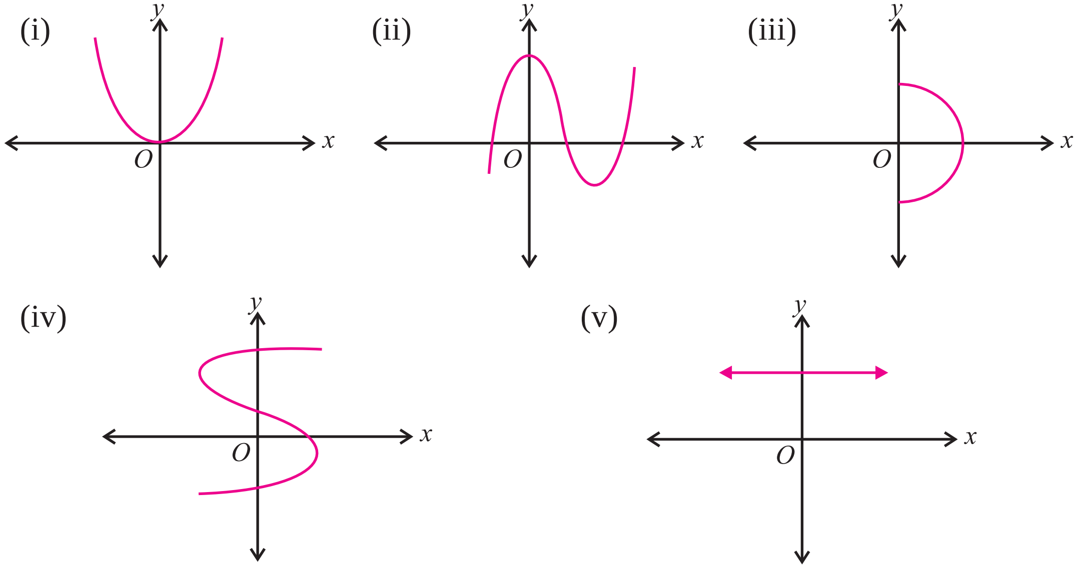
10. $A = \{ 5, 6, 7, 8 \}$; $B = \{ -11, 4, 7, -10, -7, -9, -13 \}$ మరియు

$f = \{(x, y) : y = 3 - 2x,\ x \in A,\ y \in B \}$

(i) f మూలకములను వ్రాయుము (ii) సహప్రదేశము

(iii) వ్యాప్తి (iv) ప్రమేయము రకమును గుర్తించుము.

11. క్రింది రేఖాచిత్రములు ప్రమేయములా అని సరైన కారణములతో వివరించుము.



12. $f = \{ (-1, 2), (-3, 1), (-5, 6), (-4, 3) \}$ ను (i) పట్టిక (ii) బాణాచిత్రములుగా చూపించుము.

13. $A = \{ 6, 9, 15, 18, 21 \}$; $B = \{ 1, 2, 4, 5, 6 \}$ మరియు $f : A \to B$ ను $f(x) = \frac{x - 3}{3}$ గా నిర్వచించబడిన f ను

(i) బాణాచిత్రము (ii) క్రమయుగ్మములు

(iii) పట్టిక (iv) రేఖాచిత్రముల ద్వారా సూచించుము.

14. $A = \{4, 6, 8, 10\}$ మరియు $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $f : A \to B$ ను $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ గా నిర్వచించిన f ను (i) బాణా చిత్రము (ii) క్రమయుగ్మములు మరియు (iii) పట్టిక పద్ధతులలో సూచించుము?

15. ప్రమేయము $f : [-3, 7) \to \mathbb{R}$ అనునది క్రింది విధముగా నిర్వచించబడినది.

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 1; & -3 \le x < 2 \\ 3x - 2; & 2 \le x \le 4 \\ 2x - 3; & 4 < x \le 6 \end{cases}$$ అయిన క్రింది వాటిని కనుగొనుము?

(i) $f(5) + f(6)$ (ii) $f(1) - f(-3)$

(iii) $f(-2) - f(4)$ (iv) $\frac{f(3) + f(-1)}{2f(6) - f(1)}$.

16. ప్రమేయము $f:[-7,6)\to\mathbb{R}$ అనునది క్రింది విధముగా నిర్వచించబడినది.

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2x+1 & -7\le x<-5\\ x+5 & -5\le x\le 2\\ x-1 & 2<x<6\end{cases}$$ అయిన క్రింది వాటిని కనుగొనుము?

(i) $2f(-4)+3f(2)$ (ii) $f(-7)-f(-3)$ (iii) $\dfrac{4f(-3)+2f(4)}{f(-6)-3f(1)}$.

అభ్యాసము 1.5

సరైన సమాధానమును ఎన్నుకొనుము.

1. A మరియు B అను రెండు సమితులలో $A\cup B=A$ అనుదానికి కావలసిన మరియు సరిపోవు నిబంధన

   (A) $B\subseteq A$ (B) $A\subseteq B$ (C) $A\neq B$ (D) $A\cap B=\phi$

2. $A\subset B$ అయిన $A\cap B=$

   (A) B (B) $A\backslash B$ (C) A (D) $B\backslash A$

3. P మరియు Q అను ఏవేని రెండు సమితులలో $P\cap Q=$

   (A) $\{x/x\in P$ లేక $x\in Q\}$ (B) $\{x/x\in P$ మరియు $x\notin Q\}$

   (C) $\{x/x\in P$ మరియు $x\in Q\}$ (D) $\{x/x\notin P, x\in Q\}$

4. If $A=\{p,q,r,s\}$, $B=\{r,s,t,u\}$ అయిన $A\backslash B=$

   (A) $\{p,q\}$ (B) $\{t,u\}$ (C) $\{r,s\}$ (D) $\{p,q,r,s\}$

5. $n[p(A)]=64$ అయిన $n(A)=$

   (A) 6 (B) 8 (C) 4 (D) 5

6. A, B మరియు C అను ఏవేని మూడు సమితులలో $A\cap(B\cup C)=$

   (A) $(A\cup B)\cup(B\cap C)$ (B) $(A\cap B)\cup(A\cap C)$

   (C) $A\cup(B\cap C)$ (D) $(A\cup B)\cap(B\cup C)$

7. A మరియు B అను ఏవేని రెండు సమితులకు $\{(A\backslash B)\cup(B\backslash A)\}\cap(A\cap B)$ విలువ

   (A) ϕ (B) $A\cup B$ (C) $A\cap B$ (D) $A'\cap B'$

8. క్రింది వాటిలో సత్యము కానిది ఏది?

   (A) $A\backslash B=A\cap B'$ (B) $A\backslash B=A\cap B$

   (C) $A\backslash B=(A\cup B)\cap B'$ (D) $A\backslash B=(A\cup B)\backslash B$

9. A, B మరియు C అనునవి ఏవేని మూడు సమితులయిన $B\backslash(A\cup C)=$

   (A) $(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$ (B) $(B\backslash A)\cap(B\backslash C)$

   (C) $(B\backslash A)\cap(A\backslash C)$ (D) $(A\backslash B)\cap(B\backslash C)$

10. $n(A) = 20$, $n(B) = 30$ మరియు $n(A \cup B) = 40$ అయిన $n(A \cap B)$ కి సమానమైనది

(A) 50 (B) 10 (C) 40 (D) 70.

11. $\{ (x, 2), (4, y) \}$ అనునది తత్సమ ప్రమేయాన్ని తెలియజేసిన, (x, y) అనునది

(A) (2, 4) (B) (4, 2) (C) (2, 2) (D) (4, 4)

12. $\{ (7, 11), (5, a) \}$ అనునది స్థిరప్రమేయాన్ని తెలియజేసిన, 'a' యొక్క విలువ

(A) 7 (B) 11 (C) 5 (D) 9

13. $f(x) = (-1)^x$ అనునది $\mathbb{N}$ నుండి $\mathbb{Z}$ కు ఇవ్వబడిన ఒక ప్రమేయమైన f యొక్క వ్యాప్తి

(A) $\{ 1\}$ (B) $\mathbb{N}$ (C) $\{ 1, -1 \}$ (D) $\mathbb{Z}$

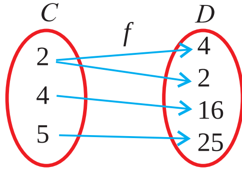
14. $f = \{ (6, 3), (8, 9), (5, 3), (-1, 6) \}$ అయిన 3 యొక్క పూర్వబింబము

(A) 5 మరియు –1 (B) 6 మరియు 8 (C) 8 మరియు –1 (D) 6 మరియు 5.

15. $A = \{ 1, 3, 4, 7, 11 \}$, $B = \{-1, 1, 2, 5, 7, 9 \}$ అనుకొనుము మరియు $f : A \to B$ ని $f = \{ (1, -1), (3, 2), (4, 1), (7, 5), (11, 9) \}$గా ఇవ్వబడిన f అనునది

(A) ఏక – ఏక (B) సంగ్రస్త (C) ద్విగుణ (D) ప్రమేయము కాదు

16. క్రింద ఇవ్వబడిన పటము తెలియజేయునది



(A) సంగ్రస్త ప్రమేయము (B) స్థిర ప్రమేయము

(C) ఏక – ఏక ప్రమేయము (D) ప్రమేయము కాదు

17. $A = \{ 5, 6, 7 \}$, $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$మరియు $f : A \to B$ ని $f(x) = x - 2$ గా నిర్వచించిన f యొక్క వ్యాప్తి

(A) $\{ 1, 4, 5 \}$ (B) $\{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ (C) $\{ 2, 3, 4 \}$ (D) $\{ 3, 4, 5 \}$

18. $f(x) = x^2 + 5$ అయిన $f(-4) =$

(A) 26 (B) 21 (C) 20 (D) –20

19. ఒక ప్రమేయము యొక్క వ్యాప్తి ఏకమూలక సమితి అయిన అది

(A) ఒక స్థిర ప్రమేయము (B) ఒక తత్సమ ప్రమేయము

(C) ఒక ద్విగుణ ప్రమేయము (D) ఒక ఏక – ఏక ప్రమేయము

20. $f : A \to B$ అనునది ఒక ద్విగుణ ప్రమేయము మరియు $n(A) = 5$ అయిన $n(B)$ కి సమానమైనది

(A) 10 (B) 4 (C) 5 (D) 25

ముఖ్యాంశములు

సమితులు

- బాగుగా నిర్దేశించబడిన మూలకముల సముదాయము సమితి అగును.
  - సమితి సమ్మేళనములో వినిమయ మరియు సహచర్య న్యాయములు వర్తించును.
  - సమితి ఖండనములో వినిమయ మరియు సహచర్య న్యాయములు వర్తించును.
  - సమితి భేదములో వినిమయ న్యాయము వర్తించదు.
  - సమితులు పరస్పరము వియుక్తమయినపుడు మాత్రము సమితి భేదములో సహచర్య న్యాయము వర్తించును
- విభాగ న్యాయములు
  - $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
  - $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
- సమితి భేదములో డీ మోర్గాన్ న్యాయములు
  - $A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$
  - $A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$
- పూరకములో డీ మోర్గాన్ న్యాయములు
  - $(A\cup B)' = A'\cap B'$
  - $(A\cap B)' = A'\cup B'$
- సమితుల సమ్మేళనములో ఆదిసంఖ్య రీత్యా సూత్రములు
  - $n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
  - $n(A\cup B\cup C)$

    $= n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C).$

ప్రమేయములు

- A తో B కార్టీజియన్ లబ్ధమును క్రింది విధముగా నిర్వచింపవచ్చును

  $A\times B = \{(a,b)/a\in A$ మరియు $b\in B\}$
- A నుంచి B కు గల సంబంధము R అనునది $A\times B$ యొక్క శూన్యేతర సమితి అనగా $R\subseteq A\times B$.
- ప్రమేయం $f:X\to Y$ నిర్వచింపబడినట్లయితే ఈ క్రింది నిబంధనలు వర్తించవలెను.

  ప్రతి $x\in X$ కు ఒక $y\in Y$ కి మాత్రము సంబంధము కలిగియుండవలెను.
- ప్రతి ప్రమేయమును రేఖాచిత్రము ద్వారా తెలుపవచ్చును. అయినను సాధారణంగా దీని విపర్యయము సరికాదు.
- ప్రతి నిలువు రేఖ, రేఖా చిత్రమును గరిష్ఠముగా ఒక బిందువు వద్ద ఖండించిన, ఆ రేఖాచిత్రము ప్రమేయమును తెలియజేయును.
- ప్రమేయమును ఈ క్రింది విధముగా సూచించవచ్చును.
  - క్రమయుగ్మములు
  - బాణా చిత్రము
  - పట్టిక మరియు
  - రేఖాచిత్రము

- $y = |x|$ యొక్క మూల్యము లేక పరమ మూల్యమును క్రిందివిధంగా నిర్వచింపవచ్చు.

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

- ప్రమేయములలోని కొన్ని రకములు:
  - ఏక – ఏక ప్రమేయము (వేర్వేరు మూలకములు వేర్వేరు ప్రతిబింబములను కలిగియుండును)
    (injective function)
  - సంగ్రస్త ప్రమేయము (వ్యాప్తి మరియు సహప్రదేశము సమానము)
    (surjective function)
  - ద్విగుణ ప్రమేయము (ఏక – ఏక మరియు సంగ్రస్తముగా నుండవలెను)
    (One-One and onto function)
  - స్థిర ప్రమేయము (వ్యాప్తి ఏక మూలక సమితి అగును)
    (Constant function)
  - తత్సమ ప్రమేయము (ప్రతి మూలకము అదే మూలకమునకు అనుసంధానమగును)
    (Identity function)

మీకు తెలుసా?

గణితశాస్త్రములో మిలియన్ల కొలది బహుమానముగా ఇచ్చుటకు అమెరికాలోని క్లే గణితశాస్త్ర సంస్థ 2000 సం॥లో ఏడు సమస్యలను ముందుంచెను. ఆగష్టు 2010 వరకు ఆరు సమస్యలు ఇంకను సాధించకనేయున్నది. సరైన సాధన ఇచ్చు ఏ సమస్యకైనను 10,00,000 అమెరికన్ డాలర్లను బహుమానముగా ఆ సంస్థ ఇచ్చును. 2010 సం॥లో రష్యాకు చెందిన గ్రిగోరీ పీర్లమేన్ అను గణితశాస్త్రజ్ఞుడు ఒక Poincare conjecture అను సమస్యను సాధించెను. కానీ అతను ఆ మిలియన్ల బహుమానమును నిరాకరించెను. (ఇచట conjecture అనగా ఒక గణిత సమస్యను నిరూపించవచ్చు లేక నిరూపించలేము అని అర్థము)

2

వాస్తవ సంఖ్యల క్రమానుగత వరుసలు మరియు శ్రేణులు

Mathematics is the Queen of Sciences, and arithmetic is the Queen of Mathematics - C.F.Gauss

- పరిచయం
- వరుసలు
- అంకశ్రేఢి
- గుణశ్రేఢి
- శ్రేణులు



లియోనార్డో ఫిసానో
(ఫిభోనేసి)
(1170-1250)
ఇటలీ

ఫిభోనేసి ప్రాచీన గణితశాస్త్ర పునరుద్ధరణలో ప్రముఖ పాత్రను పోషించెను. ఆధునిక గణిత శాస్త్రంలో యుండు సంఖ్యా వరుసలను అతను వచ్చిన తరువాత ఫిబోనాసి సంఖ్యలుగా వాడబడుచున్నవి. ఈ విధంగా అతని పేరు పరిచయమైంది. కాని వీటిని అతను కనుగొనకపోయినను ఉదాహరణగా ఉపయోగించుచున్నారు.

2.1 పరిచయం

ఈ అధ్యాయంలో, వాస్తవ సంఖ్యల వరుసలు మరియు శ్రేణుల గురించి నేర్చుకొనెదము. దీర్ఘకాల చరిత్రలో వరుసలు అనునవి ప్రాథమిక గణిత ఉద్దేశ్యములు. నిత్య జీవిత సంఘటనలలో గణిత శాస్త్ర మరియు ఇతర భావనల అభివృద్ధికి ఇవి సాధనములు.

$\mathbb{N}$ మరియు $\mathbb{R}$ లను వరుసగా ధన పూర్ణాంకముల సమితి మరియు వాస్తవ సంఖ్యల సమితి అని గుర్తుకు తెచ్చుకొనుము.

నిత్యజీవితంలో జరుగు క్రింది కొన్ని సంఘటనలను పరిగణించెదము:

(i) ఒక నిర్ణీత కాలంలో సముద్ర మట్టం నుండి ఉపగ్రహముల ఎత్తును ISRO శాస్త్రజ్ఞుల బృందం పరిశీలించుచు నమోదు చేస్తారు.

(ii) చెన్నై సెంట్రల్ రైల్వేస్టేషన్‌ను ఎంత మంది ప్రజలు రోజు వారి క్రమంలో ఉపయోగించుచున్నారని రైల్వే మంత్రిత్వశాఖ కనుగొనవలయునని కోరినది మరియు 180 రోజులుగా ప్రతిరోజు సెంట్రల్ రైల్వేస్టేషన్‌కు ప్రవేశించుచున్నవారి సంఖ్యను మంత్రిత్వ శాఖ నమోదు చేస్తుంది.

(iii) ఆసక్తి కలిగిన 9వ తరగతి విద్యార్థి కరణీయ సంఖ్యలో వచ్చు దశాంశ భాగమును కనుగొని $\sqrt{5} = 2.236067978\cdots$ క్రింది విధంగా వ్రాసెను $2, 3, 6, 0, 6, 7, 9, 7, 8, \cdots$.

(iv) ఒక విద్యార్థి లవము 1 తో ప్రారంభమగు ధనాత్మక భిన్నములను ఆసక్తితో కనుగొని ఈ విధంగా వ్రాసెను. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$.

(v) గణిత శాస్త్ర ఉపాధ్యాయురాలు తరగతిలో వుండు విద్యార్థుల పేర్లను అక్షరక్రమంలో వ్రాసి వారి మార్కులను $75, 95, 67, 35, 58, 47, 100, 89, 85, 60$. గా వ్రాసెను.

(vi) అదే ఉపాధ్యాయురాలు ఆ దత్తాంశమును ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాసెను.

$35, 47, 58, 60, 67, 75, 85, 89, 95, 100.$

పైన పేర్కొన్న ఉదాహరణలలో, కొన్ని వాస్తవ సంఖ్యల సమితుల జాబితా ఒక ప్రత్యేకమైన క్రమంలో నున్నది.

(iii) మరియు (iv) అమరికలలో అపరిమిత సంఖ్యలో పదములున్నవి. (i), (ii), (v) మరియు (vi) లలో పరిమిత సంఖ్యలో పదములున్నవి. కాని (v) మరియు (vi) లలో అదే సంఖ్యలు వేర్వేరు క్రమములలో నున్నవి.

2.2 వరుసలు (Sequences)

నిర్వచనము

ఒక ప్రత్యేక క్రమంలో నున్న వాస్తవ సంఖ్యల **జాబితా లేక అమరికను** వాస్తవ సంఖ్యల వరుస అందురు.

(1) ఒక వరుసలో పరిమిత సంఖ్యలో పదములుంటే దానిని పరిమిత వరుస అందురు.

(2) ఒక వరుసలో అపరిమిత సంఖ్యలో పదములుంటే దానిని అపరిమిత వరుస అందురు.

పరిమిత వరుసను $S: a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ లేక $S = \{a_j\}_{j=1}^{n}$ మరియు అపరిమిత వరుసను $S: a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n, \ldots..$ లేక $S = \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ గా సూచిస్తాము ఇక్కడ a_k అనునది వరుస యొక్క kవ పదమును సూచించును. ఉదాహరణకు వరుసలో a_1వ పదము మొదటి పదమును మరియు a_7 అనునది 7వ పదమును సూచించును.

పై ఉదాహరణలలో (i), (ii), (v) మరియు (vi) లు పరిమిత వరుసలు. అదే విధముగా (iii), (iv) లు అపరిమిత వరుసలు అగుటను గమనించుము.

కొన్ని సంఖ్యల సేకరణ జాబితాను ఒక వరుసగా తీసుకుంటే, ఆ వరుసను మొదటి పదము, రెండవ పదము, మూడవ పదము, ... మొదలైనవిగా అన్ని గుర్తించవలయును. ఇంతకు మునుపు కొన్ని ఉదాహరణలు చూశాము. మరికొన్ని క్రింది ఉదాహరణలను గమనించుము.

(i) $2, 4, 6, 8, \cdots, 2010.$ (పదములు పరిమిత సంఖ్యలో గలవు)

(ii) $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots.$ (1 మరియు -1 మధ్య డోలనము చెందు పదములు)

(iii) $\pi, \pi, \pi, \pi, \pi.$ (పదములు సమానము అటువంటి వరుసలను స్థిర వరుసలు అందురు)

(iv) $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \cdots.$ (అన్ని ప్రధాన సంఖ్యల జాబితా)

(v) $0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, 0.33333, \cdots.$ (అనంత పదముల సంఖ్య)

(vi) $S = \{a_n\}_1^{\infty}$ ఇక్కడ $a_n = 1$ లేక 0 అనునది నాణెమును n సార్లు ఎగురవేయుటలో బొమ్మ లేక బొరుసు సంభవించును.

పై ఉదాహరణల నుండి (i) మరియు (iii) పరిమిత వరుసలు మరియు మిగిలినవి అపరిమిత వరుసలు పై వాటిలో (i) నుండి (v) వరకు నిర్దిష్టమైన నమూనా లేక ఒక నియమము ప్రకారము ఉన్నవి మరియు వరుసలోని ఏదైనా పదము యొక్క ప్రత్యేక స్థానమును కనుగొనవచ్చును. కాని (vi) లో ప్రత్యేక పదమును ముందుగా తెలుసుకొనలేము. అయినను అది ఖచ్చితముగా 1 లేక 0 గా వుండును. "నమూనా" అనుపదమును ఉపయోగించుటలో గల అర్థం వరుసలోని nవ పదమునకు ముందుగా వచ్చు మూలకములనుపయోగించి n

వ పదమును కనుగొనవచ్చును. సాధారణంగా వరుసలను ప్రమేయములుగా చూపించవచ్చును.

2.2.1 వరుసలను ప్రమేయములగా చూపించుట (Sequences viewed as functions)

ఒక వాస్తవ పరిమిత వరుస $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ లేక $S = \{a_j\}_{j=1}^{n}$ ను $f(k) = a_k,\ k = 1, 2, 3, \cdots, n$గా నిర్వచించిన దానిని $f : \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\} \to \mathbb{R}$ అను ప్రమేయముగా చూపించ వచ్చును.

ఒక వాస్తవ అపరిమిత వరుస $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ లేక $S = \{a_j\}_{j=1}^{n}$ ను $g(k) = a_k,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ గా నిర్వచించిన దానిని $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ అను ప్రమేయముగా చూపించవచ్చును.

$\forall$ అను సంకేతమునకు "ప్రతి ఒక్క దానికి" (for all) అని అర్థం. వరుస $\{a_k\}_1^{\infty}$యొక్క సాధారణ పదం a_k అని ఇవ్వబడిన, మొత్తము వరుసను మనము నిర్మించవచ్చును. సహజ సంఖ్యల యొక్క $\{1, 2, 3, \cdots, \}$ సమితి ప్రదేశముగా నున్నపుడు లేక సహజ సంఖ్యలలో కొన్ని ఉపసమితులు మరియు వాటి వ్యాప్తిలు, వాస్తవ సంఖ్యల ఉపసమితులయినపుడు ఒక వరుస ప్రమేయం అగును.

గమనిక

ఒక ప్రమేయం వరుస కానక్కరలేదు. ఉదాహరణకు ఒక ప్రయేయం $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ను $f(x) = 2x + 1, \forall\, x \in \mathbb{R}$ గా ఇచ్చిన ఇది వరుస కాదు. కనుక కావలసిన జాబితా ఏర్పడదు. f ప్రదేశం $\mathbb{N}$ గాను లేక $\mathbb{N}$ యొక్క ఉపసమితి $\{1, 2, \cdots, n\}$ గాను ఏర్పడుటలేదని గమనింపుము.

ఉదాహరణ 2.1

ఒక వరుస యొక్క n వ పదము $c_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ అయిన మొదటి మూడు పదములను కనుగొనుము

సాధన

$$c_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$n = 1,$ అయితే $c_1 = \dfrac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = 1.$

$n = 2,$ $c_2 = \dfrac{2(2+1)(4+1)}{6} = \dfrac{2(3)(5)}{6} = 5.$

$n = 3,$ $c_3 = \dfrac{3(3+1)(7)}{6} = \dfrac{(3)(4)(7)}{6} = 14.$

వరుస యొక్క మొదటి మూడు పదములు 1, 5, 14

పై ఉదాహరణ నుండి సాదారణ పదమునకు ఒక సూత్రంను ఇచ్చిన ప్రత్యక్షముగా ఒక ప్రత్యేక పదమును కనుగొనుటకు ఉపయోగపడును. క్రింది ఉదాహరణ నుండి ఇంకొక పద్ధతిలో ఒక వరుస ఉత్పన్నమును చూడవచ్చును.

ఉదాహరణ 2.2

క్రింది వరుసలకు మొదటి ఐదు పదములను వ్రాయుము

(i) $a_1 = -1,$ $\quad a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n+2},\quad n > 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

(ii) $F_1 = F_2 = 1,$ $\quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\quad n = 3, 4, \cdots.$

సాధన

(i) $a_1 = -1$ మరియు $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n+2}$, $n > 1$

$$a_2 = \frac{a_1}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3+2} = \frac{-\frac{1}{4}}{5} = -\frac{1}{20}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{4+2} = \frac{-\frac{1}{20}}{6} = -\frac{1}{120}$$

$$a_5 = \frac{a_4}{5+2} = \frac{-\frac{1}{120}}{7} = -\frac{1}{840}$$

$\therefore$ కావలసిన వరుస పదములు $-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{120}, -\frac{1}{840}$.

(ii) $F_1 = F_2 = 1$ మరియు $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$; $n = 3, 4, 5, ...$

$F_1 = 1, F_2 = 1$

$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$

$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$

$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$

$\therefore$ వరుస యొక్క మొదటి ఐదు పదములు 1, 1, 2, 3, 5.

సూచన

వరుస $F_1 = F_2 = 1$ మరియు $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n = 3, 4, \cdots$ ను ఫిభోనేసి వరుస అందురు. ఆ పదములు వరుసగా 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 ...... గా ఏర్పడును. ఈ ఫిభోనేసి వరుస సూర్యకాంతి పుష్పములోని విత్తనముల అమరిక వలె ఉండును. సూర్యకాంతి పుష్పములోని విత్తనములు వ్యతిరేక దిశలలో వుండు సర్పిలాకారముల సంఖ్యలు ఫిభోనేసి వరుస యొక్క వరుస సంఖ్యలు అగును.



అభ్యాసము 2.1

1. క్రిందివ్వబడిన వరుసల n వ పదములకు మొదటి మూడు పదములను కనుగొనుము.

   (i) $a_n = \dfrac{n(n-2)}{3}$ (ii) $c_n = (-1)^n 3^{n+2}$ (iii) $z_n = \dfrac{(-1)^n n(n+2)}{4}$

2. క్రింది వరుసల n వ పదములు ఇవ్వబడినవి. వరుసలో సూచించిన పదములను కనుగొనుము.

   (i) $a_n = \dfrac{n+2}{2n+3}$; a_7, a_9 (ii) $a_n = (-1)^n 2^{n+3}(n+1)$; a_5, a_8

   (iii) $a_n = 2n^2 - 3n + 1$; a_5, a_7 (iv) $a_n = (-1)^n(1 - n + n^2)$; a_5, a_8

3. క్రింది నిర్వచించిన విధముగా వరుస యొక్క 18వ మరియు 25వ పదములను కనుగొనుము.

$$a_n = \begin{cases} n(n+3), & n \in \mathbb{N} \text{ మరియు } n \text{ సరిసంఖ్య అయినపుడు} \\ \dfrac{2n}{n+1}, & n \in \mathbb{N} \text{ మరియు } n \text{ భేసిసంఖ్య అయినపుడు} \end{cases}$$

4. క్రింది నిర్వచించిన విధముగా వరుస యొక్క 13వ మరియు 16వ పదములను కనుగొనుము.

$$b_n = \begin{cases} n^2, & n \in \mathbb{N} \text{ మరియు } n \text{ సరిసంఖ్య అయినపుడు} \\ n(n+2), & n \in \mathbb{N} \text{ మరియు } n \text{ భేసిసంఖ్య అయినపుడు} \end{cases}$$

5. క్రిందివ్వబడిన వరుస యొక్క మొదటి ఐదు పదములను కనుగొనుము.

$$a_1 = 2, a_2 = 3 + a_1 \text{ మరియు } a_n = 2a_{n-1} + 5, n > 2.$$

6. క్రిందివ్వబడిన వరుస యొక్క మొదటి ఆరు పదములను కనుగొనుము.

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1 \text{ మరియు } a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \ n > 3.$$

2.3 అంకశ్రేఢి (Arithmetic Progression (A.P.))

ఈ విభాగములో వరుసల యొక్క కొన్ని ప్రత్యేక రకములను చూసెదము.

నిర్వచనము

ఒక వరుస $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ ను అంకగణిత వరుస అందురు. ఇందులో $a_{n+1} = a_n + d, n \in \mathbb{N}$ ఇక్కడ d అనునది ఒక స్థిర సంఖ్య. a_1 ను మొదటి పదము, స్థిరసంఖ్య d ను సామాన్య భేదము అని అందురు . ఈ అంకగణిత వరుసను అంకశ్రేఢి అందురు.

ఉదాహరణలు :

(i) 2, 5, 8, 11, 14, $\cdots$ ఒక అంకశ్రేఢి ఎందుకనగా $a_1 = 2$ మరియు సామాన్యభేదము $d = 3$.

(ii) $-4, -4, -4, -4, \cdots$ ఒక అంకశ్రేఢి ఎందుకనగా $a_1 = -4$ మరియు $d = 0$.

(iii) 2, 1.5, 1, 0.5, 0, -0.5, -1.0, -1.5, ... ఒక అంకశ్రేఢి, ఎందుకనగా $a_1 = 2$ మరియు $d = -0.5$.

అంకశ్రేఢి యొక్క సామాన్య రూపము (The general form of an A.P.)

అంకశ్రేఢి యొక్క సామాన్య రూపమును తెలుసుకొనెదము అంకగణిత వరుస $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ యొక్క మొదటి పదము a మరియు సామాన్య భేదము d అయిన.

$$a_1 = a \text{ మరియు } a_{n+1} = a_n + d, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$n = 1, 2, 3$ అయిన

$$a_2 = a_1 + d = a + d = a + (2-1)d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a+d) + d = a + 2d = a + (3-1)d$$
$$a_4 = a_3 + d = (a+2d) + d = a + 3d = a + (4-1)d$$

పై నమూనాలననుసరించి n వ పదము a_n ను క్రింది విధముగా చూపవచ్చును.

$$a_n = a_{n-1} + d = [a + (n-2)d] + d = a + (n-1)d.$$

కనుక ప్రతి $n \in \mathbb{N}$ కు $a_n = a + (n-1)d$ అగును.

అంకశ్రేఢి సామాన్య రూపం

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \cdots,\ a+(n-1)d,\ a+nd, \cdots$$

మరియు అంకశ్రేఢి యొక్క సామాన్య పదమునకు సూత్రము

$t_n = a + (n-1)d$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

గమనిక

(i) ఒక వరుస పరిమిత వరుసగా వుంటే అంకశ్రేఢిలో n పదములు మాత్రమే వుండును. దాని చివరి పదము l అనుకుంటే $l = a + (n-1)d$

(ii) $l = a + (n-1)d$ ను $n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$ గాను వ్రాయవచ్చును మొదటి పదము a, చివరి పదము l మరియు సామాన్య భేదము d లను ఇచ్చిన పదముల సంఖ్యను కనుగొనుటకు ఇది ఉపయోగపడును.

(iii) అంకశ్రేఢిలో మూడు వరుస పదములను $m-d,\ m,\ m+d$ గా తీసుకొనవలయును.

(iv) అంకశ్రేఢిలో నాలుగు వరుస పదములను $m-3d,\ m-d,\ m+d,\ m+3d$ గా తీసుకొనవలయును. ఇచ్చట సాధారణ భేదము $2d$.

(v) ఒక అంకశ్రేఢిలోని ప్రతి పదమునకు ఒక స్థిర విలువను కూడిన లేక తీసివేసిన వచ్చు ఫలితశ్రేఢి అంకశ్రేఢిగానే ఉండును.

(vi) అంకశ్రేఢిలోని ప్రతి పదమును ఏదైన శూన్యేతర స్థిరసంఖ్యతో గుణించిన లేక భాగించిన వచ్చు ఫలితశ్రేఢి అంకశ్రేఢిగానే యుండును.

ఉదాహరణ 2.3

క్రింది వరుసలు ఏవి అంకశ్రేఢిలో నున్నవి?

(i) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \cdots$. (ii) $3m-1, 3m-3, 3m-5, \cdots$.

సాధన

(i) ఇవ్వబడిన వరుస యొక్క n వ పదము t_n, $n \in \mathbb{N}$ అనుకొనుము.

$$\therefore \quad t_1 = \frac{2}{3},\ t_2 = \frac{4}{5},\ t_3 = \frac{6}{7}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{12-10}{15} = \frac{2}{15}$$

$$t_3 - t_2 = \frac{6}{7} - \frac{4}{5} = \frac{30-28}{35} = \frac{2}{35}$$

$t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$, కనుక ఇవ్వబడిన వరుస అంకశ్రేఢి కాదు

(ii) $3m-1, 3m-3, 3m-5, \cdots$.

$$t_1 = 3m-1,\ t_2 = 3m-3,\ t_3 = 3m-5, \cdots.$$

$$\therefore \quad t_2 - t_1 = (3m-3) - (3m-1) = -2$$

$$t_3 - t_2 = (3m-5) - (3m-3) = -2$$

ఇచ్చినటువంటి వరుస అంకశ్రేఢి అగును. ఇచ్చట మొదటి పదము $3m-1$, సామాన్య భేదము -2

ఉదాహరణ 2.4

అంకశ్రేఢి యొక్క మొదటి పదము మరియు సామాన్య భేదమును కనుగొనుము.

(i) $5, 2, -1, -4, \cdots$. (ii) $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{17}{6}$

సాధన

(i) మొదటి పదము $a = 5$, సామాన్య భేదము $d = 2 - 5 = -3$.

(ii) $a = \frac{1}{2}$, సామాన్య భేదము $d = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{5-3}{6} = \frac{1}{3}$.

ఉదాహరణ 2.5

$20, 19\frac{1}{4}, 18\frac{1}{2}, \cdots$ అను అంకశ్రేఢిలో సామాన్య పదం t_n ఒక ఋణసంఖ్యగా నుండుటకు, n యొక్క అత్యల్ప ధనపూర్ణాంకము ఎంత వుండవలెను?

సాధన

ఇందు $a = 20,\ d = 19\frac{1}{4} - 20 = -\frac{3}{4}$.

$t_n < 0$ ఉండునట్లు మొదటి ధనపూర్ణాంకము nను కనుగొనవలెను.

అత్యల్ప విలువ $n \in \mathbb{N}$కు $a + (n-1)d < 0$ ను దీనిని సాధించుటకు తీసుకొనవలయును.

కనుక, $n \in \mathbb{N}$ కు $20 + (n-1)\left(-\frac{3}{4}\right) < 0$

$$(n-1)\left(-\frac{3}{4}\right) < -20$$

$\Longrightarrow (n-1) \times \frac{3}{4} > 20$ (ఇరువైపుల (-1) తో గుణించగా ఈ అసమానత్వము వ్యతిక్రమమగును.)

$\therefore \quad n - 1 > 20 \times \frac{4}{3} = \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}$.

కనుక, $n > 26\frac{2}{3} + 1$. అనగా, $n > 27\frac{2}{3} = 27.66$

ఈ అసమానత్వమును తృప్తిపరచు అత్యల్ప ధనపూర్ణాంకము $n = 28$.

కనుక, అంకశ్రేఢిలో మొదటి ఋణసంఖ్య 28 వ పదమగును (t_{28}).

ఉదాహరణ 2.6

ఒక పూలతోటయందు, మొదటి వరుసలో 23 రోజాచెట్లు, రెండవ వరుసలో 21, మూడవ వరుసలో 19 రోజా చెట్లు అమరి ఉన్నవి. చివరి వరుసలో 5 రోజా చెట్లున్నవి. అయిన ఆ తోటలో ఎన్ని వరుసలున్నవో తెల్పుము.

సాధన పూల తోటలోని వరుసల సంఖ్యను n అనుకొనుము.

1వ, 2వ, 3వ … … … nవ వరుసలలో రోజా చెట్ల సంఖ్య క్రమముగా 23, 21, 19……5 అగును.

$t_k - t_{k-1} = -2, k = 2, \ldots.. n$

$23, 21, 19, \cdots, 5$ అను వరుస అంకశ్రేఢిలోనున్నది.

$a = 23, \quad d = -2,$ మరియు $l = 5$.

$\therefore \quad n = \frac{l-a}{d} + 1 = \frac{5-23}{-2} + 1 = 10.$

రోజాపూలతోటలో 10 వరుసలు కలవు.

ఉదాహరణ 2.7

ఒక వ్యక్తి 2010 లో సంవత్సరమునకు ₹30,000 జీతం చొప్పున పనిలో చేరెను. ప్రతి సంవత్సరం ₹600 అతని జీతంలో పెరిగిన ఏ సంవత్సరంలో అతని జీతం ₹39,000 ను చేరును?

సాధన n వ సంవత్సరంలో అతను జీతము ₹39,000 ను పొందగలడని అనుకొనిన. 2010, 2011, 2012, $\cdots$, $[2010+(n-1)]$ సం॥ లలో అతని జీతము క్రమముగా ₹ 30,000, ₹ 30,600, ₹ 31,200, $\cdots$, ₹ 39000 అగును. జీతములు అంకశ్రేఢిలోనున్నవని గమనింపుము. ప్రతి పదమును 100 తో భాగించగా 300, 306, 312, $\cdots$, 390 అను క్రొత్త అంకశ్రేఢిని పొందగలము.

$a = 300, \; d = 6, \; l = 390.$

$$n = \frac{l-a}{d} + 1$$

$$= \frac{390-300}{6} + 1 = \frac{90}{6} + 1 = 16$$

16వ సంవత్సరము జీతము ₹39000 అగును.

$\therefore$ అతని జీతము ₹39,000 ను 2025 సం॥లో పొందగలడు.

అతను 2025 సంవత్సరంలో ₹39,000 జీతమును పొందగలడు.

ఉదాహరణ 2.8

మూడు సంఖ్యలు 2:5:7 నిష్పత్తిలో ఉన్నవి. రెండవ దాని నుండి 7ను తీసివేయగా ఏర్పడు వరుస అంకశ్రేఢిలో వున్నట్లయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

సాధన ఆ సంఖ్యలు $2x, 5x, 7x$ అనుకొనుము. $(x \neq 0)$

ఇవ్వబడిన సమాచారము నుండి, ఆ సంఖ్యలు $2x, 5x-7, 7x$ అనునవి అంకశ్రేఢిలో నున్నవి.

$\therefore \; (5x-7) - 2x = 7x - (5x-7) \implies 3x - 7 = 2x + 7, \; x = 14.$

కనుక కావలసిన సంఖ్యలు 28,70,98

అభ్యాసము 2.2

1. ఒక అంకశ్రేఢి యొక్క మొదటి పదము 6 మరియు సామాన్య భేదము 5 అయిన అంకశ్రేఢిని మరియు దాని సాధారణ పదమును కనుగొనుము.
2. 125, 120, 115, 110, ... అను అంకశ్రేఢి యొక్క సామాన్య భేదము మరియు 15వ పదమును కనుగొనుము.
3. $24, \; 23\frac{1}{4}, \; 22\frac{1}{2}, \; 21\frac{3}{4}, \cdots$. అను అంకశ్రేఢిలో 3 అనునది ఎన్నవ పదము అగును.

4. $\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, \cdots$.అంకశ్రేఢి యొక్క 12 వ పదమును కనుగొనుము.

5. 4, 9, 14, ... అంకశ్రేఢి యొక్క 17వ పదమును కనుగొనుము.

6. క్రింది అంకశ్రేఢిలో ఎన్ని పదములున్నవో కనుగొనుము.

(i) $-1, -\frac{5}{6}, -\frac{2}{3}, \cdots, \frac{10}{3}$. (ii) 7, 13, 19, $\cdots$, 205.

7. అంకశ్రేఢి యొక్క 9వ పదము సున్న అయిన 29వ పదము, 19వ పదమునకు రెట్టింపుగా ఉండునని నిరూపించుము.

8. ఒక అంకశ్రేఢి యొక్క 10వ మరియు 18వ పదములు వరుసగా 41 మరియు 73 అయిన 27వ పదమును కనుగొనుము.

9. 1,7,13,19... ... ... మరియు 100, 95, 90. ... ... అను రెండు అంకశ్రేఢుల n వ పదములు సమానమైన n విలువను కనుగొనుము.

10. 13 చే భాగించబడిన రెండు అంకెల సంఖ్యలు ఎన్ని ?

11. ఒక టి.వి. తయారీ దారుడు 7వ సంవత్సరంలో 1000 టి.విలను ఉత్పత్తి చేసెను. మరియు 10వ సంవత్సరంలో 1450 టి.వి లను ఉత్పత్తి చేసెను. ప్రతి సంవత్సరం ఒక స్థిరమైన సంఖ్యలో టి.వి.ల ఉత్పత్తి పెరుగుచుండిన మొదటి సంవత్సరం మరియు 15వ సంవత్సరంలో ఎన్ని టి.వి. లను ఉత్పత్తి చేసెనో కనుగొనుము.

12. ఒకడు మొదటి నెల ₹800 పొదుపు చేసెను. రెండవ నెల ₹720 మరియు మూడవ నెల ₹800 పొదుపు చేసెను. అతను ఇదే విధంగా పొదుపును కొనసాగించినచో , 25వ నెల అతని పొదుపు ఎంత?

13. ఒక అంకశ్రేఢి యొక్క మూడు వరుస పదముల మొత్తము 6 మరియు వాటి లబ్ధము -120 అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

14. అంకశ్రేఢిలో వున్న మూడు సంఖ్యల మొత్తము 18 మరియు వాటి వర్గముల మొత్తము 140 అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

15. ఒక అంకశ్రేఢిలో m వ పదం m రెట్లు మరియు n వ పదం n రెట్లకు సమానమైన, $(m+n)$వ పదం సున్న అని చూపుము.

16. ఒక వ్యక్తి సంవత్సరానికి 14% సాధారణ వడ్డీతో ₹25000 లను పెట్టుబడిగా పెట్టెను. ఈ మొత్తములు (అసలు + వడ్డీ) అంకశ్రేఢిని ఏర్పరుచునా? అట్లేర్పరిచినచో 20 సం॥ల తరువాత అతని పెట్టుబడి ఎంత?

17. a, b, c లు అంకశ్రేఢిలో ఉంటే $(a-c)^2 = 4(b^2 - ac)$ అని నిరూపించుము.

18. a, b, c లు అంకశ్రేఢిలో ఉంటే $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ అంకశ్రేఢిలో వున్నవని చూపుము.

19. a^2, b^2, c^2 అంకశ్రేఢిలో ఉంటే $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ అంకశ్రేఢిలో వున్నవని చూపుము.

20. $a^x = b^y = c^z, x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ మరియు $b^2 = ac$, అయిన $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ అంకశ్రేఢిలో వున్నవని చూపుము.

2.4 గుణశ్రేఢి (Geometric Sequence or Geometric Progression (G.P.))

నిర్వచనము

ఒక వరుస $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ ను గుణాత్మక వరుస అనిన, $a_{n+1} = a_n r$, $n \in \mathbb{N}$, r ఒక శూన్యేతర స్థిరాంకం. a_1 మొదటి పదము, r ను సామాన్య నిష్పత్తి అని అందురు. ఈ గుణాత్మక వరుసను గుణశ్రేఢి(G.P.) అందురు.

గుణశ్రేఢికి కొన్ని ఉదాహరణలను చూచెదము.

(i) $3, 6, 12, 24, \cdots$.

ఒక వరుస $\{a_n\}_1^{\infty}$ గుణాత్మక వరుస అయిన, ఇందు $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$గా వుండును.

$$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = 2 \neq 0.$$

కావున ఇచ్చిన వరుస గుణశ్రేఢి అగును.

(ii) $\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \cdots$.

$$\frac{-\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{\frac{1}{81}}{-\frac{1}{27}} = \frac{-\frac{1}{243}}{\frac{1}{81}} = -\frac{1}{3} \neq 0.$$

కనుక ఇవ్వబడిన వరుస గుణశ్రేఢి అగును.

గుణశ్రేఢి యొక్క సాధారణ రూపం (The general form of a G.P.)

గుణశ్రేఢి యొక్క సాధారణ రూపమును ఉత్పాదించెదము. గుణాత్మక వరుస $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. లో మొదటి పదము a మరియు సామాన్య నిష్పతి r అగును.

ప్రతి $n \in \mathbb{N}$ కు $a_1 = a$ మరియు $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ అగును.

ప్రతి $n \in \mathbb{N}$ కు $a_{n+1} = r\, a_n$ అగును.

$n = 1, 2, 3 ....$ గా తీసుకొనిన

$$a_2 = a_1 r = ar = ar^{2-1}$$

$$a_3 = a_2 r = (ar)r = ar^2 = ar^{3-1}$$

$$a_4 = a_3 r = (ar^2)r = ar^3 = ar^{4-1}$$

ఈ విధంగా కొనసాగినచో,

$$a_n = a_{n-1} r = (ar^{n-2})r = ar^{n-1}.$$

కనుక, ప్రతి $n \in \mathbb{N}$ కు $a_n = ar^{n-1}$ అనునది గుణశ్రేఢిలో n వ పదమును ఇచ్చును

గుణశ్రేఢి సామాన్య రూపం క్రింది విధంగా వుండును.

$$a, ar, ar^2, ar^3, \cdots, ar^{n-1}, ar^n, \cdots.$$

గుణశ్రేఢి యొక్క సాధారణ పదమునకు సూత్రము

$$t_n = ar^{n-1},\ n = 1, 2, 3, \cdots.$$

ఒక వరుసలో మొదటి కొన్ని పదాలను ఇచ్చిన ఆ వరుస గుణశ్రేఢియా కాదా అని ఎలా నిర్ణయించెదము?

$\frac{t_{n+1}}{t_n} = r, \forall\, n \in \mathbb{N}$,మరియు ఇక్కడ r అనునది శ్యూన్యేతర స్థిరాంకం అపుడు $\{t_n\}_1^\infty$ అనునది G.P. లో వుండును.

గమనిక

(i) ఒక వరుసలో మొదటి పదము తప్ప మిగిలిన పదములన్ని వాటి ముందు పదమునకు ఒక శూన్యేతర స్థిర నిష్పత్తిలో యున్నచో ఈ రకమైన శ్రేఢిని గుణశ్రేఢి అందురు

(ii) గుణశ్రేఢిని ఒక శూన్యేతర స్థిరసంఖ్యచే గుణించినను లేక భాగించినను ఏర్పడు శ్రేఢి గుణశ్రేఢియే అగును.

(iii) గుణశ్రేఢిలో మూడు వరుస పదములు $\frac{a}{r}, a, ar$ గా తీసుకొనవలయును. ఇందు r అనునది సామాన్య నిష్పత్తి.

(iv) గుణశ్రేఢిలో నాలుగు వరుస పదములు $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$.గా తీసుకొనవలయును.

(ఇక్కడ సామాన్య నిష్పత్తి r^2 అగును. కానీ పైవిధంగా r కాదు.)

ఉదాహరణ 2.9

క్రింది వరుసలలో ఏవి గుణశ్రేఢిలగునో తెల్పుము.

(i) 5, 10, 15, 20, $\cdots$. (ii) 0.15, 0.015, 0.0015, $\cdots$.

(iii) $\sqrt{7},\ \sqrt{21},\ 3\sqrt{7},\ 3\sqrt{21}, \cdots$.

సాధన

(i) రెండు వరుస పదముల సామాన్య నిష్పత్తి $\frac{10}{5} \neq \frac{15}{10}$.

సామాన్య నిష్పత్తి లేదు కనుక ఇది గుణశ్రేఢి కాదు.

(ii) $\frac{0.015}{0.15} = \frac{0.0015}{0.015} = \cdots = \frac{1}{10}$.

సామాన్య నిష్పత్తి $= \frac{1}{10}$, కావున ఇది గుణశ్రేఢి అగును.

(iii) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{3\sqrt{7}} = \cdots = \sqrt{3}$

సామాన్య నిష్పత్తి $= \sqrt{3}$. కనుక ఇవ్వబడిన వరుస గుణశ్రేఢి అగును.

ఉదాహరణ 2.10

క్రింది గుణశ్రేఢి యొక్క సాధారణ పదము మరియు సామాన్య నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

(i) $\frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{18}{125}, \cdots$. (ii) 0.02, 0.006, 0.0018, $\cdots$.

సాధన

(i) సామాన్య నిష్పత్తి $r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \cdots$.

కనుక $r = \frac{\frac{6}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}$.

వరుస యొక్క మొదటి పదం $\frac{2}{5}$. కనుక వరుస సాధారణ పదము

$$t_n = ar^{n-1}, \; n = 1, 2, 3, \cdots.$$

$$\Longrightarrow \qquad t_n = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

(ii) ఇవ్వబడిన గుణశ్రేఢి యొక్క సామాన్య నిష్పత్తి

$$r = \frac{0.006}{0.02} = 0.3 = \frac{3}{10}.$$ గుణశ్రేఢి యొక్క మొదటి పదము 0.02

కనుక వరుస యొక్క సాధారణ పదము

$$t_n = (0.02)\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

ఉదాహరణ 2.11

గుణశ్రేఢి యొక్క 4వ పదం $\frac{2}{3}$ మరియు 7వ పదం $\frac{16}{81}$ అయిన గుణశ్రేఢిని కనుగొనుము

సాధన $t_4 = \frac{2}{3}$ మరియు $t_7 = \frac{16}{81}$ అని ఇవ్వబడినది.

సాధారణ పదం సూత్రము $t_n = ar^{n-1}, \; n = 1, 2, 3, \cdots$.నుపయోగించి

$$t_4 = ar^3 = \frac{2}{3} \text{ మరియు } t_7 = ar^6 = \frac{16}{81}$$

గుణశ్రేఢి కనుగొనుటకు ముందుగా మొదటి పదము a మరియు సామాన్య నిష్పత్తి r లను కనుగొనవలెను.

t_7 ను t_4 తో భాగించగా

$$\frac{t_7}{t_4} = \frac{ar^6}{ar^3} = \frac{\frac{16}{81}}{\frac{2}{3}} = \frac{8}{27}.$$

$$r^3 = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \text{ నుండి } r = \frac{2}{3}.$$

$$t_4 = \frac{2}{3} \Longrightarrow ar^3 = \left(\frac{2}{3}\right).$$

$$\Longrightarrow \quad a\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{2}{3}. \qquad \therefore \quad a = \frac{9}{4}.$$

కావున కావలసిన గుణశ్రేఢి $ar, \; ar^2, \; ar^3, \; \cdots, \; ar^{n-1}, \; ar^n, \cdots$

అనగా $\frac{9}{4}, \; \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right), \; \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2, \; \cdots.$

ఉదాహరణ 2.12

బాక్టీరియా పరిశోధనలలో బాక్టీరియా సంఖ్య ప్రతి గంటకు రెండింతలగును. ప్రారంభములో 30 బాక్టీరియాలు ఉండిన యెడల 14 వ గంట చివరిలో ఎన్ని బాక్టీరియాలు ఉండును?

సాధన బాక్టీరియా పరిశోధనలో బాక్టీరియాల సంఖ్య, తరువాత వచ్చు గంట చివరకు రెండింతలగునని గమనించుము.

ప్రారంభములో బాక్టీరియా సంఖ్య = 30

మొదటి గంట చివరన బాక్టీరియా సంఖ్య = 2(30)

రెండవ గంట చివరన బాక్టీరియా సంఖ్య $= 2(2(30)) = 30(2^2)$

పై విధముగా జరుగునపుడు ప్రతి గంట చివరలో ఉండు బాక్టీరియాల సంఖ్య (G.P) లో వుండును.

దాని సామాన్య నిష్పత్తి $r = 2$.

n గంటలు తరువాత బాక్టీరియా సంఖ్యను t_n గా సూచించినట్లయితే

గుణశ్రేఢి సాధారణ పదము $t_n = 30\,(2^n)$

14వ గంట చివర బాక్టీరియా సంఖ్య $t_{14} = 30\,(2^{14})$.

ఉదాహరణ 2.13

ఒక సంవత్సరమునకు 10% చక్రవడ్డీ రేటు చొప్పున బ్యాంకులో ₹ 500 జమ చేసిన యెడల 10 సం॥ల చివర ఆ పెట్టుబడి విలువ ఎంత ?

సాధన

ఒక సంవత్సమునకు అసలు ₹. 500 లకు అగువడ్డీ $500\left(\frac{10}{100}\right) = 50$

రెండవ సంవత్సరమునకు అసలు = మొదటి సంవత్సరం అసలు + వడ్డీ

$$= 500 + 500\left(\frac{10}{100}\right) = 500\left(1+\frac{10}{100}\right)$$

రెండవ సంవత్సరం వడ్డీ $= \left(500\left(1+\frac{10}{100}\right)\right)\left(\frac{10}{100}\right)$.

మూడవ సంవత్సరం అసలు $= 500\left(1+\frac{10}{100}\right) + 500\left(1+\frac{10}{100}\right)\frac{10}{100}$

$$= 500\left(1+\frac{10}{100}\right)^2$$

ఇదే విధంగా కొనసాగిన nవ సంవత్సరంలో అసలు $= 500\left(1+\frac{10}{100}\right)^{n-1}$.

$(n-1)$ వ సంవత్సరం చివరిలో మొత్తము = n వ సంవత్సరపు అసలు

10 సంవత్సరములు తరువాత ఖాతాలో మొత్తము

$$= ₹\ 500\left(1+\frac{10}{100}\right)^{10} = ₹\ 500\left(\frac{11}{10}\right)^{10}.$$

గమనిక

పై పద్ధతినుపయోగించి చక్రవడ్డీ సమస్యలకు సంబందించిన మొత్తము కనుగొనుటకు ఈ క్రింది సూత్రమును ఉత్పాదించవచ్చును.

మొత్తము , $A = P(1+i)^n$. ఇక్కడ P అసలు, $i = \frac{r}{100}$, r సంవత్సర వడ్డీ రేటు మరియు n సంవత్సరముల సంఖ్య అగును.

ఉదాహరణ 2.14

ఒక గుణశ్రేఢి యొక్క మొదటి మూడు పదముల మొత్తము $\frac{13}{12}$ మరియు వాటి లబ్దము −1 అయిన సామాన్య నిష్పత్తి మరియు ఆ పదములను కనుగొనుము.

సాధన గుణశ్రేఢి యందున్న మొదటి మూడు పదములు $\frac{a}{r}, a, ar$ గా తీసుకొనిన

$$\frac{a}{r} + a + ar = \frac{13}{12}$$

$$a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{13}{12} \implies a\left(\frac{r^2+r+1}{r}\right) = \frac{13}{12} \quad (1)$$

మరియు $\left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = -1$

$\implies a^3 = -1 \quad \therefore \quad a = -1$

$a = -1$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించిన

$$(-1)\left(\frac{r^2+r+1}{r}\right) = \frac{13}{12}$$

$$\implies 12r^2 + 12r + 12 = -13r$$

$$12r^2 + 25r + 12 = 0$$

$$(3r+4)(4r+3) = 0$$

$r = -\frac{4}{3}$ or $-\frac{3}{4}$

$r = -\frac{4}{3}$ మరియు $a = -1$, అయినపుడు ఆ పదములు $\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}$.

$r = -\frac{3}{4}$ మరియు $a = -1$, అయినపుడు పదములు తిరోగమనంలోఉండును i.e. $\frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}$,

ఉదాహరణ 2.15

a, b, c, d లు గుణశ్రేఢిలో యుండిన

$(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = (a-d)^2$ అని నిరూపించుము

సాధన a, b, c, d లు గుణశ్రేఢిలో ఉన్నవి. మొదటి పదము a మరియు సామాన్య నిష్పత్తి r అని అనుకొనుము.

కావున $b = ar, \quad c = ar^2, \quad d = ar^3$

ఇప్పుడు $(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2$

$$= (ar - ar^2)^2 + (ar^2 - a)^2 + (ar^3 - ar)^2$$

$$= a^2[(r - r^2)^2 + (r^2 - 1)^2 + (r^3 - r)^2]$$

$$= a^2[r^2 - 2r^3 + r^4 + r^4 - 2r^2 + 1 + r^6 - 2r^4 + r^2]$$

$$= a^2[r^6 - 2r^3 + 1] = a^2[r^3 - 1]^2$$

$$= (ar^3 - a)^2 = (a - ar^3)^2 = (a-d)^2$$

అభ్యాసము 2.3

1. క్రింది వరుసలలో ఏవి గుణశ్రేఢిలో గుర్తించుము. ఆ గుణశ్రేఢిలకు సామాన్య నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

   (i) $0.12,\ 0.24,\ 0.48, \cdots.$ (ii) $0.004,\ 0.02,\ 0.1, \cdots.$ (iii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \cdots.$

   (iv) $12,\ 1,\ \frac{1}{12}, \cdots.$ (v) $\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \cdots.$ (vi) $4, -2, -1, -\frac{1}{2}, \cdots.$

2. $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, -2, \cdots$ గుణశ్రేఢి యందు 10వ పదము మరియు సామాన్య నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

3. గుణశ్రేఢిలో 4వ మరియు 7వ పదములు వరుసగా 54 మరియు 1458 అయిన G.P. ని కనుగొనుము.

4. ఒక గుణశ్రేఢిలో మొదటి పదము $\frac{1}{3}$ మరియు 6వ పదము $\frac{1}{729}$ అయిన G.P. ని కనుగొనుము.

5. క్రింది గుణశ్రేఢిలో ...

   (i) $5,\ 2,\ \frac{4}{5}, \frac{8}{25}, \cdots$,లో $\frac{128}{15625}$ అనునది ఎన్నో పదము ?

   (ii) $1,\ 2,\ 4,\ 8, \cdots$, లో 1024 అనునది ఎన్నో పదము ?

6. $162,\ 54,\ 18, \cdots.$ మరియు $\frac{2}{81}, \frac{2}{27}, \frac{2}{9}, \cdots$ అను గుణశ్రేఢిలలో nవ పదములు సమానమైన n విలువను కనుగొనుము.

7. ఒక గుణశ్రేఢి యొక్క 5వ పదము 1875 మరియు మొదటి పదము 3 అయిన సామాన్య నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

8. ఒక గుణశ్రేఢి యొక్క మొదటి మూడు పదముల మొత్తము $\frac{39}{10}$ మరియు వాటి లబ్ధము 1 అయిన సామాన్య నిష్పత్తి మరియు అ పదములను కనుగొనుము.

9. G.P. లో మూడు వరుస పదముల లబ్ధము 216 మరియు వాటిని జతలుగా తీసుకొనిన వాటి లబ్ధముల మొత్తము 156 అయిన వాటిని కనుగొనుము.

10. గుణశ్రేఢిలో మొదటి మూడు వరుస పదముల మొత్తము 7 మరియు వాటి విలోమముల మొత్తము $\frac{7}{4}$ అయిన ఆ పదములను కనుగొనుము.

11. గుణశ్రేఢి యందు మొదటి మూడు పదముల మొత్తము 13 మరియు వాటి వర్గముల మొత్తము 91 అయిన G.P. కనుగొనుము.

12. ఒక బ్యాంకులో 5% చక్రవడ్డీ రేటుతో ₹1000 జమచేసిన 12 సంవత్సరముల చివర వచ్చు మొత్తమును కనుగొనుము.

13. ఒక కంపెని ₹50,000 లకు ఒక జెరాక్స్ యంత్రమును కొనెను ఆ యంత్రము విలువ సంవత్సరానికి 45% తగ్గినచో 15 సంవత్సరముల తరువాత యంత్రము విలువ ఎంత?

14. a, b, c, d లు గుణశ్రేఢిలో వుంటే $(a-b+c)(b+c+d) = ab+bc+cd.$ అని చూపుము.

15. a, b, c, d లు గుణశ్రేఢిలో వుంటే, $a+b,\ b+c,\ c+d,$ లు కూడా గుణశ్రేఢిలో వున్నవని చూపుము.

2.5 శ్రేణులు (Series)

క్రింది సమస్యను గమనింపుము.

ఒకవ్యక్తి జనవరి 1, 1990 లో సంవత్సర జీతము ₹ 25,000 లకు ఉద్యోగములో చేరి, ప్రతి సంవత్సరము అదనపు జీతము ₹ 500 తీసుకొనిన, అతడు జనవరి 1, 2010 వరకు తీసిన మొత్తము జీతమును కనుగొనుము. మొదట అతని సంవత్సర జీతం అంకశ్రేఢిలో నున్నదని గమనింపుము.

$$25000,\ 25500,\ 26000,\ 26500, \cdots,\ (25000 + 19(500)).$$

20 సంత్సరముల జీతమును కూడుట ద్వారా సమస్యను సాధించవచ్చును.

i.e. $25000 + 25500 + 26000 + 26500 + \cdots + (25000 + 19(500))$.

ఈ వరుస నుండి పదములను కూడవలెననే ఆలోచన అవసరమగుచున్నది.

నిర్వచనము

ఒక వరుసలోని పదములను కూడిక గుర్తు (+) చే తెలియజేయుటను శ్రేణులు అని అందురు. పరిమిత సంఖ్యలో గల పదముల మొత్తమును పరిమిత శ్రేణి **(finite series)** అందురు. అపరిమిత సంఖ్యలో గల పదముల మొత్తమును అపరిమిత శ్రేణి **(infinite series)** అందురు.

వాస్తవ సంఖ్యల వరుస $S = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ను పరిగణించుము. ప్రతి $n \in \mathbb{N}$ కు పాక్షిక సంకలనమును $S_n = a_1 + a_2 +, \cdots + a_n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$గా నిర్వచించవచ్చును. కనుక ఇవ్వబడిన వరుస $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ కు పాక్షికసంకలన వరుస $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ అగును.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ అను వరుస యొక్క క్రమయుగ్మములు $(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{S_n\}_{n=1}^{\infty})$ లను అపరిమిత శ్రేణి పదములు అందురు. అపరిమిత శ్రేణిని $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots,$గా సూచించెదరు. సూక్ష్మముగా దీనిని $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ గా సూచించెదరు. ఇక్కడ $\sum$ అను గుర్తు మొత్తమును సూచించును. మరియు దానిని సిగ్మా అని పలికెదము.

పరిమిత శ్రేణులను సులభముగా అర్థం చేసుకొనవచ్చును (పరిమిత పదముల సంకలనము) అపరిమిత వరుసలో గల పదముల మొత్తమును సాధారణ సంకలనము ద్వారా చేయుట వీలుకాదు. వరుసలో అపరిమిత పదముల సంకలనము ఎట్లు అర్థంచేసుకోగలము? వరుసలో అపరిమిత సంఖ్యలో గల పదముల మొత్తమును కనుగొనుటను పై తరగతులలో నేర్చుకుంటారు. మనం ఇక్కడే పరిమిత శ్రేణుల గురించి తెలుసుకొనెదము.

ఈ విభాగంలో అంకశ్రేణి మరియు గుణశ్రేణిల గురించి అభ్యసించెదము.

2.5.1 అంకశ్రేణి (Arithmetic Series)

అంకశ్రేణి అనగా ఆ శ్రేణిలోని పదములు అంకశ్రేఢి రూపములో నుండును.

అంకశ్రేఢి యొక్క మొదటి *n* పదముల మొత్తము

మొదటి పదము a, సామాన్య భేదము d గా నుండు అంకశ్రేఢిని గమనించుము.

$$a,\ a + d,\ a + 2d, ...,\ a + (n-1)d, \cdots.$$

అంకశ్రేఢిలోని మొదటి n పదముల మొత్తమును S_n అనుకొనుము.

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots\ (a + (n-1)d)$$

$$\implies S_n = na + (d + 2d + 3d + \cdots + (n-1)d)$$
$$= na + d(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1))$$

$1 + 2 + \cdots + (n-1)$ మొత్తమును కనుగొనిన, సూత్రమును సూక్ష్మీకరించవచ్చును.

ఇది $1, 2, 3, \cdots, (n-1)$ అంకశ్రేఢి మొత్తమగును.

మొదట $1 + 2 + \cdots + (n-1)$ ల మొత్తమును కనుగొనవలెను

ఇపుడు మొదటి n ధన పూర్ణాంకముల మొత్తము కనుగొనెదము

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n. \qquad (1)$$

పై మొత్తమును కనుగొనుటకు ఒక ఉపాయమును ఉపయోగించెదము.

S_n ను క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చునని గమనింపుము

$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1. \qquad (2)$$

(1) మరియు (2) సంకలనము చేయగా,

$$2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1). \qquad (3)$$

సమీకరణం (3) లో కుడివైపు $(n+1)$ లు ఎన్ని గలవు? (1) మరియు (2) లో n పదములు గలవు. (1) మరియు (2) లలోని అనుగుణమైన పదములను కూడగా $(n+1)$ లాంటి n పదములు గలవు.

కనుక (3)ను సూక్ష్మముగా $2S_n = n(n+1)$.

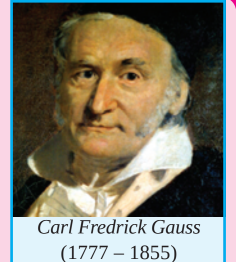
మొదటి n ధన పూర్ణాంకముల మొత్తము

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ కనుక } 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (4)$$

మొత్తము కనుగొనుటకు ఈ సూత్రము ఉపయోగపడును.

సూచన

పై పద్ధతిని మొట్టమొదటగా ఉపయోగించిన ప్రఖ్యాతి చెందిన జర్మనీ గణిత శాస్త్రవేత్త కార్ల్ ఫ్రెడరిక్‌గాస్‌ను గణితశాస్త్ర యువరాజు అందురు. 100 ధన పూర్ణాంకముల మొత్తమును కనుగొనుటకు ఈ సూత్రమును ఉపయోగించెను. 5 సం॥ల వయస్సులో అతని ఉపాధ్యాయురాలు ఈ సమస్యను ఇచ్చెను. పై తరగతులలో పై సూత్రం వలన వచ్చు ఇతర పద్ధతులను నేర్చుకొనెదరు.


Carl Fredrick Gauss
(1777 – 1855)

ఇప్పుడు పైన చూచించిన సాధారణ అంకశ్రేణి యొక్క మొదటి n పదముల మొత్తమును కనుగొనెదము ఇది వరకే చూచిన విధముగా

$$s_n = na + [d + 2d + 3d + \ldots\ldots + (n-1)d]$$
$$= na + d[1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + (n-1)]$$
$$= na + d\frac{n(n-1)}{2} \qquad \text{(4)ను ఉపయోగించి}$$
$$\therefore \quad = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \qquad (5)$$

కనుక $S_n = \frac{n}{2}[a + (a + (n-1)d)] = \frac{n}{2}$ (మొదటి పదం + చివరి పదం)
$= \frac{n}{2}(a + l)$.

మొదటి పదము a ఇచ్చినచో అంకశ్రేఢిలో మొదటి n పదముల మొత్తము S_n
(i) $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ (సామాన్య భేదము d ఇచ్చినట్లయిన)
(ii) $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ (చివరిపదము l ఇచ్చినట్లయిన)

ఉదాహరణ 2.16

$5 + 11 + 17 + \cdots + 95$ అంకశ్రేణి యొక్క మొత్తమును కనుగొనుము

సాధన ఇవ్వబడిన శ్రేణి $5 + 11 + 17 + \cdots + 95$ ఒక అంకశ్రేణి అగును.

$a = 5, \quad d = 11 - 5 = 6, \quad l = 95.$

$$n = \frac{l-a}{d} + 1$$

$$= \frac{95-5}{6} + 1 = \frac{90}{6} + 1 = 16.$$

కనుక మొత్తము $S_n = \frac{n}{2}[l + a]$

$$S_{16} = \frac{16}{2}[95 + 5] = 8(100) = 800.$$

ఉదాహరణ 2.17

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ...$ అను శ్రేణి యొక్క మొదటి $2n$ పదముల మొత్తము కనుగొనుము.

సాధన $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots 2n$ పదములు

$= 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - \cdots 2n$ పదములు

$= (1-4) + (9-16) + (25-36) + \cdots n$ పదములు

$= -3 + (-7) + (-11) + \cdots n$ పదములు

పై శ్రేణి అంకశ్రేఢిలో ఉన్నది, మొదటి పదము $a = -3$ మరియు సామాన్య భేదము $d = -4$

కనుక, కావలసిన మొత్తము $= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$= \frac{n}{2}[2(-3) + (n-1)(-4)]$

$= \frac{n}{2}[-6 - 4n + 4] = \frac{n}{2}[-4n - 2]$

$= \frac{-2n}{2}(2n + 1) = -n(2n + 1)$.

ఉదాహరణ 2.18

ఒక అంకశ్రేణిలో మొదటి 14 పదముల మొత్తము −203 మరియు ఆ తరువాతి 11 పదముల మొత్తము −572 అయిన ఆ అంకశ్రేణిని కనుగొనుము.

సాధన $S_{14} = -203$

$$\implies \frac{14}{2}[2a+13d] = -203$$

$$\implies 7[2a+13d] = -203$$

$$\implies 2a+13d = -29. \quad (1)$$

తరువాతి 11 పదముల మొత్తము $= -572$.

ఇప్పుడు, $S_{25} = S_{14} + (-572)$

అనగా, $S_{25} = -203 - 572 = -775$.

$$\implies \frac{25}{2}[2a+24d] = -775$$

$$\implies 2a+24d = -31 \times 2$$

$$\implies a+12d = -31 \quad (2)$$

(1) మరియు (2) లను సాధించగా, $a = 5$ మరియు $d = -3$.

కావలసిన అంకశ్రేణి $5 + (5-3) + (5+2(-3)) + \cdots$.

i.e. $5 + 2 - 1 - 4 - 7 - \cdots$.

ఉదాహరణ 2.19

$24 + 21 + 18 + 15 + \cdots$, అను అంకశ్రేణిలో పదములను అవిచ్ఛిన్నముగా తీసుకొనిన ఎన్ని పదముల మొత్తము −351 అగును?

సాధన ఇవ్వబడిన అంకశ్రేణిలో $a = 24$, $d = -3$.

$S_n = -351$. నుండి n ను కనుగొనవలెను

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = -351$$

$$\frac{n}{2}[2(24)+(n-1)(-3)] = -351$$

$$\implies \frac{n}{2}[48-3n+3] = -351$$

$$\implies n(51-3n) = -702$$

$$\implies n^2 - 17n - 234 = 0$$

$$(n-26)(n+9) = 0$$

$$\therefore\ n = 26 \text{ లేక } n = -9$$

పదముల సంఖ్య n, ఋణసంఖ్యగా వుండరాదు.

కనుక, పదముల మొత్తము −351 అగుటకు 26 పదములు కూడవలయును.

ఉదాహరణ 2.20

8చే భాగింపబడు 3 అంకెల సహజ సంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన

8 చే భాగింపబడు 3 అంకెల సహజ సంఖ్యలు 104, 112, 120, $\cdots$, 992.

వాటి మొత్తము $S_n = 104 + 112 + 120 + 128 + ,\cdots + 992$.

104, 112, 120, 128, ... 992 అను వరుస అంకశ్రేఢిని ఏర్పరుచును.

$$a = 104,\ \ d = 8 \ \ \text{మరియు} \ \ l = 992.$$

$$\therefore \quad n = \frac{l-a}{d} + 1 = \frac{992 - 104}{8} + 1$$

$$= \frac{888}{8} + 1 = 112.$$

$$S_{112} = \frac{n}{2}[a + l] = \frac{112}{2}[104 + 992] = 56(1096) = 61376.$$

కనుక 8 చే భాగింపబడు 3 అంకెల సహజ సంఖ్యల మొత్తము 61376.

ఉదాహరణ 2.21

ఒక బహుభుజి యొక్క అంతరకోణముల కొలతలు వరుసగా తీసుకొనిన అంకశ్రేఢిని ఏర్పరుచును. వరుసలో అతి కనిష్ట కొలత 85° మరియు గరిష్ట కొలత 215° అయిన బహుభుజిలోని భుజముల సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన

n అనునది బహుభుజిలోని భుజముల సంఖ్యను తెలుపును.

అంతరకోణముల కొలతలు అంకశ్రేఢిని ఏర్పరుచును. బహుభుజి అంతర కోణముల మొత్తము

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + l\,, \quad (\text{ఇందు } a = 85 \text{ మరియు } l = 215)$$

$$S_n = \frac{n}{2}[l + a] \qquad (1)$$

బహుభుజిలోని అంతర కోణముల మొత్తము $(n-2)\times 180^0$ అని మనకు తెలుసు

$$S_n = (n-2)\times 180$$

(1), నుండి $$\frac{n}{2}[l + a] = (n-2)\times 180$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n}{2}[215 + 85] = (n-2)\times 180$$

$$150n = 180(n-2) \quad \Longrightarrow \quad n = 12..$$

బహుభుజిలోని భుజముల సంఖ్య 12 అగును.

అభ్యాసము 2.4

1. మొత్తమును కనుగొనుము (i) మొదటి 75 ధన పూర్ణాంకములు (ii) మొదటి 125 సహజ సంఖ్యలు

2. A.P. యొక్క n వ పదము $3 + 2n$ అయిన మొదటి 30 పదముల మొత్తము కనుగొనుము.

3. క్రింది ప్రతి అంకశ్రేణి మొత్తమును కనుగొనుము.

(i) $38 + 35 + 32 + \cdots + 2$. (ii) $6 + 5\frac{1}{4} + 4\frac{1}{2} + \cdots$ 25 పదములు.

4. క్రింది అంకశ్రేణి వివరములకు S_n ను కనుగొనుము.

(i) $a = 5, \quad n = 30, \quad l = 121$

(ii) $a = 50, \quad n = 25, \quad d = -4$

5. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots$ శ్రేణి యొక్క మొదటి 40 పదముల మొత్తమును కనుగొనుము.

6. ఒక అంకశ్రేణిలో మొదటి 11 పదముల మొత్తము 44 మరియు ఆ తరువాతి 11 పదముల మొత్తము 55 అయిన అంకశ్రేణిని కనుగొనుము.

7. $60, 56, 52, 48, \cdots,$ అను అంకశ్రేఢి మొదటి పదం నుండి మొదలయిన, పదముల మొత్తము 368 అగుటకు ఎన్ని పదములు కావలయును ?

8. 9 చే భాగింపబడు 3 అంకెల సహజ సంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనుము.

9. ఒక అంకశ్రేణిలో 3వ పదము 7 మరియు ఏడవ పదము మూడవ పదమునకు 3 రెట్లుతో పాటు 2 ఎక్కువగా వుండిన, మొదటి 20 పదముల మొత్తమును కనుగొనుము.

10. 300 మరియు 500 మధ్య 11 చే భాగింపబడు అన్ని సహజ పంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనుము.

11. సాధించుము $1 + 6 + 11 + 16 + \cdots + x = 148$.

12. 100 మరియు 200 మధ్య 5 చే భాగింపబడని అన్ని సంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనుము.

13. ఒక నిర్మాణ సంస్థ వంతెన నిర్మించునపుడు ప్రతి రోజు ఆలస్యమైనందుకు గాను అపరాదమును చెల్లించెను. మొదటి రోజు అపరాదము ₹ 4000 మరియు ఆ తరువాత ప్రతిదినమునకు ఆపరాధము ₹ 1000 పెరిగెను. ఈ విధముగా ఆ సంస్థ అపరాధము ₹ 1,65,000 ను చెల్లించెను. అయిన ఆ పని ఎన్ని రోజులు ఆలస్యముతో ముగియును.

14. 8% సాధారణ వడ్డీతో ₹ 1000 లను ప్రతి సంవత్సరం పెట్టుబడిగా పెట్టెను. ప్రతి సంవత్సరం చివరన వడ్డీని లెక్కించుము. ఈ వడ్డీ అంకశ్రేఢిని ఏర్పరుచునా? అట్లయిన 30 సంII చివరన మొత్తము వడ్డీని కనుగొనుము.

15. ఒక శ్రేణి యొక్క మొదటి n పదముల మొత్తము $3n^2 - 2n$. అయిన ఆశ్రేణి అంకశ్రేణి అని చూపుము.

16. ఒక గడియారము ఒక గంటకు ఒకసారి, రెండు గంటలకు రెండు సార్లు మ్రోగిన ఆ విధంగా ఒక రోజుకు ఎన్ని మార్లు మ్రోగును?

17. మొదటి పదము a, రెండవ పదము b మరియు చివరి పదము c గా నుండు అంక శ్రేణి మొత్తము $\frac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$. అని చూపుము.

18. ఒక అంకశ్రేణిలో $(2n+1)$ పదములున్నట్లయిన భేసి పదముల మొత్తము మరియు సరి పదముల మొత్తమునకు గల నిష్పత్తి $(n+1):n$ గా ఉండునని నిరూపించుము.

19. ఒక అంకశ్రేణిలో మొదటి m మరియు n పదముల మొత్తముల నిష్పత్తి $m^2 : n^2$ గా వుండిన m వ మరియు n వ పదముల నిష్పత్తి $(2m-1):(2n-1)$ గా వుండునని నిరూపించుము.

20. ఒక తోటమాలి తన తోటలో ఒక ట్రెపీజియం ఆకారంను నిర్మించుటకు పథకం వేసెను. ట్రెపీజియం యొక్క పొడవైన భుజమును నిర్మించుటకు ఒక అడ్డువరుసకు 97 ఇటుకలు కావలయును. ఆ తరువాత ప్రతి అడ్డు వరుస చివరలలో 2 ఇటుకలు తగ్గినచో 25వ అడ్డువరసతో నిర్మాణమును నిలిపివేసిన, అతను ఎన్ని ఇటుకలను కొనవలెను?

2.5.2 గుణశ్రేణి (Geometric series)

ఒక శ్రేణిలోని పదములు గుణాత్మక వరుసను ఏర్పరిచినట్లయిన ఆ శ్రేణిని గుణశ్రేణి అందురు.

$a, ar, ar^2, \cdots, ar^{n-1}, ar^n, \cdots$ ఒక గుణాత్మక వరుస అనుకొనుము. ఇక్కడ $r \neq 0$ అనునది సామాన్య నిష్పత్తి. ఈ వరుస యొక్క మొదటి n పదముల మొత్తమును కనుగొనెదము.

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \qquad (1)$$

$r = 1$ అయిన, (1) వ సమీకరణం క్రింది విధంగా వుండును. $S_n = na$.

$r \neq 1$ అయిన, (1) ఉపయోగించి

$$rS_n = r(a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n. \quad (2)$$

(1)నుండి (2)ని తీసివేయగా, $S_n - rS_n = (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \cdots + ar^n)$

$$\Longrightarrow \qquad S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

కనుక $\qquad S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r} \qquad r \neq 1.$

ఒక గుణశ్రేఢి యొక్క మొదటి n పదముల మొత్తము

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}, & r \neq 1 \text{ అయినపుడు} \\ na, & r = 1 \text{ అయినపుడు} \end{cases}$$

ఇక్కడ a మొదటి పదము మరియు r సామాన్య నిష్పత్తి అగును.

సూచన

యదార్థముగా, $-1 < r < 1$, అయినపుడు ఈ క్రింది సూత్రం వర్తించును.

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots = \frac{a}{1 - r}.$$

అపరిమిత ధనాత్మక సంఖ్యల మొత్తము ఒక పరిమిత విలువను ఇచ్చునని గమనింపుము.

ఉదాహరణ 2.22

గుణశ్రేణి యొక్క మొదటి 25 పదముల మొత్తము కనుగొనుము

$16 - 48 + 144 - 432 + \cdots$.

సాధన $a = 16$, $r = -\dfrac{48}{16} = -3 \neq 1.$, $S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$, $r \neq 1$ నుపయోగించి

$$S_{25} = \frac{16(1 - (-3)^{25})}{1 - (-3)} = \frac{16(1 + 3^{25})}{4} = 4(1 + 3^{25}).$$

ఉదాహరణ 2.23

క్రింది గుణశ్రేణి వివరములకు S_n ను కనుగొనుము.

(i) $a = 2,\ t_6 = 486,\ n = 6$ (ii) $a = 2400,\ r = -3,\ n = 5$

సాధన

(i) $a = 2,\quad t_6 = 486,\quad n = 6$

$t_6 = 2(r)^5 = 486$

$\Longrightarrow\quad r^5 = 243 \quad \therefore \quad r = 3.$

$S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, $r \neq 1$ అయినపుడు

$S_6 = \dfrac{2(3^6 - 1)}{3 - 1} = 3^6 - 1 = 728.$

(ii) $a = 2400,\quad r = -3,\quad n = 5$

$S_n = \dfrac{a(r^5 - 1)}{r - 1}$, $r \neq 1$ అయినపుడు

$= \dfrac{2400[(-3)^5 - 1]}{(-3) - 1}$

కనుక $S_5 = \dfrac{2400}{4}(1 + 3^5) = 600(1 + 243) = 146400.$

ఉదాహరణ 2.24

$2 + 4 + 8 + \cdots$, అను గుణశ్రేణి మొదటి పదం నుండి ఏర్పడిన పదముల మొత్తము 1022 అగుటకు ఎన్ని పదములను కూడవలెనో తెల్పుము.

సాధన గుణశ్రేణి $2 + 4 + 8 + \cdots$.

మొత్తమును పొందుటకు కావలసిన పదముల సంఖ్యను n అనుకొనుము.

$a = 2, r = 2,\ S_n = 1022.$

n కనుగొనుటకు, $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, $r \neq 1$ అయినపుడు

$= (2)\left[\dfrac{2^n - 1}{2 - 1}\right] = 2(2^n - 1)$

కాని $S_n = 1022$ కనుక $2(2^n - 1) = 1022$

$\Longrightarrow\quad 2^n - 1 = 511$

$\Longrightarrow\quad 2^n = 512 = 2^9.$ కనుక, $n = 9.$

ఉదాహరణ 2.25

ఒక గుణశ్రేణిలో మొదటి పదం 375 మరియు 4వ పదము 192 అయిన శ్రేణి యొక్క సామాన్య నిష్పత్తి మరియు మొదటి 14 పదముల మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన గుణశ్రేణి యొక్క మొదటి పదము a సామాన్య నిష్పత్తి r అనుకొనుము.

$$a = 375,\quad t_4 = 192.$$

$$t_n = ar^{n-1}$$

$$\therefore \quad t_4 = 375\,r^3$$

$$\Longrightarrow \quad 375\,r^3 = 192$$

$$r^3 = \frac{192}{375} \quad \Longrightarrow \quad r^3 = \frac{64}{125}$$

$$r^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{4}{5},$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, \quad r \neq 1 \text{ అయినపుడు}$$

$$S_{14} = \frac{375\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{14} - 1\right]}{\frac{4}{5} - 1} = (-1)\times 5 \times 375\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{14} - 1\right]$$

$$= (375)(5)\left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{14}\right] = 1875\left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{14}\right].$$

గమనిక

పై ఉదాహరణలో $S_n = a\left[\frac{r^n - 1}{r - 1}\right]$, $r \neq 1$ బదులు $S_n = a\left[\frac{1 - r^n}{1 - r}\right]$, $r \neq 1$ ను ఉపయోగించవచ్చును.

ఉదాహరణ 2.26

ఒక గుణశ్రేఢి నాలుగు పదములు మరియు ధనాత్మక సామాన్య నిష్పత్తిని కలిగివున్నది. మొదటి రెండు పదముల మొత్తము 8 మరియు చివరి రెండు పదముల మొత్తము 72 అయిన శ్రేణిని కనుగొనుము.

సాధన గుణశ్రేణిలోని నాలుగు పదముల మొత్తము $a + ar + ar^2 + ar^3$, $r > 0$ అనుకొనుము.

$$a + ar = 8 \quad \text{మరియు} \quad ar^2 + ar^3 = 72$$

$$ar^2 + ar^3 = r^2(a + ar) = 72$$

$$\Longrightarrow \quad r^2(8) = 72 \quad \therefore \quad r = \pm 3$$

$r > 0$, అగుటచే $r = 3$ అగును.

$$a + ar = 8 \quad \Longrightarrow \quad a = 2$$

కావున, గుణశ్రేణి $2 + 6 + 18 + 54$.

ఉదాహరణ 2.27

$6 + 66 + 666 + \cdots$ అను శ్రేణి యొక్క n పదముల మొత్తమును కనుగొనుము.

ఇవ్వబడిన శ్రేణి గుణశ్రేణి కాదనుటను గమనింపుము.

సాధన $S_n = 6 + 66 + 666 + \cdots$ n పదముల వరకు

$$S_n = 6(1 + 11 + 111 + \cdots \; n \text{ పదముల వరకు}$$

$$= \frac{6}{9}(9 + 99 + 999 + \cdots \; n \text{ పదములు}) \quad (9 \text{ చే గుణించి, భాగించగా})$$

$$= \frac{2}{3}[(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \cdots \; n \text{ పదములు})$$

$$= \frac{2}{3}[(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots\ldots n \text{ పదములు}) - n]$$

కనుక $$S_n = \frac{2}{3}\left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n\right].$$

ఉదాహరణ 2.28

ఒక నగరంలోని 25 వీధులలో మొక్కలను నాటుటకు ఒక సంస్థ పథకం వేసెను. మొదటి వీధిలో ఒక మొక్క, రెండవ వీధిలో రెండు, మూడవ వీధిలో నాలుగు, నాల్గవ వీధిలో ఎనిమిది అని నాటినచో ఆ పనిని ముగించుటకు ఎన్ని మొక్కలు కావలెను.

సాధన ఒక నగరంలో 25 వీధులలో నాటు మొక్కల సంఖ్య గుణశ్రేఢిని ఏర్పరుచును. కావలసిన మొక్కల సంఖ్యల మొత్తమును S_n అనుకొనుము.

$$S_n = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots \quad 25 \text{ పదములు})$$

$$a = 1, \quad r = 2, \quad n = 25$$

$$S_n = a\left[\frac{r^n - 1}{r - 1}\right]$$

$$S_{25} = (1)\,\frac{[2^{25} - 1]}{2 - 1}$$

$$= 2^{25} - 1$$

కనుక కావలసిన మొక్కల సంఖ్య $2^{25} - 1$.

అభ్యాసము 2.5

1. $\frac{5}{2} + \frac{5}{6} + \frac{5}{18} + \cdots$ గుణశ్రేఢి యొక్క మొదటి 20 పదముల మొత్తమును కనుగొనుము.

2. $\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots$ గుణశ్రేఢి యొక్క మొదటి 27 పదముల మొత్తమును కనుగొనుము.

3. క్రింది గుణశ్రేఢి వివరముల నుండి S_n ను కనుగొనుము.

   (i) $a = 3,\ t_8 = 384,\ n = 8$. (ii) $a = 5,\ r = 3,\ n = 12$

4. క్రింది పరిమిత శ్రేణి యొక్క మొత్తమును కనుగొనుము.

   (i) $1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots + (0.1)^9$ (ii) 1+ 11+ 111+........ 20 పదముల వరకు

5. క్రింది శ్రేణిలో మొదటి పదము నుండి ఎన్ని వరస పదములుంటే

   (i) $3 + 9 + 27 + \cdots$ మొత్తం 1092 అగును (ii) $2 + 6 + 18 + \cdots$ మొత్తం 728 అగును

6. ఒక గుణశ్రేఢి యొక్క రెండవ పదము 3 మరియు సామాన్య నిష్పత్తి $\frac{4}{5}$. అయిన మొదటి 23 వరసపదముల మొత్తంను కనుగొనుము.

7. ఒక గుణశ్రేఢి నాలుగు పదములను మరియు ధనాత్మక సామాన్య నిష్పత్తిని కల్గియున్నది. మొదటి రెండు పదముల మొత్తము 9 మరియు చివరి రెండు పదముల మొత్తము 36 అయిన శ్రేణిని కనుగొనుము.

8. క్రింది శ్రేణుల మొదటి n పదముల మొత్తమును కనుగొనుము.

   (i) $7 + 77 + 777 + \cdots$. (ii) $0.4 + 0.94 + 0.994 + \cdots$.

9. మొదటివారంలో 5 మంది అంటువ్యాధి వలన రోగమునకు గుర్రైరి. రెండవ వారం చివరికి ప్రతి ఒక్కరు మరొక నలుగురిని రోగమునకు గురిచేసినచో 15వ వారం చివరన ఎంత మంది ఈ అంటువ్యాధి వలన బాధింపబడుదురో కనుగొనుము.

10. ఒక తోటమాలి ఒక బాలుని సత్ప్రవర్తనకు మెచ్చి కొన్ని మామిడి పండ్లను ఇచ్చుటకు నిర్ణయించెను. అతనికి రెండు అవకాశములను కల్పించెను. అవి ఏమనగా 1000 మామిడి పండ్లను ఒకే సారి తీసుకొనుట లేక మొదటి రోజున ఒకటి , రెండవరోజున రెండు, మూడవరోజున నాలుగు నాల్గవ రోజున 8 మామిడి పండ్లు అని 10 రోజులకు తీసుకొనినచో , ఆ బాలుడు ఏ అవకాశంలో ఎక్కువ మామిడి పండ్లును పొందగలడు ?

11. ఒక గుణశ్రేణి సరిసంఖ్య పదములను కలిగియున్నది. బేసి పదముల మొత్తము అన్ని పదముల మొత్తమునకు మూడు రెట్లు అయిన సామాన్య నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

12. ఒక గుణశ్రేణిలో మొదటి $n, 2n, 3n$ పదముల మొత్తం వరుసగా S_1, S_2 మరియు S_3 అయిన $S_1(S_3 - S_2) = (S_2 - S_1)^2$ అని చూపుము

సూచన

$a = 1$ మరియు సామాన్య నిష్పత్తి $x \neq 1$ అయిన, గుణశ్రేణిలోని మొదటి n పదముల మొత్తము $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$ గా ఇవ్వబడినది.

పైన ఎడమవైపు గల సమీకరణం x లో $n - 1$ అంతస్తు గల ఒక బహుపది అని గమనింపుము. కొన్ని శ్రేణుల మొత్తము కనుగొనుటకు ఈ సూత్రం ఉపయోగపడుతుంది.

2.5.3 ప్రత్యేక శ్రేణులు (Special series): $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$ మరియు $\sum_{k=1}^{n} k^3$

Σ అను సంకేతమును మొత్తము కనుగొనుటకు ఇదివరకే ఉపయోగించితిమి. సిగ్మా సంకేతంతో సూచించు పరిమిత శ్రేణులకు కొన్ని ఉదాహరణలు

వ.సంఖ్య	సంకేతములు	విస్తరణ
1.	$\sum_{k=1}^{n} k$ or $\sum_{j=1}^{n} j$	$1 + 2 + 3 + \cdots + n$
2.	$\sum_{n=2}^{6} (n-1)$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$
3.	$\sum_{d=0}^{5} (d+5)$	$5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$
4.	$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^2$
5.	$\sum_{k=1}^{10} 3 = 3\sum_{k=1}^{10} 1$	3[1 + 1+ ...... 10 పదములు] = 30

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ అని ఉత్పాదించాము. దీనిని $a = 1$, $d = 1$ మరియు $l = n$ గా తీసుకొని $S_n = \frac{n}{2}(a+l) = \frac{n}{2}(1+n)$ గా అంకశ్రేఢిని ఉపయోగించి ఏర్పరచవచ్చును.

సిగ్మా సంకేతం ఉపయోగించి దీనిని ఈ విధంగా వ్రాయవచ్చును. $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

క్రింది వాటికి సూత్రములను ఉత్పాదించెదము.

$$\text{(i)} \ \sum_{k=1}^{n}(2k-1), \qquad \text{(ii)} \ \sum_{k=1}^{n} k^2 \qquad \text{(iii)} \ \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

నిరూపణ : (i) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$ విలువను కనుకొనెదము.

$a = 1,\ d = 2,\ l = (2n-1)$ గా గల n పదములు గల అంకశ్రేఢి.

$$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) = n^2 \qquad \left(S_n = \frac{n}{2}(a+l)\right)$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \qquad (1)$$

సూచన

1. సూత్రం (1) ని క్రింది పద్ధతిలోను పొందవచ్చు.

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n} 2k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - n = \frac{2(n)(n+1)}{2} - n = n^2.$$

2. (1) నుండి $1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\dfrac{l+1}{2}\right)^2$, ఎందుకనగా $l = 2n - 1 \Longrightarrow n = \dfrac{l+1}{2}$.

(ii) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ అని మనకు తెలుసు.

$\therefore \quad k^3 - (k-1)^3 = k^2 + k(k-1) + (k-1)^2$ ($a = k$ మరియు $b = k - 1$గా తీసుకొనిన)

$$\Longrightarrow \quad k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$$

$k = 1$, అయిన $\quad 1^3 - 0^3 = 3(1)^2 - 3(1) + 1$

$k = 2$, అయిన $\quad 2^3 - 1^3 = 3(2)^2 - 3(2) + 1$

$k = 3$, అయిన $\quad 3^3 - 2^3 = 3(3)^2 - 3(3) + 1$. ఈ విధంగా కొనసాగించినచో

$k = n$, అయిన $\quad n^3 - (n-1)^3 = 3(n)^2 - 3(n) + 1$.

$k = 1, 2, \cdots, n$ ల ప్రకారం పై సమీకరణంను నిలువుగా సంకలనం చేయగా,

$$n^3 = 3[1^2 + 2^2 + \cdots + n^2] - 3[1 + 2 + \cdots + n] + n$$

$$3[1^2 + 2^2 + \cdots + n^2] = n^3 + 3[1 + 2 + \cdots + n] - n$$

$$3\left[\sum_{k=1}^{n} k^2\right] = n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n$$

కావున, $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (2)$$

(iii) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots n^3$

క్రింది నమూనాను పరిశీలించుము

$$1^3 = 1 = (1)^2$$
$$1^3 + 2^3 = 9 = (1+2)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = (1+2+3)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = (1+2+3+4)^2.$$

ఈ నమూనాను n పదములకు విస్తరిస్తే,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = [1+2+3+\cdots+n]^2$$
$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \quad (3)$$

(i) మొదటి n సహజ సంఖ్యల మొత్తము $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

(ii) మొదటి n భేసి సహజ సంఖ్యల మొత్తము $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.

(iii) మొదటి n భేసి సహజ సంఖ్యల మొత్తము (చివరిపదము l ఇవ్వబడిన)

$$1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2.$$

(iv) మొదటి n సహజ సంఖ్యల వర్గముల మొత్తము $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(v) మొదటి n సహజ సంఖ్యల ఘనముల మొత్తము $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

ఉదాహరణ 2.29

క్రింది శ్రేణుల మొత్తమును కనుగొనుము

(i) $26 + 27 + 28 + \cdots + 60$ (ii) $1 + 3 + 5 + \ldots\ldots$ 25 పదములు (iii) $31 + 33 + \cdots + 53$.

సాధన

(i)
$$26 + 27 + 28 + \cdots + 60 = (1+2+3+\cdots+60) - (1+2+3+\cdots+25)$$
$$= \sum_{1}^{60} n - \sum_{1}^{25} n$$
$$= \frac{60(60+1)}{2} - \frac{25(25+1)}{2}$$
$$= (30 \times 61) - (25 \times 13) = 1830 - 325 = 1505.$$

(ii) ఇక్కడ $n = 25$

$\therefore\ 1 + 3 + 5 + \cdots 25$ పదముల వరకు $= 25^2$ $\quad\left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2\right)$

$= 625.$

(iii) $31 + 33 + \cdots + 53$

$$= (1 + 3 + 5 + \cdots + 53) - (1 + 3 + 5 + \cdots + 29)$$

$$= \left(\frac{53+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{29+1}{2}\right)^2 \qquad \left(1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2\right)$$

$$= 27^2 - 15^2 = 504.$$

ఉదాహరణ 2.30

క్రింది శ్రేణిల మొత్తమును కనుగొనుము

(i) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2$ (ii) $12^2 + 13^2 + 14^2 + \cdots + 35^2$

(iii) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 51^2$.

సాధన

(i) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2 = \sum_{1}^{25} n^2$

$$= \frac{25(25+1)(50+1)}{6} \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \frac{(25)(26)(51)}{6}$$

$\therefore\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2 = 5525.$

(ii) $12^2 + 13^2 + 14^2 + \cdots + 35^2$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 35^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 11^2)$$

$$= \sum_{1}^{35} n^2 - \sum_{1}^{11} n^2$$

$$= \frac{35(35+1)(70+1)}{6} - \frac{11(12)(23)}{6}$$

$$= \frac{(35)(36)(71)}{6} - \frac{(11)(12)(23)}{6}$$

$$= 14910 - 506 = 14404.$$

(iii) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 51^2$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 51^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots 50^2)$$

$$= \sum_{1}^{51} n^2 - 2^2[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2]$$

$$= \sum_{1}^{51} n^2 - 4\sum_{1}^{25} n^2$$

$$= \frac{51(51+1)(102+1)}{6} - 4 \times \frac{25(25+1)(50+1)}{6}$$

$$= \frac{(51)(52)(103)}{6} - 4 \times \frac{25(26)(51)}{6}$$

$$= 45526 - 22100 = 23426.$$

ఉదాహరణ 2.31

క్రింది శ్రేణుల మొత్తమును కనుగొనుము

(i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 20^3$ (ii) $11^3 + 12^3 + 13^3 + \cdots + 28^3$

సాధన

(i) $$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots 20^3 = \sum_{1}^{20} n^3$$

$$= \left(\frac{20(20+1)}{2}\right)^2 \qquad \because \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

$$= \left(\frac{20 \times 21}{2}\right)^2 = (210)^2 = 44100.$$

(ii) $$11^3 + 12^3 + \cdots + 28^3$$

$$= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 28^3) - (1^3 + 2^3 + \cdots + 10^3)$$

$$= \sum_{1}^{28} n^3 - \sum_{1}^{10} n^3$$

$$= \left[\frac{28(28+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{10(10+1)}{2}\right]^2$$

$$= 406^2 - 55^2 = (406+55)(406-55)$$

$$= (461)(351) = 161811.$$

ఉదాహరణ 2.32

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 4356$ అయిన k విలువను కనుగొనుము

సాధన k అనునది ధన పూర్ణాంకము అని గమనింపుము.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 4356$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 = 4356 = 6 \times 6 \times 11 \times 11$$

వర్గమూలము కనుగొనగా $\frac{k(k+1)}{2} = 66$

$$\Longrightarrow k^2 + k - 132 = 0 \Longrightarrow (k+12)(k-11) = 0$$

$k = 11$, ఎందుకనగా k ధనాత్మకం.

ఉదాహరణ 2.33

(i) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = 120$ అయిన $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots n^3$ విలువ కనుగొనుము

(ii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = 36100$ అయిన $1 + 2 + 3 + \cdots + n$.విలువ కనుగొనుము

సాధన

(i) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = 120$ i.e. $\frac{n(n+1)}{2} = 120$

$$\therefore \quad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 120^2 = 14400$$

(ii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = 36100$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 36100 = 19 \times 19 \times 10 \times 10$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n(n+1)}{2} = 190$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = 190.$$

ఉదాహరణ 2.34

11 సెం.మీ, 12 సెం.మీ, ... 24 సెం.మీ భుజములను కలిగిన 14 చతురస్రముల మొత్తము వైశాల్యములను కనుగొనుము.

సాధన చతురస్ర వైశాల్యముల శ్రేణి $11^2 + 12^2 + \cdots + 24^2$

14 చతురస్రముల మొత్తము వైశాల్యము $= 11^2 + 12^2 + 13^2 + \cdots + 24^2$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + 24^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots + 10^2)$$

$$= \sum_1^{24} n^2 - \sum_1^{10} n^2$$

$$= \frac{24(24+1)(48+1)}{6} - \frac{10(10+1)(20+1)}{6}$$

$$= \frac{(24)(25)(49)}{6} - \frac{(10)(11)(21)}{6}$$

$$= 4900 - 385$$

$= 4515$ చ.సెం.మీ

అభ్యాసము 2.6

1. క్రింది శ్రేణుల మొత్తమును కనుగొనుము

(i) $1 + 2 + 3 + \cdots + 45$ (ii) $16^2 + 17^2 + 18^2 + \cdots + 25^2$

(iii) $2 + 4 + 6 + \cdots + 100$ (iv) $7 + 14 + 21 \cdots + 490$

(v) $5^2 + 7^2 + 9^2 + \cdots + 39^2$ (vi) $16^3 + 17^3 + \cdots + 35^3$

2. k విలువ కనుగొనుము

(i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 6084$ (ii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 2025$

3. $1 + 2 + 3 + \cdots + p = 171$ అయిన $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + p^3$ విలువ కనుగొనుము

4. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 8281$ అయిన $1 + 2 + 3 + \cdots + k$ విలువ కనుగొనుము

5. చతురస్ర భుజములు వరుసగా 12 సెం॥మీ, 13 సెం॥మీ .... 23 సెం॥మీ అయిన 12 చతురస్రముల మొత్తము వైశాల్యమును కనుగొనుము.

6. ఘనము యొక్క భుజములు వరుసగా 16 సెం॥మీ, 17 సెం॥మీ, 18 సెం॥మీ .... 30 సెం॥మీ గా వుండిన 15 ఘనముల మొత్తము ఘణపరిమాణమును కనుగొనుము.

అభ్యాసము 2.7

సరైన జవాబులను ఎన్నుకొనుము :

1. అసత్య ప్రవచనమును గుర్తించుము ?

(A) ఒక వరుస అనునది $\mathbb{N}$ పై నిర్వచించిన ఒక వాస్తవ ప్రమేయం.

(B) ప్రతి ప్రమేయం వరుసను సూచించును

(C) ఒక వరుస అపరిమిత సంఖ్యలో పదములను కలిగివుండవచ్చును.

(D) ఒక వరుసలో పరిమిత సంఖ్యలో పదములుండవచ్చును.

2. $1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots$ అను వరుసలో 8వ పదము

(A) 25 (B) 24 (C) 23 (D) 21

3. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \cdots$ అను వరుసలో తరువాతి పదం

(A) $\frac{1}{24}$ (B) $\frac{1}{22}$ (C) $\frac{1}{30}$ (D) $\frac{1}{18}$

4. a, b, c, l, m లు అంకశ్రేఢిలో వుండిన $a - 4b + 6c - 4l + m$ విలువ

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

5. a, b, c లు అంకశ్రేఢిలో వుండిన $\frac{a-b}{b-c}$ కి సమానమైనది

(A) $\frac{a}{b}$ (B) $\frac{b}{c}$ (C) $\frac{a}{c}$ (D) 1

6. ఒక వరుస యొక్క n వ పదము $100\,n + 10$ అయిన, ఆ వరుస

(A) అంకశ్రేఢి (B) గుణశ్రేఢి

(C) స్థిర వరుస (D) అంకశ్రేఢి గాను లేక గుణశ్రేఢి గాను వుండదు

7. $a_1, a_2, a_3, \cdots$ అంకశ్రేఢిలో వుండిన $\frac{a_4}{a_7} = \frac{3}{2}$ అయిన, అంకశ్రేఢిలో 13వ పదము.

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 0 (C) $12a_1$ (D) $14a_1$

8. $a_1, a_2, a_3, \cdots$ అను వరుస అంకశ్రేఢి అయిన $a_5, a_{10}, a_{15}, \cdots$ అనువరుస

(A) గుణశ్రేఢి (B) అంకశ్రేఢి

(C) అంకశ్రేఢి లేక గుణశ్రేఢి కాదు (D) స్థిరవరుస

9. $k+2, 4k-6, 3k-2$ అనునవి అంకశ్రేఢిలోని మూడు వరుస పదములు అయిన k విలువ

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

10. $a, b, c, l, m. n$ అంకశ్రేఢిలో వుంటే $3a+7, 3b+7, 3c+7, 3l+7, 3m+7, 3n+7$ అను వరుస

(A) గుణశ్రేఢి (B) అంకశ్రేఢి (C) స్థిర వరుస (D) అంకశ్రేఢి మరియు గుణశ్రేఢి కాదు

11. గుణశ్రేఢిలోని మూడవ పదము 2 అయిన మొదటి 5 పదముల లబ్ధము

(A) 5^2 (B) 2^5 (C) 10 (D) 15

12. a, b, c లు గుణశ్రేఢిలో వుంటే $\frac{a-b}{b-c}$ కు సమానమైనది

(A) $\frac{a}{b}$ (B) $\frac{b}{a}$ (C) $\frac{b}{c}$ (D) $\frac{c}{b}$

13. $x,\ 2x+2,\ 3x+3$ గుణశ్రేఢిలో వుంటే, $5x,\ 10x+10,\ 15x+15$ అను వరుస

(A) A.P. (B) G.P. (C) స్థిర వరుస (D) A.P. మరియు G.P. కాదు

14. $-3, -3, -3, \cdots$ వరుస

(A) A.P. మాత్రం (B) G.P. మాత్రం

(C) A.P. మరియు G.P. కాదు (D) A.P. మరియు G.P.

15. ఒక గుణశ్రేఢి యొక్క మొదటి నాలుగు వరుస పదముల లబ్ధం 256 మరియు సామాన్య నిష్పత్తి 4 మరియు మొదటి పదము ధనాత్మకము అయిన దాని 3వ పదము

(A) 8 (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{32}$ (D) 16

16. గుణశ్రేఢిలో $t_2 = \frac{3}{5},\ t_3 = \frac{1}{5}$ అయిన సామాన్య నిష్పత్తి

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) 1 (D) 5

17. $x \neq 0$ అయిన $1 + \sec x + \sec^2 x + \sec^3 x + \sec^4 x + \sec^5 x =$

(A) $(1+\sec x)(\sec^2 x + \sec^3 x + \sec^4 x)$ (B) $(1+\sec x)(1+\sec^2 x + \sec^4 x)$

(C) $(1-\sec x)(\sec x + \sec^3 x + \sec^5 x)$ (D) $(1+\sec x)(1+\sec^3 x + \sec^4 x)$

18. అంకశ్రేఢిలోని n వ పదము $t_n = 3 - 5n$ అయిన, మొదటి n పదముల మొత్తము

(A) $\frac{n}{2}[1-5n]$ (B) $n(1-5n)$ (C) $\frac{n}{2}(1+5n)$ (D) $\frac{n}{2}(1+n)$

19. $a^{m-n},\ a^m,\ a^{m+n}$ అను గుణశ్రేఢి సామాన్య నిష్పత్తి

(A) a^m (B) a^{-m} (C) a^n (D) a^{-n}

20. $1+2+3+\ldots+n = k$ అయిన $1^3+2^3+\cdots+n^3$ కు సమానమైనది

(A) k^2 (B) k^3 (C) $\frac{k(k+1)}{2}$ (D) $(k+1)^3$

ముఖ్యాంశములు

- ఒక ప్రత్యేక క్రమంలో నున్న వాస్తవ సంఖ్యల జాబితా లేక అమరికను వాస్తవ సంఖ్యల వరుస అందురు.
- ఒక వరుస $F_1 = F_2 = 1$ మరియు $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n = 3, 4, \cdots$ గా ఇచ్చిన దానిని ఫిభోనేసి వరుస అందురు. అవి 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 ....
- $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ అను వరుసను అంకగణిత వరుస అందురు. ఇందులో $a_{n+1} = a_n + d$, $n \in \mathbb{N}$ ఇక్కడ d ఒక స్థిరసంఖ్య a_1 ను మొదటి పదము అని మరియు స్థిరసంఖ్య d ను సామాన్య బేధము అందురు A.P లోని సాధారణ పదము $t_n = a + (n-1)d \quad \forall \; n \in \mathbb{N}$.
- ఒక వరుస $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ ను గుణాత్మక వరుస అందురు. ఇందులో $a_{n+1} = a_n r$, $r \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ ఇక్కడ r స్థిరాంకం. a_1 ను మొదటి పదము, r ను సామాన్య నిష్పత్తి అందురు. G.P. సాధారణ పదం $t_n = ar^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$
- ఒక వరుసలోని పదములను కూడికగుర్తు (+) తో తెలియజేయుటను శ్రేణి అందురు. పరిమిత సంఖ్యలో గల పదముల మొత్తమును పరిమిత శ్రేణి అందురు. అపరిమిత సంఖ్యలో గల పదముల మొత్తమును అపరిమిత శ్రేణి అందురు.
- మొదటి పదము a మరియు సామాన్య భేదము d గా గల అంకశ్రేఢిలోని మొదటి n పదముల మొత్తము S_n గా తీసుకొనిన $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a + l)$, ఇక్కడ l చివరి పదము
- గుణశ్రేఢిలో మొదటి n పదముల మొత్తము

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}, & r \neq 1 \text{ అయినపుడు} \\ na, & r = 1 \text{ అయినపుడు} \end{cases}$$

  ఇక్కడ మొదటి పదము a మరియు సామాన్య నిష్పత్తి r
- మొదటి n సహజ సంఖ్యల మొత్తము $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- మొదటి n భేసి సహజ సంఖ్యల మొత్తము $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$
- మొదటి n భేసి సహజ సంఖ్యల మొత్తము (చివరిపదము l ఇవ్వబడిన)

$$1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2.$$
- మొదటి n సహజ సంఖ్యల వర్గముల మొత్తము $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- మొదటి n సహజ సంఖ్యల ఘనముల మొత్తము $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

మీకు తెలుసా?

మెరీన్ మెర్సెనే (*Marin Mersenne*) అనునతని పేరుతో పిలవబడు మెర్సెన్ సంఖ్య అనునది $M = 2^P - 1$ రూపంలో అమరిన ఒక ధనపూర్ణాంకమగును. ఇందులో P అనునది ఒక ధనపూర్ణాంకము. M ఒక ప్రధానసంఖ్య అయిన దానిని మెర్సెన్ ప్రధాన సంఖ్య అని పిలవబడుచున్నది. $2^P - 1$ ఒక ప్రధానసంఖ్య అయిన P కూడ ప్రధానసంఖ్య అగును. ఆసక్తికరంగా, ఇప్పటివరకు తెలిసిన సంఖ్యలలో అతి పెద్ద ప్రధానసంఖ్య $2^{43,112,609} - 1$ అనునది ఒక మెర్సెన్ ప్రధానసంఖ్య అగును.

3 బీజగణితము

"The human mind has never invented a labour-saving machine equal to algebra" - *Author unknown*

- పరిచయం
- బహుపదసమాసములు
- సంయోజిత భాగహారము
- గ.సా.భా మరియు క.సా.గు
- అకరణీయ సమాసములు
- వర్గమూలము
- వర్గ సమీకరణములు



(అల్ – క్వారిజ్మీ)

(780-850)

అరబు

గణిత శాస్త్రము మరియు భూగోళ శాస్త్రము నందు అల్ క్వారిజ్మీ యొక్క రచనలు బీజగణితము మరియు త్రికోణమితిలోని నూతన మూల సిద్ధాంతములను నిరూపించుటకు సహాయపడెను. ఏకఘాత మరియు ద్విఘాత సమీకరణముల క్రమబద్ధమైన సాధనలను మొదటి సారిగా ప్రకటించెను.

ఇతనిని బీజగణిత స్థాపకుడని గుర్తించిరి. భారత గణిత శాస్త్రములో హిందూ–అరబిక్ సంఖ్యా వ్యవస్థ అభివృద్ధి ఆధారంగా అరబిక్ సంఖ్యలను పశ్చిమ దేశాలకు పరిచయము చేయుటకు అంకగణితమునందు కృషిచేసెను.

3.1 పరిచయం

గణితశాస్త్రము యొక్క ముఖ్యమైన మరియు ప్రాచీనమైనశాఖ బీజగణితము. ఇది బీజీయ సమీకరణములను సాధించుట గూర్చి తెలుపును. మూడవ శతాబ్దమున, గ్రీకు గణితశాస్త్రజ్ఞుడైన డైయోఫాంటస్ (Diophantus) రచించిన "అరిథ్‌మెటిక్" (Arithmetic) అను గ్రంథమునందు అనేక ప్రయోగాత్మక సమస్యలను పొందుపరచెను. ఆరవ మరియు ఏడవ శతాబ్ధములో భారతదేశ గణితశాస్త్రజ్ఞులైన ఆర్యభట్ట మరియు బ్రహ్మగుప్తుడు ఏకఘాత సమీకరణములు మరియు వర్గ సమీకరణములను సాధించు సామాన్య పద్ధతుల అభివృద్ధికి కృషిచేసిరి.

తొమ్మిదవ శతాబ్ధమునందు అరబ్బు గణితశాస్త్రజ్ఞులచే బీజగణితం ఎక్కువ అభివృద్ధిగాంచెను. అల్–క్వారిజ్మి (Al-Khwarizmi) చే రచింపబడిన " ముగింపు మరియు తుల్య గణన సంహిత" (Compendium on calculation by completion and balancing) అను గ్రంథము ఒక ముఖ్యమైన మైలురాయి వంటిది. అందులో అతనుపయోగించిన 'అల్‌జబ్ర' అను పదమును లాటిన్ భాషలో 'అల్‌జీబ్రా' గా చెప్పబడెను. ఈ పదమునకు "పోటీ లేక పూర్వస్థితికి తీసుకొనివచ్చుట" అని అనువాదమగును. 13 వ శతాబ్ధమున లియోనార్డొ ఫిబోనేస్సి (Leonardo Fibonacci) యొక్క బీజగణిత గ్రంథములు ముఖ్యమైనవి ఇవి అందరిని ప్రభావితము చేయగలవిగా నుండెను. ఇటలీ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు లూకాపేసియోలి (Luca Pacioli, 1445-1517) మరియు ఆంగ్ల గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు రాబర్ట్ రికార్డె (Robert Recorde, 1510-1558) బీజగణితంపై మరింత ఎక్కువగా కృషిచేసిరి. తర్వాతి శతాబ్దంలో బీజగణితము ఎక్కువ అభివృద్ధి చెందెను. 19 వ శతాబ్దంలో ఈ ప్రయత్నమునకు బ్రిటీష్ గణిత శాస్త్రజ్ఞులు నాయకత్వం వహించిరి. బ్రిటన్ దేశస్థుడైన పీకాక్ (Peacock, Britain, 1791-1858) అంకగణితము మరియు బీజగణితములో సత్యప్రవచనముల స్థాపకుడు. ఈ కారణముగా ఇతనిని యూక్లిడ్ ఆఫ్ అల్‌జీబ్రా (Euclid of Algebra) అని పిలువబడెను. డీమార్గన్ (DeMorgan, Britain, 1806-1871), పీకాక్ పరిక్రియలను గమనించి, భావగుర్తులను నిర్వచించి, విస్తరింపజేసెను.

ఈ అధ్యాయములో, రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థ మరియు వర్గ సమీకరణములను సాధించుటయందు మెళుకువలు నేర్చుకొనెదము.

3.2 తెలియని రెండు రాశుల రేఖీయ (ఏకఘాత) సమీకరణముల వ్యవస్థ (System of linear equations in two unknowns)

IX తరగతిలో, ఒక తెలియని రాశి x ను కలిగిన ఏకఘాత సమీకరణము $ax + b = 0, a \neq 0$ ను గూర్చి చదివియున్నాము.

x మరియు y అను తెలియని రెండురాశులు కలిగిన రేఖీయ సమీకరణము $ax + by = c$, ఇక్కడ a మరియు b లలో కనీసము ఒకటి శూన్యేతరము అగును. $x = x_0,\ y = y_0$ విలువలు రేఖీయ సమీకరణమును తృప్తిపరచినట్లయిన, (x_0, y_0) అను క్రమయుగ్మము ఆ సమీకరణము యొక్క సాధన అందురు.

జ్యామితీయముగా, $ax + by = c$ అను రేఖీయ సమీకరణ రేఖాచిత్రము తలములో అమరియుండు ఒక సరళరేఖయగును. రేఖపై నుండు ప్రతి బిందువు (x, y) అనునది $ax + by = c$ సమీకరణము యొక్క సాధన అగును. విపర్యముగా, సమీకరణము యొక్క ప్రతిసాధన (x, y) రేఖపై అమరియుండు ఒక బిందువగును. కనుక, $ax + by = c$ అను సమీకరణము అనంతమైన సాధనలను కలిగియుండును.

ఒకటిగా చేర్చబడిన x మరియు y అను రెండు తెలియని రాశులు కలిగియున్న పరిమిత సంఖ్యారేఖీయ సమీకరణముల సమితిని x మరియు y లో గల రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థ అందురు. ఈ సమీకరణముల వ్యవస్థను సమఘాత సమీకరణములు అనియు అందురు.

నిర్వచనము

$x = x_0,\ y = y_0$ విలువలు వ్యవస్థలోని అన్ని సమీకరణములను తృప్తి పరచినట్లయిన, (x_0, y_0) అను క్రమయుగ్మమును రెండు చలరాశుల రేఖీయ సమీకరణముల సాధన అందురు.

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$ అను రెండు చలరాశుల రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థలో

(i) x మరియు y విలువలలో కనీసం ఒక యుగ్మము పై రెండు సమీకరణములను తృప్తి పరచినట్లయిన అవి అవిరోధమగును (Consistent). మరియు

(ii) పై రెండు సమీకరణములను తృప్తిపరచుటకు x మరియు y విలువలు లేనిచో అవి విరోధమగును (Inconsistent).

ఈ అధ్యాయములో రెండు చలరాశులతో ఒక జత రేఖీయ సమీకరణములను గూర్చి చర్చించెదము.

సూచన

(i) $ax + by = c$ అను సమీకరణ రూపమును రేఖీయ సమీకరణము అందురు. ఎందుకనగా, సమీకరణములోని చలరాశులన్ని రేఖీయముగాను మరియు సమీకరణములో చలరాశులు లబ్ధము లేనివి.

(ii) రెండు కంటే ఎక్కువ చలరాశులు కలిగిన సమఘాత సమీకరణములు ఉండుటకు వీలగును. వీటిని పై తరగతులలో నేర్చుకొనవచ్చును.

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad (1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad (2)$$ అనునవి

x మరియు y చలరాశులు కలిగిన రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థగా యుండు ప్రతిసమీకరణములో కనీసం ఒక చలరాశి తప్పక ఉండునట్లు, a_1, b_1, a_2 మరియు b_2 స్థిరాంకములలో ఏవేని ఒకటి శూన్యముగా ఉండవచ్చు. లేక $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$. గా ఉండవచ్చును.

జ్యామితీయముగా క్రింది పరిస్థితులు సంభవించును. (1) మరియు (2) లలో తెలుపు రెండు సరళరేఖలు అవి

(i) ఖచ్చితముగా ఒక బిందువు వద్ద ఖండించును

(ii) ఏ బిందువు వద్ద ఖండించుకొనదు

(iii) ఏకీభవించుకొనును.

(i) సరియైనచో, ఆ ఖండన బిందువు వ్యవస్థ యొక్క ఏకైక సాధన అగును. (ii) సరియైనచో, ఆ వ్యవస్థకు సాధనలుండవు. (iii) సరియైనచో, రేఖపై గల ప్రతి బిందువునకు అనురూప సాధనలు ఈ వ్యవస్థకు కలదు. కనుక ఈ సందర్భమున, ఈ వ్యవస్థ అనంత సాధనలు కలిగియుండును.

ప్రస్తుతము, క్రింది బీజీయ పద్ధతులను ఉపయోగించి తెలియని రెండు రాశుల రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థలను సాధించెదము. (i) తొలగించు పద్ధతి (ii) అడ్డు గుణకార పద్ధతి.

3.2.1 తొలగించు పద్ధతి (Elimination method)

ఈ పద్ధతిలో, వ్యవస్థ యొక్క సమీకరణములు కలుపుట ద్వారా ఒక పద్ధతి ప్రకారము తెలియని ఒక రాశిని తొలగించెదము. తెలియని ఒక రాశిని తొలగించుటకు క్రింది మార్గమున పొందవచ్చును.

(i) సమీకరణములోని పదములను సంఖ్యలచే గుణించడం లేక భాగించడం ద్వారా తెలియని వాటిని తొలగించుటకు వాటి గుణకములను సంఖ్యాత్మకంగా సమానము చేసుకొనవలయును.

(ii) తరువాత, ఫలిత గుణకములకు వ్యతిరేక గుర్తులున్నట్లయిన సంకలనము (కూడుట) ద్వారా మరియు ఒకే గుర్తులున్నట్లయిన వ్యవకలనము (తీసివేయుట) ద్వారా తొలగించుము.

ఉదాహరణ 3.1

సాధించుము $3x - 5y = -16$, $2x + 5y = 31$

సాధన ఇవ్వబడిన సమీకరణములు

$$3x - 5y = -16 \quad (1)$$

$$2x + 5y = 31 \quad (2)$$

రెండు సమీకరణములలోని y యొక్క గుణకము సంఖ్యాత్మకముగా సమానముగా వ్యతిరేక గుర్తులున్నవి. కావున, y ను సులభంగా తొలగించవచ్చును.

(1) మరియు (2), లను సంకలనము చేయగా,

$$5x = 15 \quad (3)$$

అనగా, $x = 3$.

y ను సాధించుటకు (1) లేక (2) లో $x = 3$ ను ప్రతిక్షేపించుము.

$x = 3$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా, $3(3) - 5y = -16$

$$\implies \quad y = 5.$$

$x = 3$ మరియు $y = 5$ ను (1) మరియు (2) లలో ప్రతిక్షేపించిన $3(3)-5(5) = -16$ మరియు $2(3) + 5(5) = 31$ అగును. ఇది సత్యమైనందున, ఇచ్చిన వ్యవస్థకు (3, 5) అనునది ఒక సాధన అగును.

గమనిక

సాధనను కనుగొనుటలో ఒకే ఒక చలరాశిలోనున్న సమీకరణము (3) ను పొందుట ఒక ముఖ్యమైన ఘట్టము అగును. చలరాశి y ను తొలగించుట ద్వారా ఒకే చలరాశి x గల సమీకరణము (3) ఏర్పడెను. కావున ఒక వ్యవస్థలోని చలరాశులలో మొదట ఒకటిని తొలగించుట ద్వారా సాధించు పద్ధతిని "తొలగించు పద్ధతి" అందురు.

ఉదాహరణ 3.2

11 పెన్సిళ్ళు మరియు 3 రబ్బరుల (erasers) ధర ₹ 50 మరియు 8 పెన్సిళ్ళ మరియు 3 రబ్బరుల ధర ₹ 38 అయిన ఒక పెన్సిల్ ధర మరియు ఒక రబ్బరు ధరను కనుగొనుము.

సాధన ఒక పెన్సిల్ ధర x (రూపాయలలో) మరియు ఒక రబ్బరు ధర y (రూపాయలలో) అనుకొనిన.

ఇచ్చిన సమాచారం ప్రకారం,

$$11x + 3y = 50 \quad (1)$$

$$8x + 3y = 38 \quad (2)$$

(1) నుండి (2) ను తీసివేయగా, $3x = 12$ ఇవి $x = 4$ ఇచ్చును.

y విలువ కనుగొనుటకు $x = 4$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$11(4) + 3y = 50 \quad \text{i.e.,} \quad y = 2.$$

కాబట్టి $x = 4$ మరియు $y = 2$ అనునవి ఇవ్వబడిన సమీకరణముల సాధనలు అగును.

కనుక, ఒక పెన్సిల్ ధర ₹ 4 మరియు ఒక రబ్బరు ధర ₹ 2.

గమనిక

పొందిన విలువలు రెండు సమీకరణములను తృప్తి పరచుచున్నవా అని తనిఖీ చేసుకొనుట ఎప్పటికీ మంచిది.

ఉదాహరణ 3.3

$3x + 4y = -25$, $2x - 3y = 6$ ను తొలగించు పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.

సాధన ఇవ్వబడినవి

$$3x + 4y = -25 \quad (1)$$

$$2x - 3y = 6 \quad (2)$$

చలరాశి x ను తొలగించుటకు (1) ను 2 చే మరియు (2) ను -3 చే గుణించగా,

$$(1) \times 2 \implies 6x + 8y = -50 \quad (3)$$

$$(2) \times -3 \implies -6x + 9y = -18 \quad (4)$$

(3) మరియు (4) కూడగా, $17y = -68$ ఇవి $y = -4$ ఇచ్చును.

తరువాత, $y = -4$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా, $3x + 4(-4) = -25$ i.e., $x = -3$

కావున సాధనలు $(-3, -4)$

సూచన

ఉదాహరణ 3.1 లో చేసిన విధముగా, ఇచ్చిన సమీకరణమును కూడుట లేక తీసివేయుట ద్వారా ఒక చలరాశిని తొలగించుటకు ఇందులో (ఉదాహరణ 3.3) వీలుకాదు. కనుక, ఒక నిర్ణయించబడిన పద్ధతిలో x లేక y ల గుర్తులతో సంబంధము లేకుండా, వాటి గుణకములను సమపరచవలెను. తరువాత వాటిని తొలగించుము.

ఉదాహరణ 3.4

$101x + 99y = 499, \quad 99x + 101y = 501$ లను తొలగించు పద్ధతినుపయోగించి సాధించుము.

సాధన ఇవ్వబడిన సమీకరణముల వ్యవస్థ

$$101x + 99y = 499 \qquad (1)$$

$$99x + 101y = 501 \qquad (2)$$

ఒకానొక చలరాశిని తొలగించుటకు తగిన సంఖ్యలచే సమీకరణములను గుణించవలెను.

అయినప్పటికి, ఒక సమీకరణములోని x గుణకము మరొక సమీకరణములోని y గుణకమునకు సమానముగానున్నవి. ఈ సందర్భమున, రెండు సమీకరణములను కూడుట మరియు తీసివేయుట ద్వారా అదే సాధనలు కలిగిన ఒక కొత్త సమీకరణముల వ్యవస్థ ఏర్పడును.

(1) మరియు (2) లను కూడగా, $200x + 200y = 1000$.

200 చే భాగించగా, $x + y = 5 \qquad (3)$

(1) నుండి (2) ను తీసివేయగా, $2x - 2y = -2$

$x - y = -1 \qquad (4)$

(3) మరియు (4) లను సాధించగా $x = 2,\ y = 3$ ఏర్పడును.

కనుక, కావలసిన సాధన (2, 3).

ఉదాహరణ 3.5

$3(2x + y) = 7xy; \quad 3(x + 3y) = 11xy$ లను తొలగించు పద్ధతినుపయోగించి సాధించుము.

సాధన ఇవ్వబడినవి,

$$3(2x + y) = 7xy \qquad (1)$$

$$3(x + 3y) = 11xy \qquad (2)$$

xy పదము ఉన్నందున, ఇవ్వబడిన వ్యవస్థ రేఖీయ వ్యవస్థ కాదు మరియు $x = 0$ అయిన $y = 0$ అగును. దీని విపర్యము సరియే అగుచున్నది. కావున, (0,0) అనునది వ్యవస్థ యొక్క సాధన అగును మరియు $x \neq 0$, $y \neq 0$ అయిన ఏవేని సాధనలు కలిగియుండును.

కనుక, $x \neq 0,\ y \neq 0$ సందర్భమున,

ప్రతీ సమీకరణమును xy చే ఇరువైపుల భాగించగా,

$$\frac{6}{y} + \frac{3}{x} = 7, \quad \text{i.e.,} \quad \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = 7 \qquad (3)$$

మరియు $$\frac{9}{x} + \frac{3}{y} = 11 \qquad (4)$$

$a = \frac{1}{x}$ మరియు $b = \frac{1}{y}$ అనుకొనిన,

(3) మరియు (4) సమీకరణముల నుండి, $3a + 6b = 7$ (5)

$9a + 3b = 11$ (6)

ఇవి a మరియు b లో గల ఒక రేఖీయ వ్యవస్థ అగును.

b ను తొలగించుటకు, (6) $\times 2 \Longrightarrow$ $18a + 6b = 22$ (7)

(5) నుండి (7) ను తీసివేయగా, $-15a = -15. \Longrightarrow a = 1.$

$a = 1$ ను (5) లో ప్రతిక్షేపించగా, $b = \frac{2}{3}$. కనుక , $a = 1$ మరియు $b = \frac{2}{3}$.

$a = 1$ అయిన, $\frac{1}{x} = 1$. కనుక, $x = 1$.

$b = \frac{2}{3}$ అయిన, $\frac{1}{y} = \frac{2}{3}$. కనుక, $y = \frac{3}{2}$.

కనుక, ఈ వ్యవస్థకు $(1, \frac{3}{2})$ మరియు $(0, 0)$ అను రెండు సాధనలు కలవు.

మరొక పద్ధతి

ఇచ్చిన సమీకరణముల వ్యవస్థను ఈ క్రింది విధముగా సాధించవచ్చును.

$3(2x + y) = 7xy$ (1)

$3(x + 3y) = 11xy$ (2)

(2) $\times$ 2 – (1) $\Longrightarrow$ $15y = 15xy$

$\Longrightarrow$ $15y(1-x) = 0$. కనుక, $x = 1$ మరియు $y = 0$

$x = 1$ అయినప్పుడు, $y = \frac{3}{2}$ మరియు $y = 0$ అయినప్పుడు, $x = 0$ అగును.

కావున, $(1, \frac{3}{2})$ మరియు $(0, 0)$ అనునవి రెండు సాధనలు.

అభ్యాసము 3.1

క్రింద ఇవ్వబడిన సమీకరణముల వ్యవస్థను తొలగించు పద్ధతి ద్వారా సాధించుము..

1. $x + 2y = 7, \quad x - 2y = 1$
2. $3x + y = 8, \quad 5x + y = 10$
3. $x + \frac{y}{2} = 4, \quad \frac{x}{3} + 2y = 5$
4. $11x - 7y = xy, \quad 9x - 4y = 6xy$
5. $\frac{3}{x} + \frac{5}{y} = \frac{20}{xy}, \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{15}{xy}, x \neq 0, y \neq 0$
6. $8x - 3y = 5xy, \quad 6x - 5y = -2xy$
7. $13x + 11y = 70, \quad 11x + 13y = 74$
8. $65x - 33y = 97, \quad 33x - 65y = 1$
9. $\frac{15}{x} + \frac{2}{y} = 17, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{36}{5}, x \neq 0, y \neq 0$
10. $\frac{2}{x} + \frac{2}{3y} = \frac{1}{6}, \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 0, x \neq 0, y \neq 0$

రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థ యొక్క సాధన సమితి పరిమాణము (Cardinality of the set of solutions of the system of linear equations)

క్రింది రెండు సమీకరణముల వ్యవస్థను తీసుకొనెదము.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad (2)$$

ఇక్కడ $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$. అగునట్లు గుణకములు వాస్తవ సంఖ్యలు.
y గుణకములు సమపరచుటకు తొలగించు పద్ధతినుపయోగించెదము.

సమీకరణము (1) ని b_2 చే మరియు సమీకరణము (2) ని b_1 చే గుణించగా,

$$b_2a_1x + b_2b_1y + b_2c_1 = 0 \qquad (3)$$

$$b_1a_2x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0 \qquad (4)$$

సమీకరణము (3) నుండి (4) ను తీసివేయగా,

$$(b_2a_1 - b_1a_2)x = b_1c_2 - b_2c_1 \implies x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ అను షరతులతో

x విలువను సమీకరణము (1) లేక (2) లో ప్రతిక్షేపించి మరియు సాధించగా

$$y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1},$$ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. అను షరతులతో

కనుక, $x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ మరియు $y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. (5)

ఇక్కడ రెండు సందర్భములు గమనించాలి

సందర్భము (i) $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. అనగా, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

ఈ సందర్భమున, ఈ జత రేఖీయ సమీకరణములు ఏకైక సాధనను కలిగియుండును.

సందర్భము (ii) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. అనగా, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, $a_2 \neq 0$ మరియు $b_2 \neq 0$ అయితే

ఈ సందర్భములో, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda$. అయిన $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$ అగును.

a_1 మరియు b_1 విలువలను సమీకరణము (1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\lambda(a_2x + b_2y) + c_1 = 0 \qquad (6)$$

$c_1 = \lambda c_2 \implies \frac{c_1}{c_2} = \lambda$ అయిన, రెండు సమీకరణములు (6) మరియు (2) తృప్తి చెందునని సులభముగా గమనించవచ్చును.

$c_1 = \lambda c_2$ అయిన, సమీకరణము (2) యొక్క ఏవేని సాధనలు సమీకరణము (1) ని తృప్తి పరచిన విపర్యము సరియే.

కనుక, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \lambda$ అయిన, (1) మరియు (2) అను జత రేఖీయ సమీకరణములు అనంతమైన అనేక సాధనలను కలిగియుండును.

$c_1 \neq \lambda c_2$ అయిన, సమీకరణము (1) యొక్క ఏవేని సాధనలు, సమీకరణము (2) ను తృప్తి పరచదు మరియు విపర్యము సరియే.

కాబట్టి, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ అయిన, ఇవ్వబడిన జత రేఖీయ సమీకరణములు (1) మరియు (2) లకు సాధనలు కలిగియుండదు.

గమనిక

పై చర్చను సంక్షిప్తము చేసెదము.

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$, ఇందు $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$. అను సమీకరణముల వ్యవస్థలో

(i) $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ లేక $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, అయిన సమీకరణముల వ్యవస్థ ఏకాంక సాధనను కలిగియుండును.

(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, అయిన, సమీకరణముల వ్యవస్థకు అనంతమైన అనేక సాధనలు కలిగియుండును.

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, అయిన, సమీకరణముల వ్యవస్థకు సాధనలుండవు.

3.2.2 అడ్డ గుణకార పద్ధతి (Cross multiplication method)

తొలగించు పద్ధతిని ఉపయోగించి రెండు తెలియని రాశులు x మరియు y గల ఒక జత రేఖీయ సమీకరణముల సాధనలను కనుగొనుటకు వాటి గుణకములను ఉపయోగించితిమి. మరొక పద్ధతిని అడ్డ గుణకార పద్ధతి అందురు. ఇది సులభమైన పద్ధతి. ప్రస్తుతము ఈ పద్ధతిని ఎట్లు ఉపయోగించుటయో వివరించెదము.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \text{ ఇందు } a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0 \text{ అనుకొనెదము} \quad (2)$$

ఈ వ్యవస్థ సాధనలను ఇంతకు ముందే నిరూపించియున్నాము.

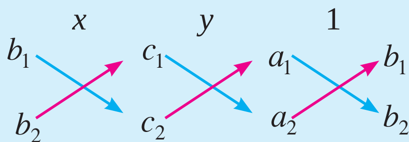
$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

కనుక, $\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $\frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ వ్రాయవచ్చును.

పై వాటిని క్రింది రూపములో వ్రాయగా,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

పై సంబధమును గుర్తుంచుకొనుటకు క్రింది బాణపు గుర్తుల పటము చాలా ఉపయోగపడును.



రెండు సంఖ్యల మధ్యనున్న బాణపు గుర్తులు వాటి గుణకారమును తెలుపును. మొదటి గుణకార లబ్ధము (క్రింద వైపునున్న బాణపు గుర్తు) నుండి రెండవ గుణకార లబ్ధము (పై వైపునున్న బాణపు గుర్తు) ని తీసివేయుము.

రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థను పై రూపముచే సాధించు పద్ధతిని అడ్డుగుణకార పద్ధతి అందురు.

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1},$$

$b_1c_2 - b_2c_1$ లేక $c_1a_2 - c_2a_1 = 0$ గా ఉండవచ్చు. కానీ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ గా ఉండవలెను.

కాబట్టి $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ సమీకరణముల వ్యవస్థకు

(i) $b_1c_2 - b_2c_1 = 0$ మరియు $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ అయితే, $x = 0$ అగును.

(ii) $c_1a_2 - c_2a_1 = 0$ మరియు $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ అయితే, $y = 0$ అగును.

ఇకమీదట, అనేకంగా ఏకాంక సాధనలు కలిగిన సమీకరణముల వ్యవస్థను అడ్డుగుణకార పద్ధతిలో సాధించెదము.

ఉదాహరణ 3.6

సాధించుము:

$$2x + 7y - 5 = 0$$
$$-3x + 8y = -11$$

సాధన ఇవ్వబడిన సమీకరణముల వ్యవస్థ

$$2x + 7y - 5 = 0$$
$$-3x + 8y + 11 = 0$$

అడ్డ గుణకారమునకు, గుణకములను ఈ విధముగా వ్రాయుము.

	x		y		1	
7		−5		2		7
8		11		−3		8

కనుక, $$\frac{x}{(7)(11)-(8)(-5)} = \frac{y}{(-5)(-3)-(2)(11)} = \frac{1}{(2)(8)-(-3)(7)}.$$

అనగా, $\frac{x}{117} = \frac{y}{-7} = \frac{1}{37}$. i.e., $x = \frac{117}{37}$, $y = -\frac{7}{37}$.

కావున, సాధన $\left(\frac{117}{37}, -\frac{7}{37}\right)$.

ఉదాహరణ 3.7

$$3x + 5y = 25$$
$7x + 6y = 30$ లను అడ్డుగుణకార పద్ధతినుపయోగించి సాధించుము.

సాధన ఇవ్వబడిన సమీకరణముల వ్యవస్థ $3x + 5y - 25 = 0$

$$7x + 6y - 30 = 0$$

ఇప్పుడు, అడ్డుగుణకారమునకు గుణకములను వ్రాయుము.

	x		y		1	
5		−25		3		5
6		−30		7		6

$$\Longrightarrow \quad \frac{x}{-150+150} = \frac{y}{-175+90} = \frac{1}{18-35}. \text{ i.e., } \frac{x}{0} = \frac{y}{-85} = \frac{1}{-17}.$$

కనుక $x = 0,\ y = 5$. కావున $(0, 5)$ సాధనగును.

గమనిక

ఇక్కడ $\frac{x}{0} = -\frac{1}{17}$. దీని అర్థము $x = \frac{0}{-17} = 0$. కనుక $\frac{x}{0}$ అనునది ఒక గుర్తు మాత్రమే మరియు ఇది సున్నచే భాగించడం కాదు. సున్నచే భాగించుటను నిర్వచింపబడలేదు. ఇది సత్యమగును.

ఉదాహరణ 3.8

రెండంకెల సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానములోనున్న అంకె, పదుల స్థానములోనున్న అంకెకు రెండింతలు. ఆ సంఖ్యలోని అంకెలు తారుమారు చేసిన ఏర్పడు క్రొత్త సంఖ్య అనునది ఇవ్వబడిన సంఖ్యకు 27 ఎక్కువగును. ఆ సంఖ్య కనుగొనుము.

సాధన పదుల స్థానమును x గా మరియు ఒకట్ల స్థానమును y గా తీసుకొనుము. కావున, విస్తరణ రూపములో ఆ సంఖ్యను $10x + y$ గా వ్రాయవచ్చును. ($35 = 10(3)+5$ విధముగా)

అంకెలను తారుమారు చేసినప్పుడు, x ఒకట్ల స్థానము గాను మరియు y పదుల స్థానముగాను వచ్చును. విస్తరణ రూపములో మార్చబడిన సంఖ్య $10y + x$ గా వ్రాయవచ్చును.

మొదటి నిబంధన ప్రకారము, $y = 2x$ దీనిని క్రింది విధముగా వ్రాసిన,

$$2x - y = 0 \qquad (1)$$

రెండవ నిబంధన ప్రకారము,

$$(10y + x) - (10x + y) = 27$$

అనగా, $-9x + 9y = 27 \Longrightarrow -x + y = 3 \qquad (2)$

(1) మరియు (2) సమీకరణములు కూడగా, $x = 3$ ఏర్పడును.

సమీకరణము (2) లో $x = 3$ ను ప్రతిక్షేపించగా , $y = 6$ అగును.

కనుక, ఇవ్వబడిన సంఖ్య $(3\times10) + 6 = 36$ అగును.

ఉదాహరణ 3.9

ఒక భిన్నము యొక్క లవమును 3 చే గుణించి, హారమును 3 చే తగ్గించిన $\frac{18}{11}$ ఏర్పడును మరియు లవమును 8 చే అధికము చేసి, హారమును రెండింతలు చేసిన $\frac{2}{5}$ ఏర్పడును. అయిన ఆ భిన్నమును కనుగొనుము.

సాధన $\frac{x}{y}$ ఒక భిన్నము అనుకొనిన, ఇచ్చిన నిబంధనల ప్రకారము,

$$\frac{3x}{y-3} = \frac{18}{11} \quad \text{మరియు} \quad \frac{x+8}{2y} = \frac{2}{5}$$

$$\Longrightarrow \quad 11x = 6y - 18 \quad \text{మరియు} \quad 5x + 40 = 4y$$

కావున, $11x - 6y + 18 = 0$ (1)

$5x - 4y + 40 = 0$ (2)

(1) మరియు (2) గుణకమును $a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2 = 0$ సమీకరణముల గుణకములతో పోల్చగా,

$$a_1 = 11,\ b_1 = -6,\ c_1 = 18;\quad a_2 = 5,\ b_2 = -4,\ c_2 = 40.$$

కనుక, $a_1b_2 - a_2b_1 = (11)(-4) - (5)(-6) = -14 \neq 0.$

కావున, ఈ వ్యవస్థ ఏకాంక సాధనను కలిగియుండును.

అడ్డ గుణకార పద్ధతిన వాటి గుణకములను వ్రాయగా,

x		y		1	
-6	18	11	-6		
-4	40	5	-4		

$$\Longrightarrow \frac{x}{-240+72} = \frac{y}{90-440} = \frac{1}{-44+30}$$

$$\Longrightarrow \frac{x}{-168} = \frac{y}{-350} = \frac{1}{-14}$$

కనుక, $x = \frac{168}{14} = 12,\ y = \frac{350}{14} = 25$ కావున భిన్నము $\frac{12}{25}$ అగును.

ఉదాహరణ 3.10

8 మంది పురుషులు మరియు 12 మంది బాలురు కలసి ఒక పనిని 10 రోజులలో ముగించగలరు. అదే పనిని 6 మంది పురుషులు మరియు 8 మంది బాలురు కలసి 14 రోజులలో ముగించగలరు. ఒక పురుషుడు మాత్రమే ఆ పనిని పూర్తి చేయుటకు మరియు ఒక బాలుడు మాత్రమే ఆ పనిని పూర్తి చేయుటకు పట్టు రోజుల సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన పనిని పూర్తి చేయుటకు ఒక పురుషుడికి అవసరమైన రోజుల సంఖ్యను x గాను, ఒక బాలుడికి అవసరమైన రోజుల సంఖ్యను y గాను తీసుకొనుము. స్పష్టముగా, $x \neq 0, y \neq 0$.

కావున, ఒక పురుషుడు ఒక రోజులో పూర్తి చేయు పని భాగము $\frac{1}{x}$ మరియు ఒక బాలుడు ఒక రోజులో పూర్తి చేయు పని భాగము $\frac{1}{y}$.

ఒక రోజులో 8 మంది పురుషులు మరియు 12 మంది బాలురు చేయు పని $\frac{1}{10}$.

కనుక, $\frac{8}{x} + \frac{12}{y} = \frac{1}{10}$ (1)

ఒక రోజులో 6 మంది పురుషులు మరియు 8 మంది బాలురు చేయు పని $\frac{1}{14}$.

కనుక, $\frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{1}{14}$ (2)

$a = \frac{1}{x}$ మరియు $b = \frac{1}{y}$ తీసుకొనిన (1) మరియు (2) లు క్రమముగా ఈ విధముగా ఇచ్చును.

$$8a + 12b = \frac{1}{10} \Longrightarrow 4a + 6b - \frac{1}{20} = 0. \quad (3)$$

$$6a + 8b = \frac{1}{14} \Longrightarrow 3a + 4b - \frac{1}{28} = 0. \quad (4)$$

అడ్డు గుణకార పద్ధతిన (3) మరియు (4) ల గుణకములను వ్రాయుము

$$\begin{array}{cccccc} & a & & b & & 1 \\ 6 & & -\frac{1}{20} & & 4 & & 6 \\ 4 & & -\frac{1}{28} & & 3 & & 4 \end{array}$$

కనుక, $\dfrac{a}{-\frac{3}{14}+\frac{1}{5}} = \dfrac{b}{-\frac{3}{20}+\frac{1}{7}} = \dfrac{1}{16-18}$. i.e., $\dfrac{a}{-\frac{1}{70}} = \dfrac{b}{-\frac{1}{140}} = \dfrac{1}{-2}$.

అనగా, $a = \dfrac{1}{140}$, $b = \dfrac{1}{280}$

కనుక, $x = \dfrac{1}{a} = 140$, $y = \dfrac{1}{b} = 280$.

ఒక పురుషుడు మాత్రము ఆ పనిని 140 రోజులలో పూర్తి చేయును మరియు ఒక బాలుడు మాత్రము ఆ పనిని 280 రోజులలో పూర్తి చేయును.

అభ్యాసము 3.2

1. అడ్డుగుణకార పద్ధతినుపయోగించి క్రింది సమీకరణముల వ్యవస్థను సాధించుము.

   (i) $3x + 4y = 24,\ 20x - 11y = 47$ (ii) $0.5x + 0.8y = 0.44,\ 0.8x + 0.6y = 0.5$

   (iii) $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{5y}{3} = -2,\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = \dfrac{13}{6}$ (iv) $\dfrac{5}{x} - \dfrac{4}{y} = -2,\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 13$

2. క్రింది సమస్యలను ఒక జత సమీకరణములుగా వ్రాసి, వాటి సాధనను కనుగొనుము:

   (i) ఒక సంఖ్య మూడు రెట్లు గల సంఖ్య కన్నా 2 ఎక్కువగా నుండును. చిన్న సంఖ్య 4 రెట్లయిన ఆ సంఖ్య కన్నా 5 ఎక్కువగును. ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

   (ii) ఇద్దరి ఆదాయముల నిష్పత్తి 9 : 7 మరియు వారి ఖర్చుల నిష్పత్తి 4 : 3. ప్రతి ఒక్కరు ప్రతీనెల ₹ 2000 పొదుపు చేసిన, వారి నెలసరి ఆదాయమును కనుగొనుము.

   (iii) ఒక రెండంకెల సంఖ్య వాటి అంకెల మొత్తమునకు ఏడు రెట్లుండును. ఆ అంకెలను తారుమారు చేసిన ఏర్పడు సంఖ్య ఇవ్వబడిన సంఖ్యకన్నా 18 తక్కువగా నుండును. అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

   (iv) 3 కుర్చీలు, 2 మేజాల ధర ₹ 700 మరియు 5 కుర్చీలు, 3 మేజాల ధర ₹ 1100 అయిన 2 కుర్చీలు, 3 మేజాల మొత్తము ధర ఎంత?

   (v) ఒక దీర్ఘ చతురస్రము పొడవులో 2 సెం.మీ అధికరించి మరియు వెడల్పులో 2 సెం.మీ తగ్గించినట్లయిన వాటి వైశాల్యము 28 చ.సెం.మీ తగ్గును. పొడవు 1 సెం.మీ తగ్గించి మరియు వెడల్పు 2 సెం.మీ అధికరంచినట్లయిన వాటి వైశాల్యము 33 చ.సెం.మీ పెరుగును. దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యమును కనుగొనుము.

   (vi) ఒక రైలు కొంత దూరమును ఒక స్థిర వేగముతో ప్రయాణము చేసెను. గంటకు 6 కి.మీ ఎక్కువ వేగముతో రైలు ప్రయాణించిన, నిర్ణయించిన కాలము కంటే 4 గంటలు తక్కువ తీసుకొనును. గంటకు 6 కి.మీ తక్కువ వేగముతో రైలు ప్రయాణించిన, నిర్ణయించిన కాలము కంటే 6 గంటలు ఎక్కువ తీసుకొనును. రైలు ప్రయాణించిన దూరమును కనుగొనుము.

3.3 వర్గ బహుపద సమాసములు (Quadratic polynomials)

n అంతస్తు కలిగిన x చలరాశి గల బహుపద సమాసము $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+.....+a^{n-1}x+a_n$, ఇక్కడ $a_0 \neq 0$ మరియు $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ వాస్తవ స్థిరాంకములు.

అంతస్తు రెండు కలిగిన ఒక బహుపద సమాసమును వర్గ (ద్విఘాత) బహుపద సమాసము అందురు. దీనిని $p(x) = ax^2 + bx + c$ గా వ్రాయుదురు, ఇక్కడ $a \neq 0$, b మరియు c లు వాస్తవ స్థిరాంకములు. వాస్తవ స్థిరాంకములు సున్న అంతస్తు కలిగిన బహుపద సమాసములుగా ఉండవచ్చును.

ఉదాహరణకు, $x^2 + x + 1$, $3x^2 - 1$, $-\frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{7}{3}$ అనునవి వర్గ బహుపద సమాసములు.

$x = k$ వద్ద, $p(x) = ax^2 + bx + c$ అను వర్గ బహుపద సమాసముల విలువను $p(x)$ లో x కు బదులు k ను ప్రతిక్షేపించగా పొందవచ్చును. కనుక, $x = k$, వద్ద $p(x)$ విలువ $p(k) = ak^2 + bk + c$ అగును.

3.3.1 బహుపద సమాసముల శూన్యములు (సున్నలు) (Zeros of a polynomial)

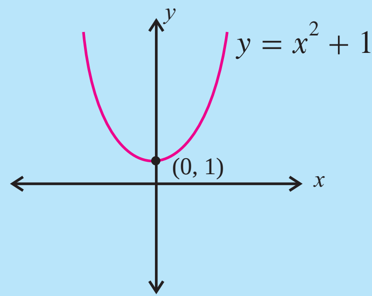
$p(x)$ ఒక బహుపద సమాసము అనుకొనుము. k అను వాస్తవ సంఖ్యకు $p(k) = 0$ అయిన, k ను $p(x)$ అను బహుపద సమాసము యొక్క శూన్యము (zero) అని అందురు.

ఉదాహరణకు,

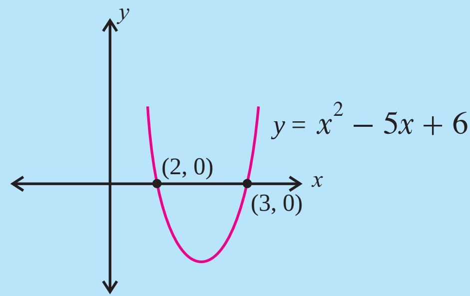
$q(x) = x^2 - 5x + 6$ అను బహుపద సమాసము యొక్క శూన్యములు 2 మరియు 3 అగును. ఎందుకనగా $q(2) = 0$ మరియు $q(3) = 0$.

గమనిక

కొన్ని బహుపద సమాసములకు వాస్తవ సంఖ్యలలో శూన్యములు కలిగియుండకపోవచ్చు. ఉదాహరణకు, $p(x) = x^2 + 1$ నకు వాస్తవ సంఖ్యలలో శూన్యము లేదు. అనగా $p(k) = 0$ అగునట్లు k అను వాస్తవ సంఖ్యకు విలువ లేదు. జ్యామితీయంగా బహుపద సమాస శూన్యమనునది దాని రేఖాచిత్రము x-అక్షము ఖండించినట్లయిన ఆ ఖండన బిందువు x నిరూపమగును. (పటము 3.1 మరియు 3.2 చూడుము)



పటము 3.1



పటము 3.2

3.3.2 వర్గసమాసముల శూన్యములు మరియు గుణకముల మధ్యగల సంబంధము (Relationship between zeros and coefficients of a quadratic polynomial)

సామాన్యముగా, $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ అను వర్గ బహుపదసమాసముల శూన్యములు α మరియు β అయిన, కారణాంక సిద్ధాంతం ప్రకారం, $x - \alpha$, $x - \beta$ అనునవి $p(x)$ యొక్క కారణాంకములు.

కావున, $ax^2 + bx + c = k(x-\alpha)(x-\beta)$, ఇక్కడ k అనునది శూన్యేతర స్థిరాంకము.

$$= k[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta]$$

ఇరువైపుల గల x^2, x ల గుణకములు మరియు స్థిరపదములను పోల్చగా, $a = k$, $b = -k(\alpha+\beta)$ మరియు $c = k\alpha\beta$ పొందగలము

> $p(x) = ax^2 + bx + c$ యొక్క శూన్యములకు మరియు గుణకములకు మధ్య గల ఆధార సంబంధములు,
>
> శూన్యముల మొత్తము : $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{x \text{ యొక్క గుణకము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$
>
> శూన్యముల లబ్ధము : $\alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{\text{స్థిరాంకము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

ఉదాహరణ 3.11

$x^2 + 9x + 20$ వర్గ సమాసమునకు శూన్యములు కనుగొనుము. శూన్యములు మరియు గుణకముల మధ్య ఆధార సంబంధమును సరిచూడుము.

సాధన $p(x) = x^2 + 9x + 20 = (x+4)(x+5)$

$p(x) = 0 \Longrightarrow (x+4)(x+5) = 0 \quad \therefore \; x = -4$ లేక $x = -5$

కనుక, $p(-4) = (-4+4)(-4+5) = 0$ మరియు $p(-5) = (-5+4)(-5+5) = 0$

కాబట్టి, $p(x)$ కు శూన్యములు -4 మరియు -5.

కనుక, శూన్యముల మొత్తము $= -9$ మరియు శూన్యముల లబ్ధము $= 20$. (1)

ఆధార సంబంధముల నుండి,

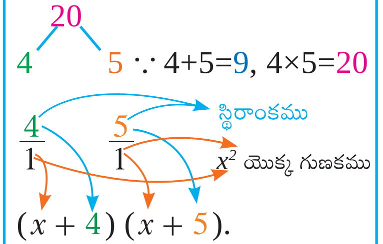
శూన్యముల మొత్తము $= \frac{x \text{ యొక్క గుణకము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}} = -\frac{9}{1} = -9$ (2)

శూన్యముల లబ్ధము $= -\frac{\text{స్థిరాంకము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}} = \frac{20}{1} = 20$ (3)

కనుక, ఆధార సంబంధములు సరిచూడబడినది.

సూచనలు:

$x^2 + 9x + 20$ ను కారణాంక పరచుటకు క్రింది విధానమును అనుసరించుము.



గమనిక

> $p(x) = ax^2 + bx + c$ అను వర్గ బహుపద సమాసమునకు గరిష్ఠంగా రెండు శూన్యములు ఉండును. కనుక, α మరియు β శూన్యములతో $a \neq 0$ గా ఉండు, $a(x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta)$ ఒక బహుపద సమాసమగును. ఎందుకనగా ఏదేని శూన్యేతరము a ని తీసుకొనిన, α మరియు β శూన్యములతో అనంతమైన వర్గ బహుపద సమాసములు ఉండును.

ఉదాహరణ 3.12

శూన్యముల మొత్తము మరియు లబ్ధములు క్రమముగా -4 మరియు 3 గా నుండు వర్గ బహుపద సమాసమును కనుగొనుము.

సాధన α మరియు β అనునవి వర్గ బహుపద సమాసముల శూన్యములు అనుకొనిన,

ఇవ్వబడినది, $\alpha + \beta = -4$ మరియు $\alpha\beta = 3$.

$p(x) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$ ఒక బహుపద సమాసము.

$$= x^2 - (-4)x + 3 = x^2 + 4x + 3$$

ఉదాహరణ 3.13

$x = \frac{1}{4}$ మరియు $x = -1$ శూన్యములతో వర్గ బహుపద సమాసమును కనుగొనుము.

సాధన

α మరియు β అనునవి $p(x)$ వర్గ బహుపద సమాసముల శూన్యములు అనుకొనిన, శూన్యముల మరియు గుణకముల సంబంధమునుపయోగించి,

$$p(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$
$$= x^2 - \left(\frac{1}{4} - 1\right)x + \left(\frac{1}{4}\right)(-1)$$
$$= x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$$

ఇదియే $\frac{1}{4}$ మరియు -1 శూన్యములతో ఏర్పడిన బహుపదసమాసము.

మరొక పద్ధతి : క్రింది విధానమును అనుసరించి, కావలసిన బహుపద సమాసమును ప్రత్యక్షముగా పొందవచ్చును.

$$p(x) = \left(x - \frac{1}{4}\right)(x + 1)$$
$$= x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}.$$

ఏవేని శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్యచే $p(x)$ ను గుణించిన, నిర్ణయించిన ధర్మములతో ఏవేని బహుపద సమాసమును పొందవచ్చును.

గమనిక

$\frac{1}{4}$ మరియు -1 శూన్యములతో $4x^2 + 3x - 1$ అనునది కూడా ఒక బహుపదసమాసము.

అభ్యాసము 3.3

1. క్రింది వర్గ బహుపద సమాసముల శూన్యములు కనుగొనుము మరియు శూన్యములకు గుణకములకు మధ్యగల ఆధార సంబంధమును సరిచూడుము.

   (i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4x^2 - 4x + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$ (iv) $4x^2 + 8x$

   (v) $x^2 - 15$ (vi) $3x^2 - 5x + 2$ (vii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$ (viii) $x^2 + 2x - 143$

2. క్రమముగా క్రింద ఇవ్వబడిన శూన్యముల మొత్తము మరియు లబ్ధముల ద్వారా వర్గ బహుపద సమాసములను కనుగొనుము.

   (i) 3, 1 (ii) 2, 4 (iii) 0, 4 (iv) $\sqrt{2}, \frac{1}{5}$

   (v) $\frac{1}{3}, 1$ (vi) $\frac{1}{2}, -4$ (vii) $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ (viii) $\sqrt{3}, 2$

3.4 సంయోజిత భాగాహారము (Synthetic division)

29 ను 7 చే భాగించిన భాగఫలము 4 మరియు శేషము 1 వచ్చునని మనకు తెలియును. కనుక, 29 = 4(7)+1. అదేవిధంగా $p(x)$ అను మరొక బహుపద సమాసమును $q(x)$ అను బహుపద సమాసముతో భాగించగా ఏర్పడు ఫలితములు భాగఫలము మరియు శేషము అనునవి

$$p(x) = (\text{భాగఫలము})q(x) + \text{శేషము}$$

అనగా, $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, ఇక్కడ ($r(x)$ అంతస్తు < $q(x)$ అంతస్తు.

దీనిని భాగాహార విశేష విధి (Division Algoritham) అందురు.

$q(x) = x + a$ అయిన, అంతస్తు $r(x) = 0$ అగును. కనుక, $r(x)$ ఒక స్థిరాంకము.

కాబట్టి, $p(x) = s(x)(x + a) + r$, ఇక్కడ r ఒక స్థిరాంకము.

$x = -a$ పై సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించగా, $p(-a) = s(-a)(-a + a) + r \implies r = p(-a)$.

కనుక $q(x) = x + a$ అయిన, $x = -a$ వద్ద $p(x)$ ను మూల్యాంకనము చేసి శేషమును గణించవచ్చును.

భాగాహార విశేష విధి (Division algorithm) :

విభాజ్యము $p(x)$ మరియు భాజకము $q(x)$ అయిన, భాగాహార విశేష విధిని $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$ గా వ్రాయవచ్చును.

క్రింది ఫలితములు ఏర్పడును.

(i) $q(x)$ రేఖీయ సమీకరణము అయిన, $r(x) = r$ ఒక స్థిరాంకము.

(ii) $q(x)$ అంతస్తు $= 1$ అయిన (*i.e.*, $q(x)$ అనునది రేఖీయము)
$p(x)$ అంతస్తు $= 1 +$ $s(x)$ అంతస్తు అగును.

(iii) $p(x)$ ను $x + a$ చే భాగించినట్లయిన $p(-a)$ శేషమగును.

(iv) $r = 0$ అయిన, $q(x)$ చే $p(x)$ ను నిశ్శేషముగా భాగించునని చెప్పవచ్చును. లేక $q(x)$ అనునది $p(x)$ కు ఒక కారణాంకమగును.

గమనిక

ఒక బహుపద సమాసమును ఒక రేఖీయ బహుపదులచే సులభముగా భాగించు పద్ధతిని 1809 లో పావలోరుఫిన్ (Paolo Ruffin) చే పరిచయము చేయబడినది. ఈ పద్ధతినే సంయోజిత భాగాహారము అందురు. బహుపద సమాసములోని గుణకముల సహాయముతో రేఖీయ బహుపద సమాసముచే భాగించుట సులభమైనది.



పావలోరుఫిన్
(1765 – 1822 ఇటలీ)

సంయోజిత భాగాహారమును ఒక ఉదాహరణతో వివరించెదము.

$p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 4$ విభాజ్యముగా మరియు $q(x) = x + 2$ భాజకముగా తీసుకొనుము. భాగఫలము $s(x)$ మరియు శేషము r ను క్రింది పద్ధతుల ద్వారా కనుగొనెదము.

సోపానము 1 విభాజ్యము మరియు భాజకముల x యొక్క ఘాతములను అవరోహణ క్రమములో అమర్చి మరియు విభాజ్యముల గుణకముల ను మొదటి అడ్డువరుసలో వ్రాయుము. (పటమును చూడుము). విడువబడిన పదములకు '0' ను చేర్చుము.

$x^3 + 2x^2 - x - 4$ → 1   2   –1   –4

సోపానము 2 భాజకము యొక్క శూన్యములు కనుగొనుము.

సోపానము 3 2వ అడ్డువరుసలో మొదట '0' ను ఉంచుము. 2వ అడ్డువరుస మరియు 3వ అడ్డువరుసల విలువలను క్రింద చూపిన విధముగా పూర్తిచేయుము

–2	1	2	–1	–4	
	0	$1\times(-2)$ → –2	$0\times(-2)$ → 0	$-1\times(-2)$ → 2	
	1+0 = 1	2+(–2) = 0	–1+0 = –1	–4+2 = –2	⟵ శేషము

సోపానము 4 దీని ప్రకారముగా భాగఫలము మరియు శేషమును వ్రాయుము. మూడవ అడ్డువరుసలోని చివర విలువ తప్ప మిగిలిన విలువలను భాగఫలము యొక్క గుణకములుగా ఏర్పరుచుము.
కనుక, భాగఫలము $x^2 - 1$ మరియు శేషము -2 అగును.

ఉదాహరణ 3.14

$x^3 + x^2 - 7x - 3$ ను $x - 3$ చే భాగించగా ఏర్పడు భాగఫలము మరియు శేషమును కనుగొనుము.

సాధన $p(x) = x^3 + x^2 - 7x - 3$, భాజకము యొక్క శూన్యము 3 గా తీసుకొనిన,

3	1	1	–7	–3
	0	3	12	15
	1	4	5	12 ⟶ శేషము.

$\therefore$ $p(x)$ ను $x - 3$ చే భాగించునపుడు, భాగఫలము $x^2 + 4x + 5$ మరియు శేషము 12.

ఉదాహరణ 3.15

$2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x + 6$ ను $2x + 1$ చే భాగించగా వచ్చు భాగఫలము $x^3 + ax^2 - bx - 6$ అయిన a మరియు b విలువలను, శేషమును కనుగొనుము.

సాధన $p(x) = 2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x + 6$ అనుకొనుము.

భాజకము $2x + 1$ ను $2x + 1 = 0$ గా వ్రాసిన $x = -\frac{1}{2}$ అగును.

$\therefore$ భాజకము యొక్క శూన్యము $-\frac{1}{2}$ అగును.

$-\frac{1}{2}$	2	1	–14	–19	6
	0	–1	0	7	6
	2	0	–14	–12	12 ⟶ శేషము

కావున, $2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x + 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)\{2x^3 - 14x - 12\} + 12$

$$= (2x + 1)\frac{1}{2}(2x^3 - 14x - 12) + 12$$

కనుక, భాగఫలము $\frac{1}{2}(2x^3 - 14x - 12) = x^3 - 7x - 6$ మరియు శేషము 12.

కానీ, ఇవ్వబడిన భాగఫలము $x^3 + ax^2 - bx - 6$. వచ్చిన భాగఫలముతో పోల్చిన, $a = 0$ మరియు $b = 7$ ఏర్పడును. కనుక, $a = 0$, $b = 7$ మరియు శేషము 12.

అభ్యాసము 3.4

1. సంయోజిత భాగాహారమును ఉపయోగించి భాగఫలము మరియు శేషమును కనుగొనుము.
   (i) $(x^3 + x^2 - 3x + 5) \div (x - 1)$ (ii) $(3x^3 - 2x^2 + 7x - 5) \div (x + 3)$
   (iii) $(3x^3 + 4x^2 - 10x + 6) \div (3x - 2)$ (iv) $(3x^3 - 4x^2 - 5) \div (3x + 1)$
   (v) $(8x^4 - 2x^2 + 6x - 5) \div (4x + 1)$ (vi) $(2x^4 - 7x^3 - 13x^2 + 63x - 48) \div (2x - 1)$
2. $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 29$ ను $x + 4$ చే భాగించగా వచ్చు భాగఫలము $x^3 - ax^2 + bx + 6$ అయిన, a మరియు b విలువలను మరియు శేషమును కనుగొనుము.
3. $8x^4 - 2x^2 + 6x - 7$ ను $2x + 1$ చే భాగించగా వచ్చు భాగఫలము $4x^3 + px^2 - qx + 3$ అయిన, p మరియు q విలువలను మరియు శేషమును కనుగొనుము.

3.4.1 సంయోజిత భాగాహారమునుపయోగించి కారణాంకపరచుట (Factorization using synthetic division)

వర్గ సమాసములను ఎట్లు కారణాంక పరచవచ్చునో IX తరగతిలో నేర్చుకొంటిమి. ఈ అధ్యాయములో, సంయోజిత భాగాహారమునుపయోగించి ఘన సమాసమును ఎట్లు కారణాంక పరచవచ్చునో నేర్చుకొనెదము.

ఘన సమాసము $p(x)$ యొక్క ఒక ఏకఘాత కారణాంకమును గుర్తించినట్లయిన, సంయోజిత భాగాహారమునుపయోగించి, $p(x)$ యొక్క వర్గకారణాంకమును పొందవచ్చును. వర్గ కారణాంకమును కారణాంకపరచుటకు వీలైనట్లయితే రెండు ఏకఘాత కారణాంకములుగా చేయవచ్చును. కాబట్టి ఘన సమాసములను ఏకఘాత కారణాంకములుగా కారణాంకపరచుటకు వీలైన సంయోజిత భాగహార పద్ధతి ఉపయోగకరముగానున్నది.

గమనిక

(i) ఏవేని బహుపద సమాసము $p(x)$ నకు $x = a$ ఒక శూన్యమైన $p(a) = 0$ దీని విపర్యము సరియే.

(ii) $p(x)$ కు $x - a$ ఒక కారణాంకమైన $p(a) = 0$ దీని విపర్యము సరియే. (కారణాంక సిద్ధాంతము)

(iii) $p(x)$ కు $x - 1$ ఒక కారణాంకమైన $p(x)$ యొక్క గుణకముల మొత్తము '0'. దీని విపర్యము సరియే

(iv) $p(x)$ కు $x + 1$ ఒక కారణాంకమైన x యొక్క సరి ఘాతముల గుణకముల మొత్తమునకు, (స్థిరాంకము చేర్చి) x యొక్క బేసి ఘాతముల గుణకముల మొత్తమునకు సమానము.

ఉదాహరణ 3.16

(i) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ కు $x - 1$ ఒక కారణాంకమని నిరూపించుము.

(ii) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ కు $x + 1$ ఒక కారణాంకమని నిరూపించుము.

సాధన (i) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$

$p(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0.$ (గుణకముల మొత్తము '0' అగుటను గమనింపుము)

కనుక, $p(x)$ కు $(x - 1)$ ఒక కారణాంకమగును.

(ii) $q(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6.$

$q(-1) = -1 + 6 - 11 + 6 = 0.$ కాబట్టి, $q(x)$ కు $x + 1$ ఒక కారణాంకము. $q(x)$

ఉదాహరణ 3.17

$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ ఏకఘాత కారణాంకములుగా కారణాంకపరచుము.

సాధన $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

$p(1) = -2 \neq 0$ (గుణకముల మొత్తము శూన్యము కానిది గమనింపుము)

$\therefore$ $(x - 1)$ అనునది $p(x)$ యొక్క ఒక కారణాంకము కాదు.

అయినప్పటికీ, $p(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 2 = 0.$

కావున, $x + 1$ అనునది $p(x)$ యొక్క కారణాంకమగును.

ఇతర కారణాంకములను సంయోజిత భాగాహారమునుపయోగించి కనుగొనెదము.

-1	2	-3	-3	2
	0	-2	5	-2
	2	-5	2	0 ⟶ శేషము

కావున, $p(x) = (x + 1)(2x^2 - 5x + 2)$

$2x^2 - 5x + 2 = 2x^2 - 4x - x + 2 = (x - 2)(2x - 1).$

కనుక, $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x + 1)(x - 2)(2x - 1).$

సూచనలు

$2x^2 - 5x + 2$ ను కారణాంకపరచుటకు క్రింది విధానమును అనుసరించ వచ్చును

4

-4 -1 $\because -4+(-1)=-5,\ -4\times(-1)=4$

$\frac{-4}{2} = \frac{-2}{1}$ $\frac{-1}{2}$ స్థిరాంకము x^2 యొక్క గుణకము

$(x - 2)(2x - 1).$

ఉదాహరణ 3.18

$x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ ను కారణాంకపరచుము.

సాధన $p(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$.

$p(1) \neq 0$ మరియు $p(-1) \neq 0$ అయినందున, $x + 1$ మరియు $x - 1$ అనునవి $p(x)$ యొక్క కారణాంకములు కాదు.

కావున యత్న దోష పద్ధతి (trial and error method) ద్వారా x యొక్క వేర్వేరు విలువలను అన్వేషించుము.

$x = 2$ అయిన $p(2) = 0$. కనుక, $p(x)$ కు $x - 2$ ఒక కారణాంకమగును.

సంయోజిత భాగాహారమునుపయోగించి ఇతర కారణాంకములు కనుగొనుట.

2	1	–3	–10	24	
	0	2	–2	–24	
	1	–1	–12	0	⟶ శేషము

$\therefore$ $x^2 - x - 12$ మరొక కారణాంకమగును.

$x^2 - x - 12 = x^2 - 4x + 3x - 12 = (x - 4)(x + 3)$

కనుక, $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x - 2)(x + 3)(x - 4)$

అభ్యాసము 3.5

1. క్రింది బహుపదులను కారణాంకపరచుము.

(i) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ (ii) $4x^3 - 7x + 3$ (iii) $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

(iv) $4x^3 - 5x^2 + 7x - 6$ (v) $x^3 - 7x + 6$ (vi) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

(vii) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$ (viii) $x^3 - 5x + 4$ (ix) $x^3 - 10x^2 - x + 10$

(x) $2x^3 + 11x^2 - 7x - 6$ (xi) $x^3 + x^2 + x - 14$ (xii) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

3.5 గరిష్ఠ సామాన్య భాజకము (గ.సా.భా) మరియు కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజము (క.సా.గు) (Greatest Common Divisor (GCD) and Least Common Multiple (LCM))

3.5.1 గరిష్ఠ సామాన్య భాజకము (గ.సా.భా) (Greatest common divisor (GCD))

రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ బీజీయ సమాసములను ఒక్కొక్కదానిని నిశ్శేషముగా భాగించెడి గరిష్ఠ అంతస్తు కలిగిన సమాసమునే గరిష్ఠ సామాన్య భాజకము (గ.సా.భా) లేక గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకము (HCF) అని అందురు.

క్రింది సరళ సమాసములను గమనించుము.

(i) a^4, a^3, a^5, a^6 (ii) a^3b^4, ab^5c^2, a^2b^7c

(i) లోని అన్ని సమాసములకు a, a^2, a^3 భాజకములగుటను గమనింపుము. అన్నింటిలోను a^3 అను భాజకమునకు గరిష్ఠ అంతస్తు కలదు. కావున a^4, a^3, a^5, a^6 అను సమాసముల యొక్క గ.సా.భా a^3.

(ii) అదే విధముగా a^3b^4, ab^5c^2, a^2b^7c యొక్క గ.సా.భా ab^4 అని సులభముగా గుర్తించవచ్చును.

సంఖ్యాత్మక గుణకములు కలిగిన సమాసములైన, ఆ గుణకముల గరిష్ఠ సామాన్య భాజకమును కనుగొని, ఆ బీజీయ సమాసముల గరిష్ఠ సామాన్య భాజకమునకు గుణకముగా ముందుంచుము.

గరిష్ఠ సామాన్య భాజకమును అర్థము చేకొనుటకు మరికొన్ని ఉదాహరణలను గమనించెదము.

ఉదాహరణ 3.19

క్రింది వాటికి గ.సా.భా ను కనుగొనుము.

(i) 90, 150, 225 (ii) $15x^4y^3z^5$, $12x^2y^7z^2$

(iii) $6(2x^2 - 3x - 2)$, $8(4x^2 + 4x + 1)$, $12(2x^2 + 7x + 3)$

సాధన

(i) 90, 150 మరియు 225 సంఖ్యలను ప్రధాన కారణాంకముల లబ్ధముగా వ్రాయుము. $90 = 2\times3\times3\times5$, $150 = 2\times3\times5\times5$ మరియు $225 = 3\times3\times5\times5$. ఇవ్వబడిన అన్ని సంఖ్యల నుండి ఉమ్మడి ప్రధాన కారణాంకములు 3 మరియు 5.

కావున గ.సా.భా $= 3\times5 = 15$.

(ii) బీజీయ సమాసముల గ.సా.భా ను కనుగొనుటకు అదే మెళుకువలను ఉపయోగించుము.

ఇవ్వబడిన $15x^4y^3z^5$ మరియు $12x^2y^7z^2$ సమాసములకు 3, x^2, y^3 మరియు z^2 ఉమ్మడి భాజకములగును.

కావున, గ.సా.భా $= 3\times x^2\times y^3\times z^2 = 3x^2y^3z^2$

(iii) ఇవ్వబడిన సమాసములు $6(2x^2 - 3x - 2)$, $8(4x^2 + 4x + 1)$, $12(2x^2 + 7x + 3)$ లలో,

6, 8, 12 యొక్క గ.సా.భా 2.

వర్గ సమాసముల కారణాంకములు కనుగొనెదము.

$$2x^2 - 3x - 2 = (2x + 1)(x - 2)$$

$$4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)(2x + 1)$$

$$2x^2 + 7x + 3 = (2x + 1)(x + 3)$$

పై వర్గ సమాసములకు ఉమ్మడి భాజము $(2x + 1)$.

కావున, గ.సా.భా $= 2(2x + 1)$.

3.5.2 భాగాహార విశేష పద్ధతిని ఉపయోగించి బహుపద సమాసముల గరిష్ఠ సామాన్య భాజకమును కనుగొనుట. (Greatest common divisor of polynomials using division algorithm)

మొదటగా, 924 మరియు 105 యొక్క గ.సా.భా ను కనుగొనుటకు సులభమైన పద్ధతిని గమనించుము.

$924 = 8 \times 105 + 84$

$105 = 1 \times 84 + 21,$ (లేక)

$84 = 4 \times 21 + 0,$

	8		1		4
105	924	84	105	21	84
	840		84		84
	84		21		0

924 మరియు 105 యొక్క గ.సా.భా 21.

ఇదే మెళుకువలను ఉపయోగించి బహుపద సమాసముల గ.సా.భా ను కనుగొనవచ్చును.

$f(x)$ అంతస్తు $\geq g(x)$ అంతస్తుతో $f(x)$, $g(x)$ అను రెండు స్థిరాంకము కాని బహుపద సమాసముల ను తీసుకొనుము. $f(x)$ మరియు $g(x)$ యొక్క గ.సా.భా ను కనుగొనెదము. పైన నేర్చుకొన్న పద్ధతి ద్వారా $f(x)$, $g(x)$ ను ఏకఘాతమునకు, తగ్గించుటకు వీలుకాని వర్గ సమాసములుగా కారణాంకపరచి, గ.సా.భా ను సులభముగా కనుగొనవచ్చును. బహుపదసమీసములు $f(x)$ మరియు $g(x)$ లను సులభముగా కారణాంకపరచుటకు

వీలుకానిచో, వీటిని కఠిన సమస్యలుగా పరిగణించవలెను. అయినప్పటికీ, క్రింది పద్ధతిద్వారా గ.సా.భా.ను ఒక క్రమ పద్ధతిలో కనుగొనవచ్చును.

సోపానము 1 : మొదట $f(x)$ ను $g(x)$ చే భాగించినపుడు, $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ ఏర్పడును. ఇక్కడ భాగఫలము $q(x)$ మరియు శేషము $r(x)$ అగును. $g(x)$ అంతస్తు $>$ $r(x)$ అంతస్తు అయినపుడు శేషము $r(x)$ అనునది 0 అయిన, $f(x)$ మరియు $g(x)$ యొక్క గ.సా.భా $g(x)$ అగును.

సోపానము 2 : శేషము $r(x)$ అనునది శూన్యేతరమయిన, $g(x)$ ను $r(x)$ చే భాగించినపుడు $g(x) = r(x)q(x) + r_1(x)$ ఏర్పడును, $r(x)$ అంతస్తు $>$ $r_1(x)$ అంతస్తు అయినపుడు, ఇక్కడ $r_1(x)$ అనునది శేషమగును. శేషము $r_1(x)$ అనునది '0' అయిన కావలసిన గ.సా.భా $r(x)$ అగును.

సోపానము 3 : $r_1(x)$ శూన్యేతరమైన, శేషము '0' గా వచ్చునంతవరకు ఈ పద్ధతిని కొనసాగించుము.

చివరి సోపానమునకు ముందున్న శేషము $f(x)$ మరియు $g(x)$ యొక్క గ.సా.భా అగును. $f(x)$ మరియు $g(x)$ అను బహుపద సమాసముల గ.సా.భా ను $(f(x), g(x))$ గా వ్రాయవచ్చును.

సూచనలు

యూక్లిడ్ భాగాహార విశేష విధి అనునది రెండు సంఖ్యలలో పెద్ద సంఖ్య నుండి చిన్న సంఖ్యను తీసినట్లయిన ఆ రెండు సంఖ్యల గ.సా.భా మారదు. కనుక గ.సా.భా (252, 105) = గ.సా.భా (147, 105) = గ.సా.భా = (42, 105) = గ.సా.భా = (63, 42) = గ.సా.భా = (21, 42) = 21.

ఉదాహరణ 3.20

$x^4 + 3x^3 - x - 3$ మరియు $x^3 + x^2 - 5x + 3$ బహుపద సమాసముల గ.సా.భా కనుగొనుము.

సాధన $f(x) = x^4 + 3x^3 - x - 3$ మరియు $g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ అనుకొనిన.

ఇక్కడ, $f(x)$ యొక్క అంతస్తు $>$ $g(x)$ యొక్క అంతస్తు $\therefore x^3 + x^2 - 5x + 3$ భాజకమగును.

$$\begin{array}{r|l} & \quad x + 2 \\ \hline x^3 + x^2 - 5x + 3 & x^4 + 3x^3 + 0x^2 - x - 3 \\ & x^4 + x^3 - 5x^2 + 3x \\ \hline & \quad 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 \\ & \quad 2x^3 + 2x^2 - 10x + 6 \\ \hline & \qquad 3x^2 + 6x - 9 \\ & \Longrightarrow \quad x^2 + 2x - 3 \longrightarrow \text{శేషము} (\neq 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & \quad x - 1 \\ \hline x^2 + 2x - 3 & x^3 + x^2 - 5x + 3 \\ & x^3 + 2x^2 - 3x \\ \hline & \quad -x^2 - 2x + 3 \\ & \quad -x^2 - 2x + 3 \\ \hline & \qquad 0 \longrightarrow \text{శేషము} \end{array}$$

కావున, GCD $(f(x), g(x)) = x^2 + 2x - 3$.

సూచనలు

పై రెండు అసలైన సమాసములకు సరళ కారణాంకములు (స్థిరాంకములు) లేవు. కనుక వాటికి గ.సా.భా లేదు. కాబట్టి పై ఉదాహరణలో $3x^2 + 6x - 9$ నుండి సరళ కారణాంకము 3 ను తీసివేసి మరియు $x^2 + 2x - 3$ ను కొత్త భాజకముగా తీసుకొనుము.

ఉదాహరణ 3.21

క్రింద ఇవ్వబడిన బహుపద సమాసములకు గ.సా.భా ను కనుగొనుము.

$3x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 24x$ మరియు $4x^4 + 14x^3 + 8x^2 - 8x$.

సాధన $f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 24x = 3x(x^3 + 2x^2 - 4x - 8)$.

$g(x) = 4x^4 + 14x^3 + 8x^2 - 8x = 2x(2x^3 + 7x^2 + 4x - 4)$

$x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ మరియు $2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$ బహుపద సమాసములకు గ.సా.భా ను కనుగొనెదము.

$x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ ను భాజకముగా తీసుకొనిన.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2 \\ \hline x^3 + 2x^2 - 4x - 8 & 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4 \\ & 2x^3 + 4x^2 - 8x - 16 \\ \hline & \quad 3x^2 + 12x + 12 \\ & \quad (x^2 + 4x + 4) \\ & \qquad \text{శేషము} (\neq 0) \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} & \quad x - 2 \\ \hline x^2 + 4x + 4 & x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \\ & x^3 + 4x^2 + 4x \\ \hline & \quad -2x^2 - 8x - 8 \\ & \quad -2x^2 - 8x - 8 \\ \hline & \qquad 0 \longrightarrow \text{శేషము} \end{array}$$

$3x$ మరియు $2x$ యొక్క ఉమ్మడి కారణాంకము x.

కనుక, గ.సా.భా $(f(x), g(x)) = x(x^2 + 4x + 4)$.

అభ్యాసము 3.6

1. క్రింది వాటికి గరిష్ఠ సామాన్య భాజకమును కనుగొనుము.
   - (i) $7x^2yz^4$, $21x^2y^5z^3$
   - (ii) x^2y, x^3y, x^2y^2
   - (iii) $25bc^4d^3$, $35b^2c^5$, $45c^3d$
   - (iv) $35x^5y^3z^4$, $49x^2yz^3$, $14xy^2z^2$
2. క్రింది వాటికి గ.సా.భా ను కనుగొనుము.
   - (i) $c^2 - d^2$, $c(c - d)$
   - (ii) $x^4 - 27a^3x$, $(x - 3a)^2$
   - (iii) $m^2 - 3m - 18$, $m^2 + 5m + 6$
   - (iv) $x^2 + 14x + 33$, $x^3 + 10x^2 - 11x$
   - (v) $x^2 + 3xy + 2y^2$, $x^2 + 5xy + 6y^2$
   - (vi) $2x^2 - x - 1$, $4x^2 + 8x + 3$
   - (vii) $x^2 - x - 2$, $x^2 + x - 6$, $3x^2 - 13x + 14$
   - (viii) $x^3 - x^2 + x - 1$, $x^4 - 1$
   - (ix) $24(6x^4 - x^3 - 2x^2)$, $20(2x^6 + 3x^5 + x^4)$
   - (x) $(a - 1)^5(a + 3)^2$, $(a - 2)^2(a - 1)^3(a + 3)^4$
3. భాగాహార విశేష విధినుపయోగించి క్రింది జంట బహుపద సమాసములకు గ.సా.భా ను కనుగొనుము.
   - (i) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15$, $4x^2 - 16x + 12$
   - (ii) $3x^3 + 18x^2 + 33x + 18$, $3x^2 + 13x + 10$
   - (iii) $2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$, $6x^3 + 12x^2 + 6x + 12$
   - (iv) $x^3 - 3x^2 + 4x - 12$, $x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x$

3.5.3 కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజము (క.సా.గు) (Least common multiple (LCM))

రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ బీజీయ సమాసముల కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజము అనునది ఆ సమాసముల నొక్కొక్కదానిచే నిశ్శేషముగా భాగింపబడు కనిష్ఠ అంతస్తు కలిగిన సమాసమే యగును.

a^3, a^4 మరియు a^6 యొక్క ఉమ్మడి గుణిజములు $a^6, a^7, a^8, \cdots$ అన్ని ఉమ్మడి గుణిజములన్నింటిలోను అత్యంత చిన్న ఉమ్మడి గుణిజము a^6 అగును.

కనుక, a^4, a^3, a^6 యొక్క క.సా.గు a^6. అదేవిధముగా a^3b^4, ab^5, a^2b^7 యొక్క క.సా.గు a^3b^7. క.సా.గు ను కనుగొనుటకు మరికొన్ని ఉదాహరణలను గమనించెదము.

ఉదాహరణ 3.22

క్రింది వాటికి క.సా.గు కనుగొనుము.

(i) 90, 150, 225

(ii) $35a^2c^3b, 42a^3cb^2, 30ac^2b^3$

(iii) $(a-1)^5(a+3)^2, (a-2)^2(a-1)^3(a+3)^4$

(iv) $x^3+y^3, x^3-y^3, x^4+x^2y^2+y^4$

సాధన

(i)
$$90 = 2\times3\times3\times5 = 2^1\times3^2\times5^1$$
$$150 = 2\times3\times5\times5 = 2^1\times3^1\times5^2$$
$$225 = 3\times3\times5\times5 = 3^2\times5^2$$

$2^1\times3^2\times5^2$ లబ్ధము = 450 అనునది కావలసిన క.సా.గు అగును.

(ii) 35, 42 మరియు 30 క.సా.గు = 5×7×6 = 210.

కావున, కావలసిన క.సా.గు = $210\times a^3\times c^3\times b^3 = 210a^3c^3b^3$.

(iii) $(a-1)^5(a+3)^2, (a-2)^2(a-1)^3(a+3)^4$ ల క.సా.గు $(a-1)^5(a+3)^4(a-2)^2$

(iv) మొదటగా, ఇవ్వబడిన ప్రతి సమాసమునకు కారణాంకములు కనుగొనుము.

$$x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$
$$x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$x^4+x^2y^2+y^4 = (x^2+y^2)^2-x^2y^2 = (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

కావున, క.సా.గు $= (x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$= (x^3+y^3)(x^3-y^3) = x^6-y^6$.

అభ్యాసము 3.7

క్రింది వాటికి క.సా.గు కనుగొనుము.

1. x^3y^2, xyz
2. $3x^2yz, 4x^3y^3$
3. a^2bc, b^2ca, c^2ab
4. $66a^4b^2c^3, 44a^3b^4c^2, 24a^2b^3c^4$
5. $a^{m+1}, a^{m+2}, a^{m+3}$
6. x^2y+xy^2, x^2+xy
7. $3(a-1), 2(a-1)^2, (a^2-1)$
8. $2x^2-18y^2, 5x^2y+15xy^2, x^3+27y^3$
9. $(x+4)^2(x-3)^3, (x-1)(x+4)(x-3)^2$
10. $10(9x^2+6xy+y^2), 12(3x^2-5xy-2y^2), 14(6x^4+2x^3)$.

3.5.4 క.సా.గు మరియు గ.సా.భా ల మధ్య గల సంబంధము (Relation between LCM and GCD)

రెండు ధన పూర్ణాంకముల లబ్ధము వాటి క.సా.గు మరియు గ.సా.భా ల లబ్ధమునకు సమానము. ఉదాహరణకు, $21\times35 = 105\times7$. ఇక్కడ (21, 35) క.సా.గు = 105 మరియు (21, 35) గ.సా.భా = 7. ఇదే పద్ధతిలో క్రింది ఫలితములను గమనించుము:

ఏవేని రెండు బహుపద సమాసముల లబ్ధము, వాటి క.సా.గు మరియు గ.సా.భా ల లబ్ధమునకు సమానము.

అవి, $f(x)\times g(x)$ = క.సా.గు $(f(x), g(x))\times$ గ.సా.భా $(f(x), g(x))$.

ఒక ఉదాహరణతో ఈ ఫలితమును న్యాయపరచెదము.

$f(x) = 12(x^4 - x^3)$ మరియు $g(x) = 8(x^4 - 3x^3 + 2x^2)$ అను రెండు బహుపద సమాసములు.

$$f(x) = 12(x^4 - x^3) = 2^2\times3\times x^3\times(x-1) \qquad (1)$$

$$g(x) = 8(x^4 - 3x^3 + 2x^2) = 2^3\times x^2\times(x-1)\times(x-2) \qquad (2)$$

(1) మరియు (2) ల నుండి,

క.సా.గు $(f(x), g(x)) = 2^3\times3^1\times x^3\times(x-1)\times(x-2) = 24x^3(x-1)(x-2)$

గ.సా.భా $(f(x), g(x)) = 4x^2(x-1)$

కావున, క.సా.గు × గ.సా.భా $= 24x^3(x-1)(x-2)\times4x^2(x-1)$

$$= 96x^5(x-1)^2(x-2) \qquad (3)$$

అలాగే, $f(x)\times g(x) = 12x^3(x-1)\times8x^2(x-1)(x-2)$

$$= 96x^5(x-1)^2(x-2) \qquad (4)$$

(3) మరియు (4) ల నుండి క.సా.గు × గ.సా.భా = $f(x)\times g(x)$ పొందగలము.

కనుక, రెండు బహుపద సమాసముల క.సా.గు మరియు గ.సా.భాల లబ్ధమునకు, ఆ రెండు సమాసముల లబ్ధమునకు సమానమగును. ఇంకనూ, $f(x)$, $g(x)$ మరియు క.సా.గు మరియు గ.సా.భా లలో ఒకటి ఇచ్చినట్లయిన మరొకటి సందిగ్ధము లేక కనుగొనవచ్చును. ఎందుకనగా క.సా.గు మరియు గ.సా.భా ఏకాంకములగును. –1 అను కారణాంకము తప్ప

ఉదాహరణ 3.23

$x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 26x + 56$ మరియు $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28$ యొక్క గ.సా.భా $x^2 + 5x + 7$. వాటి క.సా.గు కనుగొనుము.

సాధన $f(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 26x + 56$ మరియు $g(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28$

గ.సా.భా $x^2 + 5x + 7$ ఇవ్వబడినది. గ.సా.భా × క.సా.గు $= f(x)\times g(x)$.

$$\text{కనుక, క.సా.గు} = \frac{f(x)\times g(x)}{\text{గ.సా.భా}} \qquad (1)$$

ఇపుడు , $f(x)$ మరియు $g(x)$ రెండింటిని గ.సా.భా తో భాగించుము.

ఇపుడు , $f(x)$ ను గ.సా.భా తో భాగించుము.

	1	-2	8		
1 5 7	1	3	5	26	56
	1	5	7		
		-2	-2	26	
		-2	-10	-14	
			8	40	56
			8	40	56
				0	

గ.సా.భా చే $f(x)$ ను భాగించునపుడు, భాగఫలము $x^2 - 2x + 8$ ఏర్పడును.

(1) $\Longrightarrow$ క.సా.గు = $(x^2 - 2x + 8)\times g(x)$

కనుక, క.సా.గు = $(x^2 - 2x + 8)(x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28)$.

గమనిక

పై సమస్యలో, మనకు కావలసిన క.సా.గు పొందుటకు $g(x)$ ను గ.సా.భా చే భాగించి మరియు భాగఫలమును $f(x)$ చే గుణించుము.

ఉదాహరణ 3.24

రెండు బహుపదసమాసముల గ.సా.భా మరియు క.సా.గు క్రమముగా $x+1$ మరియు $x^6 - 1$. $x^3 + 1$ ఒక బహుపద సమాసమైన, మరొకటి కనుగొనుము.

సాధన గ.సా.భా = $x + 1$ మరియు క.సా.గు = $x^6 - 1$ ఇవ్వబడినది.

$f(x) = x^3 + 1$ అనుకొనిన.

క.సా.గు × గ.సా.భా = $f(x)\times g(x)$

$$\Longrightarrow \quad g(x) = \frac{\text{క.సా.గు × గ.సా.భా}}{f(x)} = \frac{(x^6 - 1)(x + 1)}{x^3 + 1}$$

$$= \frac{(x^3 + 1)(x^3 - 1)(x + 1)}{x^3 + 1} = (x^3 - 1)(x + 1)$$

కాబట్టి , $g(x) = (x^3 - 1)(x + 1)$.

అభ్యాసము 3.8

1. క్రింది బహుపద సమాసములకు క.సా.గు ను కనుగొనుము

(i) $x^2 - 5x + 6,\ x^2 + 4x - 12$ వీటి గ.సా.భా $x - 2$.

(ii) $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3,\ x^4 + 2x^2 + x + 2$ వీటి గ.సా.భా $x^2 + x + 1$.

(iii) $2x^3 + 15x^2 + 2x - 35,\ x^3 + 8x^2 + 4x - 21$ వీటి గ.సా.భా $x + 7$.

(iv) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 5,\ 2x^4 - x^3 - 10x^2 - 11x + 8$ వీటి గ.సా.భా $2x - 1$.

2. క.సా.గు, గ.సా.భా మరియు ఒక బహుపద సమాసము $p(x)$ క్రమముగా క్రింద ఇవ్వబడినవి. మరొక బహుపద సమాసము $q(x)$ ను కనుగొనుము.

(i) $(x+1)^2(x+2)^2,\ (x+1)(x+2),\ (x+1)^2(x+2)$.

(ii) $(4x+5)^3(3x-7)^3,\ (4x+5)(3x-7)^2,\ (4x+5)^3(3x-7)^2$.

(iii) $(x^4-y^4)(x^4+x^2y^2+y^4),\ x^2-y^2,\ x^4-y^4$.

(iv) $(x^3-4x)(5x+1),\ (5x^2+x),\ (5x^3-9x^2-2x)$.

(v) $(x-1)(x-2)(x^2-3x+3),\ (x-1),\ (x^3-4x^2+6x-3)$.

(vi) $2(x+1)(x^2-4),\ (x+1),\ (x+1)(x-2)$.

3.6 అకరణీయ సమాసములు (Rational expressions)

రెండు పూర్ణాంకములు m మరియు $n \neq 0$, అయినపుడు $\frac{m}{n}$ భిన్నరూపంను అకరణీయ సంఖ్య అని నిర్వచించబడెను. అదే విధముగా, రెండు బహుపద సమాసములు $p(x)$ మరియు $q(x)$ అనునవి $\frac{p(x)}{q(x)}$ అను భిన్నరూపమును అకరణీయ సమాసము అందురు. ఇక్కడ, $q(x)$ అనునది శూన్యేతర బహుపదసమాసమగును.

ప్రతి బహుపద సమాసము $p(x)$ ఒక అకరణీయ సమాసము. ఎందుకనగా, $p(x)$ ను $\frac{p(x)}{1}$ గా వ్రాయవచ్చును. ఇక్కడ '1' స్థిరాంక బహుపద సమాసము అయినప్పటికీ, ఒక అకరణీయ సమాసము ఒక బహుపద సమాసము కానవసరము లేదు.

ఉదాహరణకు, $\frac{x}{x^2+1}$ అనునది అకరణీయ సమాసము కానీ ఒక బహుపద సమాసము కాదు. అకరణీయ సమాసములకు కొన్ని ఉదాహరణలు $2x+7,\ \frac{3x+2}{x^2+x+1},\ \frac{x^3+\sqrt{2}x+5}{x^2+x-\sqrt{3}}$.

3.6.1 అకరణీయ సంఖ్యల సూక్ష్మరూపము (అత్యల్ప రూపము) (Rational expressions in lowest form)

పూర్ణాంకముల గుణకములు కలిగిన రెండు బహుపద సమాసములు $p(x)$ మరియు $q(x)$, వాటి యొక్క గ.సా.భా 1 అయిన, $\frac{p(x)}{q(x)}$ ను సూక్ష్మరూపములో గల ఒక అకరణీయ సమాసమని చెప్పవచ్చును.

ఒక అకరణీయ సమాసము సూక్ష్మరూపములో లేనట్లయితే, లవము $p(x)$ మరియు హారము $q(x)$ ను, $p(x)$ మరియు $q(x)$ యొక్క గ.సా.భా చే భాగించుట ద్వారా సూక్ష్మీకరించవచ్చును.

కొన్ని ఉదాహరణలు గమనించెదము.

ఉదాహరణ 3.25

అకరణీయ సమాసములను సూక్ష్మీకరించుము.

(i) $\dfrac{5x+20}{7x+28}$ (ii) $\dfrac{x^3-5x^2}{3x^3+2x^4}$

(iii) $\dfrac{6x^2-5x+1}{9x^2+12x-5}$ (iv) $\dfrac{(x-3)(x^2-5x+4)}{(x-1)(x^2-2x-3)}$

సాధన

(i) $\dfrac{5x+20}{7x+28}=\dfrac{5(x+4)}{7(x+4)}=\dfrac{5}{7}$

(ii) $\dfrac{x^3-5x^2}{3x^3+2x^4}=\dfrac{x^2(x-5)}{x^3(2x+3)}=\dfrac{x-5}{x(2x+3)}$

(iii) $p(x)=6x^2-5x+1=(2x-1)(3x-1)$ మరియు

$q(x)=9x^2+12x-5=(3x+5)(3x-1)$

కావున. $\dfrac{p(x)}{q(x)}=\dfrac{(2x-1)(3x-1)}{(3x+5)(3x-1)}=\dfrac{2x-1}{3x+5}$

(iv) $f(x)=(x-3)(x^2-5x+4)=(x-3)(x-1)(x-4)$ మరియు

$g(x)=(x-1)(x^2-2x-3)=(x-1)(x-3)(x+1)$

కావున. $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{(x-3)(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-3)(x+1)}=\dfrac{x-4}{x+1}$

అభ్యాసము 3.9

క్రింది వాటిని సూక్ష్మీకరించుము.

(i) $\dfrac{6x^2+9x}{3x^2-12x}$ (ii) $\dfrac{x^2+1}{x^4-1}$ (iii) $\dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}$

(iv) $\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$ (v) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}$ (సూచన: $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2$)

(vi) $\dfrac{x^3+8}{x^4+4x^2+16}$ (vii) $\dfrac{2x^2+x-3}{2x^2+5x+3}$ (viii) $\dfrac{2x^4-162}{(x^2+9)(2x-6)}$

(ix) $\dfrac{(x-3)(x^2-5x+4)}{(x-4)(x^2-2x-3)}$ (x) $\dfrac{(x-8)(x^2+5x-50)}{(x+10)(x^2-13x+40)}$ (xi) $\dfrac{4x^2+9x+5}{8x^2+6x-5}$

(xii) $\dfrac{(x-1)(x-2)(x^2-9x+14)}{(x-7)(x^2-3x+2)}$

3.6.2 అకరణీయ సమాసముల గుణకారము మరియు భాగాహారము. (Multiplication and division of rational expressions)

$\frac{p(x)}{q(x)}$; $q(x) \neq 0$ మరియు $\frac{g(x)}{h(x)}$; $h(x) \neq 0$ అనునవి రెండు అకరణీయ సమాసములయిన,

(i) వాటి లబ్ధము $\frac{p(x)}{q(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)}$ ను $\frac{p(x) \times g(x)}{q(x) \times h(x)}$ గా తెలుపవచ్చును.

(ii) వాటి భాగాహారము $\frac{p(x)}{q(x)} \div \frac{g(x)}{h(x)}$ ను $\frac{p(x)}{q(x)} \times \frac{h(x)}{g(x)}$ గా తెలుపవచ్చును.

కనుక, $$\frac{p(x)}{q(x)} \div \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{p(x) \times h(x)}{q(x) \times g(x)}$$

ఉదాహరణ 3.26

(i) $\frac{x^3y^2}{9z^4}$ ను $\frac{27z^5}{x^4y^2}$ చే (ii) $\frac{a^3+b^3}{a^2+2ab+b^2}$ ను $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ చే (iii) $\frac{x^3-8}{x^2-4}$ ను $\frac{x^2+6x+8}{x^2+2x+4}$ చే గుణించుము.

సాధన

(i) $$\frac{x^3y^2}{9z^4} \times \frac{27z^5}{x^4y^2} = \frac{(x^3y^2)(27z^5)}{(9z^4)(x^4y^2)} = \frac{3z}{x}.$$

(ii) $$\frac{a^3+b^3}{a^2+2ab+b^2} \times \frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)(a+b)} \times \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)} = a^2-ab+b^2.$$

(iii) $$\frac{x^3-8}{x^2-4} \times \frac{x^2+6x+8}{x^2+2x+4} = \frac{x^3-2^3}{x^2-2^2} \times \frac{(x+4)(x+2)}{x^2+2x+4}$$

$$= \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)} \times \frac{(x+4)(x+2)}{x^2+2x+4} = x+4.$$

ఉదాహరణ 3.27

(i) $\frac{4x-4}{x^2-1}$ ను $\frac{x-1}{x+1}$ చే (ii) $\frac{x^3-1}{x+3}$ ను $\frac{x^2+x+1}{3x+9}$ చే (iii) $\frac{x^2-1}{x^2-25}$ ను $\frac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5}$ చే భాగించుము.

సాధన

(i) $$\frac{4x-4}{x^2-1} \div \frac{x-1}{x+1} = \frac{4(x-1)}{(x+1)(x-1)} \times \frac{(x+1)}{(x-1)} = \frac{4}{x-1}.$$

(ii) $$\frac{x^3-1}{x+3} \div \frac{x^2+x+1}{3x+9} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x+3} \times \frac{3(x+3)}{x^2+x+1} = 3(x-1).$$

(iii) $$\frac{x^2-1}{x^2-25} \div \frac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+5)(x-5)} \times \frac{(x+5)(x-1)}{(x-5)(x+1)}$$

$$= \frac{(x-1)(x-1)}{(x-5)(x-5)} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-10x+25}.$$

అభ్యాసము 3.10

1. క్రింది వాటిని గుణించి సూక్ష్మరూపములో సమాధానము వ్రాయుము.

(i) $\dfrac{x^2-2x}{x+2}\times\dfrac{3x+6}{x-2}$ (ii) $\dfrac{x^2-81}{x^2-4}\times\dfrac{x^2+6x+8}{x^2-5x-36}$

(iii) $\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-x-20}\times\dfrac{x^2-2x+4}{x^3+8}$ (iv) $\dfrac{x^2-16}{x^2-3x+2}\times\dfrac{x^2-4}{x^3+64}\times\dfrac{x^2-4x+16}{x^2-2x-8}$

(v) $\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-x-2}\times\dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2+5x-2}$ (vi) $\dfrac{2x-1}{x^2+2x+4}\times\dfrac{x^4-8x}{2x^2+5x-3}\times\dfrac{x+3}{x^2-2x}$

2. క్రింది వాటిని భాగించి మరియు సూక్ష్మరూపములో సమాధానము వ్రాయుము.

(i) $\dfrac{x}{x+1}\div\dfrac{x^2}{x^2-1}$ (ii) $\dfrac{x^2-36}{x^2-49}\div\dfrac{x+6}{x+7}$

(iii) $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-25}\div\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+7x+10}$ (iv) $\dfrac{x^2+11x+28}{x^2-4x-77}\div\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-2x-15}$

(v) $\dfrac{2x^2+13x+15}{x^2+3x-10}\div\dfrac{2x^2-x-6}{x^2-4x+4}$ (vi) $\dfrac{3x^2-x-4}{9x^2-16}\div\dfrac{4x^2-4}{3x^2-2x-1}$

(vii) $\dfrac{2x^2+5x-3}{2x^2+9x+9}\div\dfrac{2x^2+x-1}{2x^2+x-3}$

3.6.3 అకరణీయ సమాసముల కూడిక మరియు తీసివేత (Addition and subtraction of rational expressions)

$q(x)\neq 0$ మరియు $s(x)\neq 0$ గా ఉండు $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ మరియు $\dfrac{r(x)}{s(x)}$ అనునవి ఏవేని రెండు అకరణీయ సమాసములయిన, వాటి మొత్తము మరియు వ్యత్యాసము (వ్యవకలనము) ను

$$\frac{p(x)}{q(x)}\pm\frac{r(x)}{s(x)}=\frac{p(x).s(x)\pm q(x)r(x)}{q(x).s(x)}$$ గా తెలుపవచ్చును.

ఉదాహరణ 3.28

సూక్ష్మీకరింపుము (i) $\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x-1}{x-2}$ (ii) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x+1}$ (iii) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}+\dfrac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}$

సాధన

(i) $$\frac{x+2}{x+3}+\frac{x-1}{x-2}=\frac{(x+2)(x-2)+(x-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)}=\frac{2x^2+2x-7}{x^2+x-6}$$

(ii) $$\frac{x+1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}=\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{2x^2+2}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{2x^2+2}{x^3-x^2-x+1}$$

(iii) $$\frac{x^2-x-6}{x^2-9}+\frac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}=\frac{(x-3)(x+2)}{(x+3)(x-3)}+\frac{(x+6)(x-4)}{(x+3)(x-4)}$$

$$=\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+6}{x+3}=\frac{x+2+x+6}{x+3}=\frac{2x+8}{x+3}$$

ఉదాహరణ 3.29

$\dfrac{x^3-1}{x^2+2}$ నకు ఏ అకరణీయ సమాసమును కూడిన $\dfrac{2x^3-x^2+3}{x^2+2}$ ను పొందవచ్చును?

సాధన కావలసిన అకరణీయ సమాసమును $p(x)$ అనుకొనిన,

$$\frac{x^3-1}{x^2+2} + p(x) = \frac{2x^3-x^2+3}{x^2+2}$$

$$p(x) = \frac{2x^3-x^2+3}{x^2+2} - \frac{x^3-1}{x^2+2}$$

$$= \frac{2x^3-x^2+3-x^3+1}{x^2+2} = \frac{x^3-x^2+4}{x^2+2}$$

ఉదాహరణ 3.30

$\left(\dfrac{2x-1}{x-1} - \dfrac{x+1}{2x+1}\right) + \dfrac{x+2}{x+1}$ రెండు బహుపద సమాసముల ఒక భిన్నముగా సూక్ష్మరూపములో సూక్ష్మీకరించుము.

సాధన

$$\left(\frac{2x-1}{x-1} - \frac{x+1}{2x+1}\right) + \frac{x+2}{x+1}$$

$$= \left[\frac{(2x-1)(2x+1)-(x+1)(x-1)}{(x-1)(2x+1)}\right] + \frac{x+2}{x+1}$$

$$= \frac{(4x^2-1)-(x^2-1)}{(x-1)(2x+1)} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{3x^2}{(x-1)(2x+1)} + \frac{x+2}{x+1}$$

$$= \frac{3x^2(x+1)+(x+2)(x-1)(2x+1)}{(x^2-1)(2x+1)} = \frac{5x^3+6x^2-3x-2}{2x^3+x^2-2x-1}$$

అభ్యాసము 3.11

1. క్రింది వాటిలో రెండు బహుపద సమాసముల ఒక భిన్నముగా సూక్ష్మరూపములో సూక్ష్మీకరించుము.

(i) $\dfrac{x^3}{x-2} + \dfrac{8}{2-x}$ (ii) $\dfrac{x+2}{x^2+3x+2} + \dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$

(iii) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9} + \dfrac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}$ (iv) $\dfrac{x-2}{x^2-7x+10} + \dfrac{x+3}{x^2-2x-15}$

(v) $\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-3x+2} - \dfrac{2x^2-7x-4}{2x^2-3x-2}$ (vi) $\dfrac{x^2-4}{x^2+6x+8} - \dfrac{x^2-11x+30}{x^2-x-20}$

(vii) $\left[\dfrac{2x+5}{x+1} + \dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right] - \left(\dfrac{3x-2}{x-1}\right)$ (viii) $\dfrac{1}{x^2+3x+2} + \dfrac{1}{x^2+5x+6} - \dfrac{2}{x^2+4x+3}$.

2. $\dfrac{x^3-1}{x^2+2}$ నకు ఏ అకరణీయ సమాసమును కూడిన $\dfrac{3x^3+2x^2+4}{x^2+2}$ పొందవచ్చును?

3. $\dfrac{4x^3-7x^2+5}{2x-1}$ నుండి ఏ అకరణీయ సమాసమును తీసివేసిన $2x^2-5x+1$ ను పొందవచ్చును?

4. $P = \dfrac{x}{x+y}$, $Q = \dfrac{y}{x+y}$ అయిన $\dfrac{1}{P-Q} - \dfrac{2Q}{P^2-Q^2}$ ను కనుగొనుము.

3.7 వర్గమూలము (Square root)

$a \in \mathbb{R}$ అనునది ఒక ఋణాత్మకము కాని వాస్తవ సంఖ్య. a యొక్క వర్గమూలము b ఒక వాస్తవ సంఖ్య, దాని ప్రకారము $b^2 = a$ అగును. a ధనాత్మక వర్గమూలమును $\sqrt[2]{a}$ లేక $\sqrt{a}$ గా గుర్తించెదరు. $(-3)^2 = 9$ మరియు $(+3)^2 = 9$ రెండూ సత్యమైనప్పటికి, $\sqrt{\ }$ అను మూల చిహ్నము ఒక సంఖ్య యొక్క ధనాత్మకవర్గ మూలమును సూచించుటకు ఉపయోగింతురు. కావున $\sqrt{9} = 3$. అదేవిధంగా $\sqrt{121} = 11$, $\sqrt{10000} = 100$.

ఇదే పద్ధతిలో, ఏదేని సమాసము లేక బహుపద సమాసము యొక్క వర్గమూలము ఒక సమాసమే, దాని వర్గము ఇచ్చిన సమాసమునకు సమానము. బహుపద సమాసముల రీత్యా

$\sqrt{(p(x))^2} = |p(x)|$, ఇక్కడ $|p(x)| = \begin{cases} p(x), & p(x) \geq 0 \text{ అయినప్పుడు} \\ -p(x), & p(x) < 0 \text{ అయినప్పుడు} \end{cases}$.

ఉదాహరణకు $\sqrt{(x-a)^2} = |(x-a)|$, $\sqrt{(a-b)^2} = |(a-b)|$.

సామాన్యముగా, ఇవ్వబడిన ఒక బహుపద సమాసము యొక్క వర్గమూలము కనుగొనుటకు పరిచయమున్న రెండు పద్ధతులు క్రింద ఇవ్వబడినది. (i) కారణాంక పద్ధతి (ii) భాగాహార పద్ధతి.

ఈ అధ్యాయములో సమాసములు మరియు బహుపద సమాసముల రెండింటిని కారణాంకపరచుటకు వీలైన కొన్ని ఉదాహరణల ద్వారా కారణాంక పద్ధతిని నేర్చుకొనెదము.

3.7.1 కారణాంక పద్ధతి ద్వారా వర్గమూలము (Square root by factorization method)

ఉదాహరణ 3.31

(i) $121(x-a)^4(x-b)^6(x-c)^{12}$ (ii) $\dfrac{81x^4y^6z^8}{64w^{12}s^{14}}$ (iii) $(2x+3y)^2 - 24xy$

యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుము

సాధన

(i) $\sqrt{121(x-a)^4(x-b)^6(x-c)^{12}} = 11|(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^6|$

(ii) $\sqrt{\dfrac{81x^4y^6z^8}{64w^{12}s^{14}}} = \left|\dfrac{9x^2y^3z^4}{8w^6s^7}\right|$

(iii) $\sqrt{(2x+3y)^2 - 24xy} = \sqrt{4x^2 + 12xy + 9y^2 - 24xy} = \sqrt{(2x-3y)^2}$

$= |(2x-3y)|$

ఉదాహరణ 3.32

(i) $4x^2 + 20xy + 25y^2$ (ii) $x^6 + \dfrac{1}{x^6} - 2$

(iii) $(6x^2 - x - 2)(3x^2 - 5x + 2)(2x^2 - x - 1)$ యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుము

సాధన

(i) $\sqrt{4x^2 + 20xy + 25y^2} = \sqrt{(2x+5y)^2} = |(2x+5y)|$

(ii) $\sqrt{x^6 + \frac{1}{x^6} - 2} = \sqrt{\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)^2} = \left|\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)\right|$

(iii) మొదట బహుపద సమాసములను కారణాంక పరిచెదము.

$6x^2 - x - 2 = (2x+1)(3x-2)$; $3x^2 - 5x + 2 = (3x-2)(x-1)$ మరియు

$2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1)$

$\sqrt{(6x^2 - x - 2)(3x^2 - 5x + 2)(2x^2 - x - 1)}$

$= \sqrt{(2x+1)(3x-2)\times(3x-2)(x-1)\times(x-1)(2x+1)}$

$= \sqrt{(2x+1)^2(3x-2)^2(x-1)^2} = |(2x+1)(3x-2)(x-1)|$

అభ్యాసము 3.12

1. క్రింది వాటికి వర్గమూలము కనుగొనుము.

(i) $196a^6b^8c^{10}$ (ii) $289(a-b)^4(b-c)^6$ (iii) $(x+11)^2 - 44x$

(iv) $(x-y)^2 + 4xy$ (v) $121x^8y^6 \div 81x^4y^8$ (vi) $\frac{64(a+b)^4(x-y)^8(b-c)^6}{25(x+y)^4(a-b)^6(b+c)^{10}}$

2. క్రింది వాటికి వర్గమూలము కనుగొనుము.

(i) $16x^2 - 24x + 9$

(ii) $(x^2 - 25)(x^2 + 8x + 15)(x^2 - 2x - 15)$

(iii) $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy + 30yz - 20zx$

(iv) $x^4 + \frac{1}{x^4} + 2$

(v) $(6x^2 + 5x - 6)(6x^2 - x - 2)(4x^2 + 8x + 3)$

(vi) $(2x^2 - 5x + 2)(3x^2 - 5x - 2)(6x^2 - x - 1)$

3.7.2 భాగాహార పద్ధతి ద్వారా ఒక బహుపద సమాసము యొక్క వర్గమూలము కనుగొనుట (Finding the square root of a polynomial by division method)

ఒక బహుపద సమాసమును కారణాంకముల లబ్ధముగా తగ్గించుటకు సులభము కానియెడల ఈ పద్ధతి నుపయోగించి వర్గమూలమును కనుగొనెదము. అధిక అంతస్తులలో నున్న బహుపద సమాసముల వర్గమూలమును కనుగొనుటకు తగిన పద్ధతి భాగాహార పద్ధతి అగును.

ఒక ధనపూర్ణాంకము యొక్క వర్గమూలమును కనుగొను అదే పద్ధతిని, ఒక బహుపద సమాసము యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుటకు అనుసరించవలెను.

క్రింది ఉదాహరణలతో ఈ పద్ధతిని వివరించెదము.

(i) $\sqrt{66564}$

$$\begin{array}{r|l} & 2\ \ 5\ \ 8 \\ \hline 2 & 6\ \ 65\ \ 64 \\ & 4 \\ \hline 45 & 2\ \ 65 \\ & 2\ \ 25 \\ \hline 508 & 40\ \ 64 \\ & 40\ \ 64 \\ \hline & 0 \end{array}$$

(ii) $\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1}$ కనుగొనుము.

$p(x) = 9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1$ అనుకొనిన,

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 + 2x + 1 \\ \hline 3x^2 & 9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1 \\ & 9x^4 \\ \hline 6x^2 + 2x & 12x^3 + 10x^2 \\ & 12x^3 + 4x^2 \\ \hline 6x^2 + 4x + 1 & 6x^2 + 4x + 1 \\ & 6x^2 + 4x + 1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

కావున, $\sqrt{66564} = 258$ మరియు $\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = |3x^2 + 2x + 1|$

సూచనలు

(i) బహుపద సమాసమునందు గల x యొక్క ఘాతములను ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమములో వ్రాయునపుడు లేని పదములకు శూన్యమునుంచుము.

(ii) ఈ పద్ధతిని క్రిందివిధముగా పోల్చవచ్చును.

$$\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(a + b + c)^2}$$

కావున, a, b మరియు c లకు తగిన విధముగా కనుగొనవచ్చును.

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \\ &= a^2 + b^2 + 2ab + 2ac + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + (2a + b)b + (2a + 2b + c)c \\ &= (3x^2)^2 + (6x^2 + 2x)(2x) + (6x^2 + 4x + 1)(1)\end{aligned}$$

కనుక, $\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = |3x^2 + 2x + 1|$, ఇక్కడ $a = 3x^2$, $b = 2x$ మరియు $c = 1$

మరొపద్ధతి: వర్గమూలము కనుగొనుట, మొదటగా $9x^2 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1$ వ్రాయుము

$= (mx^2 + nx + l)^2 = m^2x^4 + 2mnx^3 + (n^2 + 2lm)xe + 2nlx + l^2$

ఇరువైపుల గుణకములను పోల్చి, సరియైన స్థిరాంకములు m, n, l లను కనుగొనుము

(iii) క్రింద ఇవ్వబడిన ఆసక్తికరమైన వాటిని గమనింపుము.

$25x^4 - 30x^3 + 29x^2 - 12x + 4 = 25x^4 - 30x^3 + 9x^2 + 20x^2 - 12x + 4$

$= (5x^2)^2 + [10x^2 + (-3x)](-3x) + (10x^2 - 6x + 2)2$

$= (5x^2)^2 + [2(5x^2) + (-3x)](-3x) + [2(5x^2) + 2(-3x) + 2]2$

$= a^2 + [2a + (-b)](-b) + [2a + 2(-b) + c]c$

$= a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2a(-b) + 2(-b)c + 2ac$

$= (a - b + c)^2$, where $a = 5x^2$, $b = 3x$, $c = 2$

$\therefore \quad \sqrt{25x^4 - 30x^3 + 29x^2 - 12x + 4} = |5x^2 - 3x + 2|$.

ఉదాహరణ 3.33

$x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36$ వర్గమూలమును కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన బహుపది x యొక్క ఘాతముల మూలంగా అవరోహణ క్రమంలో వున్నది.

	$x^2 - 5x + 6$
x^2	$x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36$
	x^4
$2x^2 - 5x$	$-10x^3 + 37x^2$
	$-10x^3 + 25x^2$
$2x^2 - 10x + 6$	$12x^2 - 60x + 36$
	$12x^2 - 60x + 36$
	0

కావున, $\sqrt{x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36} = |(x^2 - 5x + 6)|$

ఉదాహరణ 3.34

$x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 30x + 25$ వర్గమూలమును కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన బహుపదిని x ఘాతముల మూలంగా ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాసి, వర్గమూలమును కనుగొనవలెను.

	$5 - 3x + x^2$
5	$25 - 30x + 19x^2 - 6x^3 + x^4$
	25
$10 - 3x$	$-30x + 19x^2$
	$-30x + 9x^2$
$10 - 6x + x^2$	$10x^2 - 6x^3 + x^4$
	$10x^2 - 6x^3 + x^4$
	0

కావున, ఇవ్వబడిన బహుపద సమాసము వర్గమూలము $|x^2 - 3x + 5|$

ఉదాహరణ 3.35

$m - nx + 28x^2 + 12x^3 + 9x^4$ ఒక ఖచ్చిత వర్గమయిన, m మరియు n విలువలను కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన బహుపదిని x ఘాతములను అవరోహణ క్రమంలో వ్రాయవలెను.

$9x^4 + 12x^3 + 28x^2 - nx + m$.

	$3x^2 + 2x + 4$
$3x^2$	$9x^4 + 12x^3 + 28x^2 - nx + m$
	$9x^4$
$6x^2 + 2x$	$12x^3 + 28x^2$
	$12x^3 + 4x^2$
$6x^2 + 4x + 4$	$24x^2 - nx + m$
	$24x^2 + 16x + 16$
	0

కావున, ఇవ్వబడిన బహుపది ఖచ్చితమైన వర్గము, $n = -16$ మరియు $m = 16$.

అభ్యాసము 3.13

1. భాగాహార పద్ధతిలో క్రింద ఇవ్వబడిన బహుపదులకు వర్గమూలమును కనుగొనుము.
   (i) $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9$ (ii) $4x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 1$
   (iii) $9x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 2x + 1$ (iv) $4 + 25x^2 - 12x - 24x^3 + 16x^4$
2. క్రింద ఇవ్వబడిన బహుపదులు ఖచ్చిత వర్గములయిన a మరియు b విలువలు కనుగొనుము.
   (i) $4x^4 - 12x^3 + 37x^2 + ax + b$ (ii) $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - ax + b$
   (iii) $ax^4 + bx^3 + 109x^2 - 60x + 36$ (iv) $ax^4 - bx^3 + 40x^2 + 24x + 36$

3.8 వర్గ సమీకరణములు (Quadratic equations)

గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్త యూక్లిడ్ (Euclid) క్షేత్రగణితము ననుసరించి మన ప్రస్తుత రోజులలో పరిభాషగా ఉన్నటువంటి పొడవులను కనుగొని అభివృద్ధి పరిచెను. అవి వర్గసమీకరణముల సాధనలు అగును. వర్గసమీకరణముల సాధారణ రూపమును సాధించిన ఘనత ప్రాచీన భారత గణిత శాస్త్రవేత్తలకే చెందును. $ax^2 + bx = c$ అను రూపములో గల వర్గ సమీకరణమును సాధించుటకు బ్రహ్మగుప్త (క్రీ.శ 598 – 665) ఒక స్పష్టమైన సూత్రమును ఇచ్చెను. తరువాత శ్రీధర్ ఆచార్య (క్రీ.శ 1025) వర్గములను పూరించు విధానంలో వర్గసమీకరణం సాధించుటకు సూత్రమును రూపొందించెను. ప్రస్తుతం దీనిని వర్గసమీకరణ సూత్రము అని అంటున్నారు. (భాస్కరా II పేర్కొన్న విధముగా)

ఈ భాగంలో వర్గసమీకరణముల సాధనను వేర్వేరు పద్ధతులలో సాధించుటను నేర్చుకుంటారు. వర్గసమీకరణం ఉపయోగములను కొన్నింటిని చూడబోతున్నాం.

నిర్వచనము

x చలరాశి గల వర్గసమీకరణ రూపము $ax^2 + bx + c = 0$. ఇక్కడ a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 0$.

వాస్తవానికి, ఏదైనా సమీకరణ రూపం $p(x) = 0$, ఇక్కడ $p(x)$ అంతస్తు 2 గా గల బాహుపది ఒక వర్గసమీకరణం అగును. దాని సాధారణ రూపము $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

ఉదాహరణకు $2x^2 - 3x + 4 = 0$, $1 - x + x^2 = 0$ కొన్ని వర్గసమీకణములు.

3.8.1 కారణాంక పద్ధతి ద్వారా వర్గసమీకరణమును సాధించుట. (Solution of a quadratic equation by factorization method)

కారణాంక పద్ధతిని ఉపయోగించి వర్గసమీకరణమును ఏకఘాత కారణాంకములుగా కారణాంక పరచవచ్చును. ఇవ్వబడిన లబ్ధంలో ఏదేని ఒక కారణాంకము సున్న అయిన, మొత్తం లబ్ధము సున్న అగును. విపర్యంగా ఒక లబ్ధం సున్నకు సమానమైన, ఆ లబ్ధం యొక్క కొన్ని కారణాంకములు సున్నగా ఉండును. ఏదైనా తెలియని చలరాశిని కలిగియున్న కారణాంకము వుంటే అది సున్నకు సమానంగా ఉండవచ్చు. కనుక వర్గసమీకరణం సాధించుటలో x యొక్క విలువలను కనుగొనునపుడు ప్రతి కారణాంకము సున్న కావలయును. కనుక తెలియని చలరాశిని కనుగొనుటకు ప్రతి కారణాంకమును సున్నకు సమపరచవలయును.

ఉదాహరణ 3.36

$6x^2 - 5x - 25 = 0$ ను సాధించుము.

సాధన ఇవ్వబడినది $6x^2 - 5x - 25 = 0$.

మొదటగా, α మరియు β కనుగొనుటకు $\alpha + \beta = -5$ మరియు $\alpha\beta = 6 \times (-25) = -150$ ఇక్కడ x యొక్క గుణకము -5, కనుక $\alpha = -15$ మరియు $\beta = 10$ ఏర్పడును. తరువాత

$$6x^2 - 5x - 25 = 6x^2 - 15x + 10x - 25 = 3x(2x-5) + 5(2x-5)$$
$$= (2x-5)(3x+5).$$

కాబట్టి $2x - 5 = 0$ మరియు $3x + 5 = 0$ నుండి సాధన సమితి ఏర్పడును.

కనుక, $x = \frac{5}{2}$, $x = -\frac{5}{3}$.

కావున, సాధన సమితి $\left\{-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}\right\}$.

ఉదాహరణ 3.37

$\frac{6}{7x-21} - \frac{1}{x^2-6x+9} + \frac{1}{x^2-9} = 0$ ను సాధించుము.

సాధన ఇవ్వబడిన సమీకరణము వర్గ సమీకరణము కాదు. కాని ఈ సమీకరణమును సూక్ష్మీకరించి వర్గసమీకరణమును పొందవచ్చును.

$$\frac{6}{7(x-3)} - \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{1}{(x+3)(x-3)} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{6(x^2-9) - 7(x+3) + 7(x-3)}{7(x-3)^2(x+3)} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad 6x^2 - 54 - 42 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 16 = 0$$

$x^2 = 16$ ఒక వర్గ సమీకరణము. కావున దీనికి రెండు విలువలు కలవు. అవి $x = 4$ మరియు $x = -4$.

$\therefore$ సాధన సమితి $\{-4, 4\}$

ఉదాహరణ 3.38

$\sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x$, $3 - 4x > 0$ సాధించుము.

సాధన ఇవ్వబడినది $\sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x$

ఇరువైపుల వర్గము చేయగా, $24 - 10x = (3 - 4x)^2$ ఏర్పడును.

$$\Longrightarrow 16x^2 - 14x - 15 = 0 \qquad \Longrightarrow 16x^2 - 24x + 10x - 15 = 0$$

$\Longrightarrow (8x + 5)(2x - 3) = 0$ కావున $x = \frac{3}{2}$ లేక $-\frac{5}{8}$ ఏర్పడును.

$x = \frac{3}{2}$ అయినపుడు, $3 - 4x = 3 - 4\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ అగును. కాబట్టి, $x = \frac{3}{2}$ అనునది సమీకరణము సాధన కాదు.

$x = -\frac{5}{8}$ అయినపుడు, $3 - 4x > 0$ అగును. కాబట్టి సాధన సమితి $\left\{-\frac{5}{8}\right\}$.

సూచనలు

పై ఉదాహరణ లాంటి మూల సమీకరణములను సాధించుటకు మనము వర్గ ధర్మమును అనుసరించవలయును

$a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$ కాని, వర్గ ధర్మముచే పొందు క్రొత్త సమీకరణము సాధనలన్ని దత్త సమీకరణ సాధనలుగా ఉండునని ఖచ్చితముగా చెప్పలేము. ఉదాహరణకు $x = 5$ ను వర్గపరచగా $x^2 = 25$ అగును. ఇక్కడ $x = 5$ మరియు $x = -5$ అనునవి సాధనలుగా గలవు. కాని $x = -5$ అనునది దత్త సమీకరణ సాధన కాదు. ఇటువంటి సాధనను అనన్య (extraneous) సాధన అందురు.

కనుక, పై మూల సమీకరణమును ఇరువైపుల వర్గపరుచుటచే పొందు చివరి సమీకరణ సాధనలు దత్త సమీకరణ సాధనలుగా వుండునాయని పరీక్షించి నిర్ధారించవలయును. ఇది చాలా ముఖ్యమైనది, ఎందుకనగా దత్త సమీకరణము ఏ సాధనను కోల్పోరాదు. కాని దత్త సమీకరణమునకు గా, కొత్త సమీకరణంఉనకు మాత్రము మూలములుగా వుండు కొన్ని విలువలను పరిచయం చేయవచ్చును.

అభ్యాసము 3.14

క్రింది వర్గ సమీకరణములను కారణాంక పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.

(i) $(2x + 3)^2 - 81 = 0$ (ii) $3x^2 - 5x - 12 = 0$ (iii) $\sqrt{5}\,x^2 + 2x - 3\sqrt{5} = 0$

(iv) $3(x^2 - 6) = x(x + 7) - 3$ (v) $3x - \frac{8}{x} = 2$ (vi) $x + \frac{1}{x} = \frac{26}{5}$

(vii) $\frac{x}{x + 1} + \frac{x + 1}{x} = \frac{34}{15}$ (viii) $a^2b^2x^2 - (a^2 + b^2)x + 1 = 0$

(ix) $2(x + 1)^2 - 5(x + 1) = 12$ (x) $3(x - 4)^2 - 5(x - 4) = 12$

3.8.2 వర్గమును పూరించుట ద్వారా సాధించుట (Solution of a quadratic equation by completing square):

$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ రూపములో చివరి పదము $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ అనునది x గుణకములో సగము యొక్క వర్గమగును. కాని $x+\frac{b}{2}$ వర్గములో x^2+bx అనునది $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ అను పదమును కోల్పోవుచున్నది. కనుక x^2+bx రూపమునకు x గుణకములో సగము యొక్క వర్గమును ఈ సమాసమునకు కలిపినట్లయిన దాని ఫలితము **ద్విపద సమాసము** యొక్క వర్గముగా ఉండును. సాధారణంగా ఇటువంటి సంకలనమును **వర్గమును పూరించుట** అందురు. ఈ భాగంలో వర్గసమీకరణము యొక్క సాధనలను **వర్గమును పూరించు** విధానములో కనుగొనుటకు క్రింది సోపానములు పాటించవలయును.

సోపానము 1 x^2 గుణకము 1 అయిన 2 వ సోపానమును పాటించవలయును. అలాకానపుడు x^2 యొక్క గుణకముతో సమీకరణమును ఇరువైపుల భాగించుము. చలరాశితో కూడిన అన్ని పదములను సమీకరణము యొక్క ఒక ప్రక్కకు తెచ్చుకొనుము.

సోపానము 2 x యొక్క గుణకములో సగమును వర్గము చేసి సమీకరణమునకు ఇరువైపుల కూడుము.

$x = \mathrm{t} \Rightarrow x = \sqrt{t}$ (లేక) $x = -\sqrt{t}$ ఇక్కడ t ఋణేతరసంఖ్య.

దీనిని సాధించుటకు వర్గమూల ధర్మమును ఉపయోగించుము.

ఉదాహరణ 3.39

$5x^2 - 6x - 2 = 0$ వర్గసమీకరణంను వర్గము పూరించు విధానములో సాధించుము.

సాధన ఇవ్వబడిన వర్గసమీకరణం $5x^2 - 6x - 2 = 0$

$\Longrightarrow \quad x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{2}{5} = 0$ (ఇరువైపుల 5 తో భాగించుము)

$\Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3}{5}\right)x = \frac{2}{5}$ (x గుణకములో సగము $\frac{3}{5}$)

$\Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3}{5}\right)x + \frac{9}{25} = \frac{9}{25} + \frac{2}{5}$ ($\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ ను ఇరువైపుల కూడుము)

$\Longrightarrow \quad \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{19}{25}$

$\Longrightarrow \quad x - \frac{3}{5} = \pm\sqrt{\frac{19}{25}}$ (ఇరువైపుల వర్గమాలము తీయుము)

కనుక, $\quad x = \frac{3}{5} \pm \frac{\sqrt{19}}{5} = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{5}$.

కావున, సాధన సమితి $\left\{\frac{3+\sqrt{19}}{5}, \frac{3-\sqrt{19}}{5}\right\}$.

ఉదాహరణ 3.40

$a^2x^2 - 3abx + 2b^2 = 0$ సమీకరణమును వర్గము పూరించు విధానములో సాధించుము.

సాధన

$$a^2x^2 - 3abx + 2b^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - \frac{3b}{a}x + \frac{2b^2}{a^2} = 0 \qquad \Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3b}{2a}\right)x = \frac{-2b^2}{a^2}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3b}{2a}\right)x + \frac{9b^2}{4a^2} = \frac{9b^2}{4a^2} - \frac{2b^2}{a^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(x - \frac{3b}{2a}\right)^2 = \frac{9b^2 - 8b^2}{4a^2} \qquad \Longrightarrow \quad \left(x - \frac{3b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Longrightarrow \quad x - \frac{3b}{2a} = \pm\frac{b}{2a} \qquad \Longrightarrow \quad x = \frac{3b \pm b}{2a}$$

కాబట్టి, సాధన సమితి $\left\{\frac{b}{a}, \frac{2b}{a}\right\}$.

3.8.3 సూత్ర పద్ధతిలో వర్గసమీకరణమును సాధించుట (Solution of quadratic equation by formula method)

ఈ భాగంలో వర్గ సూత్రమును మనము ఉత్పాదించెదము. ఇది వర్గసమీకరణం మూలములు కనుగొనుటకు ఉపయోగకరంగా ఉండును. $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ అను వర్గ సమీకరణమును తీసుకొనెదము. ఈ సమీకరణమును

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \text{ గా వ్రాయుము.}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \qquad \Longrightarrow \quad x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x = -\frac{c}{a}$$

ఇరువైపుల $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ కూడగా, $x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

అవి, $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Longrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

కనుక, $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (1)$$

సాధన సమితి $\left\{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}$.

సమీకరణం (1) లో ఇవ్వబడిన సూత్రమును వర్గ సూత్రము అందురు.

ఇపుడు, వర్గసూత్రమునుపయోగించి కొన్ని వర్గ సమీకరణములను సాధించెదము.

ఉదాహరణ 3.41

$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{4}{x+4}$, ఇక్కడ $x + 1 \neq 0$, $x + 2 \neq 0$ మరియు $x + 4 \neq 0$ వర్గ సూత్రమును ఉపయోగించి సమీకరణమును సాధించుము.

సాధన ఇవ్వబడిన సమీకరణం వర్గసమీకరణం సామాన్యరూపంలో లేదని గమనించుము.

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}=\frac{4}{x+4}$$

$$\frac{1}{x+1} = 2\left[\frac{2}{x+4}-\frac{1}{x+2}\right] = 2\left[\frac{2x+4-x-4}{(x+4)(x+2)}\right]$$

$$\frac{1}{x+1} = 2\left[\frac{x}{(x+2)(x+4)}\right]$$

$$x^2+6x+8 = 2x^2+2x$$

కనుక, $x^2-4x-8 = 0$, ఇది వర్గసమీకరణము.

(క.సా.గు తీయుట ద్వారా పై సమీకరణము ఏర్పడును)

వర్గసూత్రమునుపయోగించి,

$$x = \frac{4\pm\sqrt{16-4(1)(-8)}}{2(1)} = \frac{4\pm\sqrt{48}}{2}$$

కనుక, $x = 2+2\sqrt{3}$ లేక $2-2\sqrt{3}$

కాబట్టి, సాధన సమితి = $\{2-2\sqrt{3}, 2+2\sqrt{3}\}$

అభ్యాసము 3.15

1 వర్గములను పూరించు పద్ధతిలో క్రింది వర్గసమీకరణములను సాధించుము.

(i) $x^2+6x-7=0$ (ii) $x^2+3x+1=0$

(iii) $2x^2+5x-3=0$ (iv) $4x^2+4bx-(a^2-b^2)=0$

(v) $x^2-(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}=0$ (vi) $\frac{5x+7}{x-1}=3x+2$

2. వర్గసూత్రమునుపయోగించి క్రింది వర్గసమీకరణములను సాధించుము.

(i) $x^2-7x+12=0$ (ii) $15x^2-11x+2=0$

(iii) $x+\frac{1}{x}=2\frac{1}{2}$ (iv) $3a^2x^2-abx-2b^2=0$

(v) $a(x^2+1)=x(a^2+1)$ (vi) $36x^2-12ax+(a^2-b^2)=0$

(vii) $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x-3}{x-4}=\frac{10}{3}$ (viii) $a^2x^2+(a^2-b^2)x-b^2=0$

3.8.4 వర్గసమీకరణములతో కూడిన సమస్యలను సాధించుట (Solution of problems involving quadratic equations)

ఈ భాగంలో పదజాలంతో తెలియజేయు కొన్ని సులభ సమస్యలను మరియు నిత్యజీవితంలో జరుగు కొన్ని సమస్యలను కలిగియున్న వర్గసమీకరణములు సాధించెదము. మొదట ఇచ్చిన వాక్యములను సమీకరణము రూపములోనికి మార్చుకుని ఆ తరువాత సాధించవలయును. చివరిగా ఇవ్వబడిన సమస్యకు సంబంధించిన సాధనను ఎన్నుకొనవలయును.

ఉదాహరణ 3.42

ఒక సంఖ్య మరియు వాటి విలోమముల మొత్తము $5\frac{1}{5}$ అయిన, ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన కావలసిన సంఖ్యను x అనుకొనుము. దాని విలోమము $\frac{1}{x}$.

నిబంధన ప్రకారము, $x + \frac{1}{x} = 5\frac{1}{5} \Longrightarrow \frac{x^2+1}{x} = \frac{26}{5}$

కావున $5x^2 - 26x + 5 = 0$

$\Longrightarrow 5x^2 - 25x - x + 5 = 0$

అనగా, $(5x-1)(x-5) = 0 \Longrightarrow x = 5$ లేక $\frac{1}{5}$

కాబట్టి కావలసిన సంఖ్యలు $5, \frac{1}{5}$.

ఉదాహరణ 3.43

ఒక త్రిభుజం యొక్క భూమి, దాని ఉన్నతికంటె 4 సెం.మీ ఎక్కువ గలదు. త్రిభుజ వైశాల్యము 48 చ.సెం.మీ అయిన దాని భూమి మరియు ఉన్నతిని కనుగొనుము.

సాధన త్రిభుజ ఉన్నతి x సెం.మీ అనుకొనుము

కనుక, త్రిభుజ భూమి $(x+4)$ సెం.మీ అగును,

త్రిభుజ వైశాల్యము = $\frac{1}{2}$ (భూమి)(ఎత్తు)

ఇవ్వబడిన నిబంధనరీత్యా $\frac{1}{2}(x+4)(x) = 48$

$\Longrightarrow x^2 + 4x - 96 = 0 \Longrightarrow (x+12)(x-8) = 0$

$\Longrightarrow x = -12$ లేక 8

కానీ $x = -12$ వర్తించదు (పొడవు ధన సంఖ్యగా వుండును)

$\therefore x = 8$ కావున, $x + 4 = 12$ అగును.

కనుక, త్రిభుజ ఉన్నతి 8 సెం.మీ మరియు త్రిభుజం భూమి 12 సెం.మీ.

ఉదాహరణ 3.44

ఒక కారు అనుకున్న సమయం కంటే 30 నిమిషాలు ఆలస్యంగా బయలుదేరెను. ఒక నిర్ణీతకాలములో అది గమ్యం చేరుటకు 150 కి.మీ దూరము వున్నది. సాధారణ వేగం కంటే 25 కి.మీ/గం వేగం పెంచిన దాని సాధారణ వేగమును కనుగొనుము.

సాధన కారు సాధారణ వేగము x కి.మీ/గంట.

పెరిగిన కారు వేగము $(x+25)$ కి.మీ/గంట.

మొత్తము దూరము = 150 కి.మీ; పట్టు కాలము = $\frac{\text{దూరము}}{\text{వేగము}}$.

కనుక T_1 మరియు T_2 లు అనునవి వరుసగా కారుకు నిర్ణయించిన కాలములో ఇచ్చిన దూరమును చేరుటకు తీసుకున్న కాలము మరియు తగ్గిన కాలమగును, (వేగము అధికమైనందున)

పై సమాచారము నుండి $T_1 - T_2 = \frac{1}{2}$ (30 నిమిషాలు = $\frac{1}{2}$ గంట)

$$\implies \frac{150}{x} - \frac{150}{x+25} = \frac{1}{2} \implies 150\left[\frac{x+25-x}{x(x+25)}\right] = \frac{1}{2}$$

$$\implies x^2 + 25x - 7500 = 0 \implies (x+100)(x-75) = 0$$

కనుక, $x = 75$ లేక -100, కాని $x = -100$ వర్తించదు.

కాబట్టి కారు సాధారణ వేగము = 75 కి.మీ/గంట.

అభ్యాసము 3.16

1. ఒక సంఖ్య మరియు దాని విలోమముల మొత్తము $\frac{65}{8}$ అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.
2. రెండు ధన సంఖ్యల వర్గముల భేదము 45. చిన్న సంఖ్య వర్గము, పెద్ద సంఖ్యకు నాలుగు రెట్లయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.
3. ఒక రైతు 100 చ.మీ వైశాల్యము కలిగిన దీర్ఘచతురస్రాకార కాయకూరల తోటను వేయవలెననుకొనెను. అతని దగ్గర 30 మీ కంచె తీగ మాత్రమే ఉన్నందున అతడు తన ఇంటిని దీర్ఘచతురస్రాకార తోట ఒక భుజమునకు తన ఇంటి ప్రహరీ గోడనుపయోగించి, మిగిలిన మూడు భుజములకు తీగను కంచెగా వేసెను. అయిన తోట యొక్క పరిమాణములను కనుగొనుము.
4. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార పొలము పొడవు 20 మీ మరియు వెడల్పు 14 మీ గా వున్నది. దీని చుట్టూ సమాన వెడల్పు గల బాట వైశాల్యము 111 చ.మీ కలిగియున్నది. వెలుపలి వైపు గల బాటవెడల్పును కనుగొనుము.
5. ఒక రైలు ఏకరీతి వేగముతో 90 కి.మీ దూరము ప్రయాణం చేసెను. వేగమును 15 కి.మీ/గంటకు పెంచిన, ప్రయాణ కాలం 30 నిమిషాలు తగ్గను. అయిన రైలు నిజ వేగమును కనుగొనుము.
6. నిశ్చల నీటిలో ఒక పడవ వేగము 15 కి.మీ/గంట. ఆ పడవ ప్రవాహపు దిశలో 30 కి.మీ. వెళ్ళి వ్యతిరేక దిశలో తిరిగి గమ్యస్థానం చేరుటకు 4 గం॥ 30 ని॥ పట్టును. అయిన నీటి ప్రవాహ వేగమును కనుగొనుము.
7. ఒక సంవత్సరమునకు ముందు ఒక మనిషి వయస్సు అతని కుమారుని వయస్సుకు 8 రెట్లుగా వుండెను. ఇపుడు అతని వయస్సు, కొడుకు వయస్సు వర్గమునకు సమానం అయిన ప్రస్తుతం వారి వయస్సుల ను కనుగొనుము.
8. ఒక చదరంగం బోర్డులో 64 సమాన చతురస్రములు కలవు. ప్రతి చతురస్రము వైశాల్యము 6.25 సెం.మీ^{2} మరియు ఆ బోర్డు చుట్టూ 2 సెం.మీ వెడల్పు గల హద్దు కలదు. చదరంగం బోర్డు భుజము యొక్క పొడవును కనుగొనుము.
9. ఒక పనిని పూర్తి చేయుటకు B కంటె A, 6 రోజులు తక్కువగా తీసుకొనును. A మరియు B లు ఇద్దరు కలిసి 4 రోజులలో ఆ పనిని ముగించిన. B ఒక్కడే ఆ పనిని ఎంత కాలములో ముగించును?
10. ఒక రైల్వే స్టేషన్ నుండి ఒకే సమయములో రెండు రైళ్ళు బయలుదేరెను. మొదటి రైలు పడమరకు మరియు రెండవ రైలు ఉత్తరం వైపుకు ప్రయాణం చేసెను. రెండవ రైలు కంటే మొదటి రైలు 5 కి.మీ/గంట వేగముతో ప్రయాణం చేసెను. 2 గం॥ తరువాత వాటి మధ్య దూరము 50 కి.మీ ఉండిన, ఒక్కొక్క రైలు యొక్క సరాసరి వేగమును కనుగొనుము.

3.8.5 వర్గసమీకరణము యొక్క మూలముల స్వభావము (Nature of roots of a quadratic equation)

$ax^2 + bx + c = 0$ సమీకరణము యొక్క మూలములు $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ గా ఇవ్వబడినది.

(i) $b^2 - 4ac > 0$, అయితే రెండు విభిన్న వాస్తవ మూలములను పొందగలము.

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{మరియు} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(ii) $b^2 - 4ac = 0$ అయితే, సమీకరణమునకు రెండు సమాన మూలములు గలవు. అవి $x = \frac{-b}{2a}$ అగును.

(iii) $b^2 - 4ac < 0$ అయితే, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ వాస్తవ సంఖ్య కాదు. కావున ఇచ్చినటువంటి వర్గ సమీకరణమునకు వాస్తవ మూలములు లేవు.

కావున, మూలముల స్వభావం $b^2 - 4ac$ విలువలపై ఆధారపడివుండును. $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలముల స్వభావంను $b^2 - 4ac$ సమాస విలువ తెలుపును. దీనిని వర్గ సమీకరణము విచక్షిణి (discrininat) అందురు. మరియు $\triangle$ అను గుర్తుతో సూచించుదురు.

విచక్షిణి $\triangle = b^2 - 4ac$	మూలముల స్వభావము
$\triangle > 0$	వాస్తవములు మరియు అసమానములు.
$\triangle = 0$	వాస్తవములు మరియు సమానములు.
$\triangle < 0$	వాస్తవ మూలములు కాదు (కల్పిత మూలములు).

ఉదాహరణ 3.45

ఈ క్రింది వర్గ సమీకరణములకు మూలముల స్వభావమును తెల్పుము.

(i) $x^2 - 11x - 10 = 0$ (ii) $4x^2 - 28x + 49 = 0$ (iii) $2x^2 + 5x + 5 = 0$

సాధన $ax^2 + bx + c = 0$, విచక్షిణి $\triangle = b^2 - 4ac$.

(i) $a = 1$, $b = -11$ మరియు $c = -10$.

విచక్షిణి $\triangle = b^2 - 4ac$

$= (-11)^2 - 4(1)(-10) = 121 + 40 = 161$

$\triangle > 0$ కనుక, మూలములు వాస్తవములు మరియు అసమానములు.

(ii) $a = 4$, $b = -28$ మరియు $c = 49$.

విచక్షిణి $\triangle = b^2 - 4ac$

$= (-28)^2 - 4(4)(49) = 0$

$\triangle = 0$ అయినందున, మూలములు వాస్తవములు మరియు సమానములు.

(iii) $a = 2$, $b = 5$ మరియు $c = 5$.

విచక్షిణి $\triangle = b^2 - 4ac$

$$= (5)^2 - 4(2)(5)$$
$$= 25 - 40 = -15$$

$\triangle < 0$ అయినందున, సమీకరణమునకు వాస్తవ మూలములు లేవు.

ఉదాహరణ 3.46

a మరియు b అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలకు మరియు c యొక్క అన్ని అకరణీయ సంఖ్యలకు $(a-b+c)x^2 + 2(a-b)x + (a-b-c) = 0$ సమీకరణం యొక్క మూలములు అకరణీయ సంఖ్యలు అగునని నిరూపించుము.

సాధన ఇవ్వబడిన సమీకరణం యొక్క రూపము $Ax^2 + Bx + C = 0$ అయిన,

$A = a - b + c$, $B = 2(a-b)$ మరియు $C = a - b - c$.

$Ax^2 + Bx + c = 0$ యొక్క విచక్షిణి

$$B^2 - 4AC = [2(a-b)]^2 - 4(a-b+c)(a-b-c)$$
$$= 4(a-b)^2 - 4[(a-b)+c][(a-b)-c]$$
$$= 4(a-b)^2 - 4[(a-b)^2 - c^2]$$

$\triangle = 4(a-b)^2 - 4(a-b)^2 + 4c^2 = 4c^2$, ఖచ్చిత వర్గము..

$\therefore \triangle > 0$ మరియు ఇది ఖచ్చితమైన వర్గము.

కాబట్టి, ఇవ్వబడిన సమీకరణం మూలములు అకరణీయ సంఖ్యలు.

ఉదాహరణ 3.47

$x^2 - 2x(1+3k) + 7(3+2k) = 0$ అను సమీకరణం వాస్తవములు మరియు సమాన మూలములు కలిగియుండిన k విలువను కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన సమీకరణం $x^2 - 2x(1+3k) + 7(3+2k) = 0$. (1)

(1) సమీకరణం $ax^2 + bx + c = 0$ రూపంలో కలదు.

ఇక్కడ, $a = 1$, $b = -2(3k+1)$, $c = 7(3+2k)$.

విచక్షిణి, $\triangle = b^2 - 4ac$

$$= (-2(3k+1))^2 - 4(1)(7)(3+2k)$$
$$= 4(9k^2 + 6k + 1) - 28(3+2k) = 4(9k^2 - 8k - 20)$$

ఇవ్వబడిన సమీకరణమునకు సమానమైన మూలములు కలవు. $\triangle = 0$ కనుక

$$\Longrightarrow \quad 9k^2 - 8k - 20 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad (k-2)(9k+10) = 0$$

కావున, $k = 2, \; -\frac{10}{9}$.

అభ్యాసము 3.17

1. క్రింది సమీకరణముల మూలముల స్వభావమును తెల్పుము.

   (i) $x^2 - 8x + 12 = 0$ (ii) $2x^2 - 3x + 4 = 0$

   (iii) $9x^2 + 12x + 4 = 0$ (iv) $3x^2 - 2\sqrt{6}\,x + 2 = 0$

   (v) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$ (vi) $(x - 2a)(x - 2b) = 4ab$

2. క్రింది సమీకరణముల మూలములు వాస్తవము మరియు సమానమైన k విలువలను కనుగొనుము.

   (i) $2x^2 - 10x + k = 0$ (ii) $12x^2 + 4kx + 3 = 0$

   (iii) $x^2 + k(7x - 8) + 65 = 0$ (iv) $(k + 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$

3. $x^2 + 2(a + b)x + 2(a^2 + b^2) = 0$ సమీకరణము యొక్క మూలములు అవాస్తవములు అని చూపుము.

4. $3p^2x^2 - 2pqx + q^2 = 0$ సమీకరణము యొక్క మూలములు వాస్తవములు కాదని చూపుము.

5. $(a^2 + b^2)x^2 - 2(ac + bd)x + c^2 + d^2 = 0$ ఇక్కడ $ad - bc \neq 0$ సమీకరణము యొక్క మూలములు సమానమైన, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ అని నిరూపించుము.

6. $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ సమీకరణ మూలములు వాస్తవములు మరియు $a = b = c$ కానపుడు ఆ మూలములు సమానములు కావు అని చూపుము.

7. $(1 + m^2)x^2 + 2mcx + c^2 - a^2 = 0$ సమీకరణం సమాన మూలములు కలిగివుంటే, $c^2 = a^2(1 + m^2)$ అని నిరూపించుము.

3.8.6 వర్గ సమీకరణము యొక్క మూలములు మరియు గుణకములకు మధ్యగల సంబంధము (Relations between roots and coefficients of a quadratic equation)

వర్గ సమీకరణం $ax^2 + bx + c = 0$, ఇక్కడ a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 0$. ఇచ్చిన సమీకరణ మూలములు α మరియు β.

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ మరియు } \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

మూలముల మొత్తము,
$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-b}{a} = -\frac{x \text{ గుణకము}}{x^2 \text{ గుణకము}}$$

మూలముల లబ్ధం,
$$\alpha\beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a} = \frac{\text{స్థిరాంకము}}{x^2 \text{ గుణకము}}$$

కావున, $ax^2 + bx + c = 0$ కు α, β లు మూలములు అయిన,

(i) మూలముల మొత్తము, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

(ii) మూలముల లబ్ధము, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

ఇచ్చిన మూలముల ద్వారా సమీకరణమును రూపొందించుట (Formation of quadratic equation when roots are given)

α మరియు β లు వర్గసమీకరణము యొక్క మూలములు అనుకొనుము.

$(x - \alpha)$ మరియు $(x - \beta)$ లు కారణాంకములు.

$\therefore \quad (x - \alpha)(x - \beta) = 0$

$\Longrightarrow \quad x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

అనగా, x^2 – (మూలముల మొత్తము)x + మూలముల లబ్ధము = 0

గమనిక

ఒకే మూలములతో అనంతమైన అనేక వర్గసమీకరణములు గలవు.

ఉదాహరణ 3.48

$3x^2 - 10x + k = 0$ సమీకరణమునకు ఒక మూలము $\frac{1}{3}$ అయిన, మరియొక మూలమును మరియు k విలువను కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన సమీకరణము $3x^2 - 10x + k = 0$.

α మరియు β రెండు మూలములు అనుకొనుము.

$\therefore \quad \alpha + \beta = \frac{-(-10)}{3} = \frac{10}{3}$ (1)

$\alpha = \frac{1}{3}$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా, $\beta = 3$

మరియు, $\alpha\beta = \frac{k}{3}, \quad \Longrightarrow \quad k = 3$

కనుక, మరియొక మూలము $\beta = 3$ మరియు $k = 3$.

ఉదాహరణ 3.49

$ax^2 - 5x + c = 0$ అను వర్గసమీకరణ మూలముల మొత్తము మరియు లబ్ధము రెండునూ10 కి సమానమైన, a మరియు c విలువలను కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన సమీకరణము $ax^2 - 5x + c = 0$.

మూలముల మొత్తము, $\frac{5}{a} = 10, \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{1}{2}$

మూలముల లబ్ధము, $\frac{c}{a} = 10$

$\Longrightarrow$ $c = 10a = 10 \times \frac{1}{2} = 5$

కావున, $a = \frac{1}{2}$ మరియు $c = 5$

గమనిక

$ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలములు α మరియు β అయిన α మరియు β కలిగిన కొన్ని సమాసములు $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha^2\beta^2$, $\alpha^2 - \beta^2$ మొదలగు వాటిని $\alpha + \beta$ మరియు $\alpha\beta$ యొక్క విలువలను ఉపయోగించి కనుగొనవచ్చును.

α మరియు β లతో కూడిన కొన్ని ఫలితములను వ్రాయుటను గమనించుము.

(i) $|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$

(ii) $\alpha^2 + \beta^2 = [(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta]$

(iii) $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = (\alpha + \beta)[\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}]$ ఇక్కడ $\alpha \geq \beta$

(iv) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

(v) $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$

(vi) $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = [(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta]^2 - 2(\alpha\beta)^2$

(vii) $\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \beta^2)$

ఉదాహరణ 3.50

$2x^2 - 3x - 1 = 0$ సమీకరణము మూలములు α మరియు β లు అయిన క్రింది వాటి విలువలను కనుగొనుము.

(i) $\alpha^2 + \beta^2$ (ii) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

(iii) $\alpha - \beta$ $\alpha > \beta$ అయిన. (iv) $\left(\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)$

(v) $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\alpha} + \beta\right)$ (vi) $\alpha^4 + \beta^4$ (vii) $\frac{\alpha^3}{\beta} + \frac{\beta^3}{\alpha}$

సాధన ఇవ్వబడిన సమీకరణము $2x^2 - 3x - 1 = 0$ (1)

సమీకరణము (1) ను $ax^2 + bx + c = 0$ గా పోల్చగా,

$a = 2, b = -3, c = -1$. సమీకరణము మూలములు α మరియు β గా ఇవ్వబడినది.

$\therefore \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2}$ మరియు $\alpha\beta = -\frac{1}{2}$

(i) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$

(ii) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{13}{4}\times(-2) = -\frac{13}{2}$

(iii) $\alpha-\beta = \sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$ ఇక్కడ $\alpha>\beta$, $= \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{4}+2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

(iv) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} = \frac{\frac{27}{8}+\frac{9}{4}}{\frac{-1}{2}} = -\frac{45}{4}$

(v) $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\alpha}+\beta\right) = \frac{(\alpha\beta+1)(1+\alpha\beta)}{\alpha\beta} = \frac{(1+\alpha\beta)^2}{\alpha\beta} = \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$

(vi) $\alpha^4+\beta^4 = (\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2 = \left(\frac{13}{4}\right)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{169}{16}-\frac{1}{2}\right) = \frac{161}{16}$.

(vii) $\frac{\alpha^3}{\beta}+\frac{\beta^3}{\alpha} = \frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha\beta} = \left(\frac{161}{16}\right)\left(-\frac{2}{1}\right) = -\frac{161}{8}$.

ఉదాహరణ 3.51

$7+\sqrt{3}$ మరియు $7-\sqrt{3}$ మూలములుగా గల వర్గ సమీకరణమును ఏర్పరుచుము.

సాధన ఇవ్వబడిన మూలములు $7+\sqrt{3}$ మరియు $7-\sqrt{3}$.

మూలముల మొత్తము $= 7+\sqrt{3}+7-\sqrt{3} = 14$.

మూలముల లబ్ధము $= (7+\sqrt{3})(7-\sqrt{3}) = (7)^2-(\sqrt{3})^2 = 49-3 = 46$.

కావలసిన సమీకరణము, x^2- (మూలముల మొత్తము)x + మూలముల లబ్ధము $= 0$

కనుక, కావలసిన సమీకరణము $x^2-14x+46 = 0$

ఉదాహరణ 3.52

$3x^2-4x+1=0$ సమీకరణ మూలము α మరియు β అయిన $\frac{\alpha^2}{\beta}$ మరియు $\frac{\beta^2}{\alpha}$ మూలములుగా గల వర్గసమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన $3x^2-4x+1=0$ సమీకరణము యొక్క మూలములు α మరియు β. అయినందున

$\alpha+\beta = \frac{4}{3}$, $\alpha\beta = \frac{1}{3}$

కావలసిన సమీకరణము యొక్క మూలముల మొత్తము $= \left(\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}\right) = \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$

$$= \frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^3-3\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{28}{9}$$

మరియు, మూలముల లబ్ధము $= \left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right) = \alpha\beta = \frac{1}{3}$

$\therefore$ కావలసిన సమీకరణము $x^2-\frac{28}{9}x+\frac{1}{3} = 0$ (లేక) $9x^2-28x+3=0$

అభ్యాసము 3.18

1. క్రింది సమీకరణముల మూలముల మొత్తము మరియు లబ్ధమును కనుగొనుము.

   (i) $x^2 - 6x + 5 = 0$ (ii) $kx^2 + rx + pk = 0$

   (iii) $3x^2 - 5x = 0$ (iv) $8x^2 - 25 = 0$

2. క్రింది మూలముల ద్వారా వర్గసమీకరణమును ఏర్పరుచుము.

   (i) 3 , 4 (ii) $3 + \sqrt{7}, 3 - \sqrt{7}$ (iii) $\frac{4 + \sqrt{7}}{2}, \frac{4 - \sqrt{7}}{2}$

3. $3x^2 - 5x + 2 = 0$ సమీకరణము యొక్క మూలములు α మరియు β అయిన, క్రింది వాటి విలువను కనుగొనుము.

   (i) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ (ii) $\alpha - \beta$ (iii) $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$

4. $3x^2 - 6x + 4 = 0$ సమీకరణం యొక్క మూలములు α మరియు β అయిన $\alpha^2 + \beta^2$ విలువను కనుగొనుము.

5. $2x^2 - 3x - 5 = 0$ సమీకరణం మూలములు α, β లు అయిన α^2 మరియు β^2 మూలములుగా గల సమీకరణమును కనుగొనుము.

6. $x^2 - 3x + 2 = 0$ యొక్క మూలములు α, β అయిన $-\alpha$ మరియు $-\beta$ మూలములుగా గల వర్గ సమీకరణమును ఏర్పరుచుము.

7. $x^2 - 3x - 1 = 0$ సమీకరణం మూలములు α మరియు β అయిన, $\frac{1}{\alpha^2}$ మరియు $\frac{1}{\beta^2}$ మూలములుగా గల వర్గసమీకరణమును కనుగొనుము.

8. $3x^2 - 6x + 1 = 0$ సమీకరణం మూలములు α మరియు β అయిన, క్రింది మూలములుగా గల వర్గసమీకరణమును కనుగొనుము.

   (i) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ (ii) $\alpha^2\beta, \beta^2\alpha$ (iii) $2\alpha + \beta, 2\beta + \alpha$

9. $4x^2 - 3x - 1 = 0$ యొక్క మూలముల వ్యుత్క్రమములుగా గల మూలముల సమీకరణమును కనుగొనుము.

10. $3x^2 + kx - 81 = 0$ సమీకరణము యొక్క ఒక మూలము ఇంకొక మూలమునకు వర్గము అయిన k విలువను కనుగొనుము.

11. $2x^2 - ax + 64 = 0$ సమీకరణము యొక్క ఒక మూలము ఇంకొక మూలమునకు రెండు రెట్లుగా నుండిన a విలువను కనుగొనుము.

12. $5x^2 - px + 1 = 0$ యొక్క మూలములు α మరియు β, $\alpha - \beta = 1$ అయిన p విలువను కనుగొనుము.

అభ్యాసము 3.19

సరియైన జవాబును ఎన్నుకొనుము.

1. $6x - 2y = 3$, $kx - y = 2$ అను వ్యవస్థ ఏకాంక సాధన కలిగియున్నట్లయిన,

   (A) $k = 3$ (B) $k \neq 3$ (C) $k = 4$ (D) $k \neq 4$

2. రెండు చలరాశులలో గల రెండు ఏకఘాత సమీకరణముల వ్యవస్థ విరుద్ధమైనది. అయిన వాటి రేఖా చిత్రములు

   (A) ఏకీభవించును (B) ఒక బిందువు వద్ద ఖండించును

   (C) ఏ బిందువు వద్ద ఖండించుకొనదు (D) x-అక్షమును ఖండించును

3. $x - 4y = 8$, $3x - 12y = 24$ సమీకరణముల వ్యవస్థ అనునది,

   (A) అనంత సాధనలు కలిగియుండును (B) సాధనలు ఉండవు

   (C) ఏకైక సాధనలుండును (D) సాధనలు ఉండచ్చు (లేక) ఉండకపోవచ్చు

4. $p(x) = (k+4)x^2 + 13x + 3k$ బహుపద సమాసము యొక్క ఒక శూన్యము మరొక శూన్యమునకు వ్యుత్క్రమము (reciprocal) అయిన k కు సమానము

   (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

5. $f(x) = 2x^2 + (p+3)x + 5$ బహుపద సమాసము యొక్క శూన్యముల మొత్తము శూన్యము అయిన, p విలువ

   (A) 3 (B) 4 (C) -3 (D) -4

6. $x^2 - 2x + 7$ ను $x+4$ చే భాగించునపుడు ఏర్పడు శేషము

   (A) 28 (B) 29 (C) 30 (D) 31

7. $x^3 - 5x^2 + 7x - 4$ ను $x-1$ చే భాగించునపుడు ఏర్పడు భాగఫలము

   (A) $x^2 + 4x + 3$ (B) $x^2 - 4x + 3$ (C) $x^2 - 4x - 3$ (D) $x^2 + 4x - 3$

8. $(x^3 + 1)$ మరియు $x^4 - 1$ ల గ.సా.భా

   (A) $x^3 - 1$ (B) $x^3 + 1$ (C) $x + 1$ (D) $x - 1$

9. $x^2 - 2xy + y^2$ మరియు $x^4 - y^4$ ల గ.సా.భా

   (A) 1 (B) $x+y$ (C) $x-y$ (D) $x^2 - y^2$

10. $x^3 - a^3$ మరియు $(x-a)^2$ ల క.సా.గు

    (A) $(x^3 - a^3)(x + a)$ (B) $(x^3 - a^3)(x - a)^2$

    (C) $(x - a)^2(x^2 + ax + a^2)$ (D) $(x + a)^2(x^2 + ax + a^2)$

11. $k \in \mathbb{N}$ లో ఉండు a^k, a^{k+3}, a^{k+5} ల క.సా.గు

(A) a^{k+9} (B) a^k (C) a^{k+6} (D) a^{k+5}

12. $\frac{x^2+5x+6}{x^2-x-6}$ అను అకరణీయ సమాసము యొక్క సూక్ష్మరూపము.

(A) $\frac{x-3}{x+3}$ (B) $\frac{x+3}{x-3}$ (C) $\frac{x+2}{x-3}$ (D) $\frac{x-3}{x+2}$

13. $\frac{a+b}{a-b}$ మరియు $\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$ అనునవి రెండు అకరణీయ సంఖ్యలయిన వాటి లబ్ధము

(A) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$ (B) $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}$ (C) $\frac{a^2-ab-b^2}{a^2+ab+b^2}$ (D) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab-b^2}$

14. $\frac{x^2-25}{x+3}$ ను $\frac{x+5}{x^2-9}$ చే భాగించిన, భాగఫలము =

(A) $(x-5)(x-3)$ (B) $(x-5)(x+3)$ (C) $(x+5)(x-3)$ (D) $(x+5)(x+3)$

15. $\frac{a^3}{a-b}$ ను $\frac{b^3}{b-a}$ తో కూడినట్లయిన, ఏర్పడు కొత్త సమాసము

(A) a^2+ab+b^2 (B) a^2-ab+b^2 (C) a^3+b^3 (D) a^3-b^3

16. $49\,(x^2-2xy+y^2)^2$ యొక్క వర్గమూలము

(A) $7|x-y|$ (B) $7(x+y)(x-y)$ (C) $7(x+y)^2$ (D) $7(x-y)^2$

17. $x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx$ యొక్క వర్గ మూలము

(A) $|x+y-z|$ (B) $|x-y+z|$ (C) $|x+y+z|$ (D) $|x-y-z|$

18. $121x^4y^8z^6(l-m)^2$ యొక్క వర్గ మూలము

(A) $11x^2y^4z^4|l-m|$ (B) $11x^4y^4|z^3(l-m)|$

(C) $11x^2y^4z^6|l-m|$ (D) $11x^2 4|z^3(l-m)|$

19. $ax^2+bx+c=0$ నకు సమాన మూలములున్నట్లయిన, c కు సమానమైనది

(A) $\frac{b^2}{2a}$ (B) $\frac{b^2}{4a}$ (C) $\frac{-b^2}{2a}$ (D) $\frac{-b^2}{4a}$

20. $x^2+5kx+16=0$ నకు వాస్తవ మూలములు లేనట్లయిన

(A) $k>\frac{8}{5}$ (B) $k>\frac{-8}{5}$ (C) $\frac{-8}{5}<k<\frac{8}{5}$ (D) $0<k<\frac{8}{5}$

21. 3 మూలమును కలిగిన వర్గసమీకరణము

(A) $x^2-6x-5=0$ (B) $x^2+6x-5=0$

(C) $x^2-5x-6=0$ (D) $x^2-5x+6=0$

22. $x^2 - ax + b = 0$ మరియు $x^2 + bx - a = 0$ సమీకరణముల ఉమ్మడి మూలము

(A) $\frac{c+a}{2b}$ (B) $\frac{c-a}{2b}$ (C) $\frac{c+b}{2a}$ (D) $\frac{a+b}{2c}$

23. $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,$ యొక్క మూలములు α, β అయిన, అసత్యమైన వాక్యము

(A) $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$ (B) $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

(C) $\alpha + \beta = \frac{b}{a}$ (D) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -\frac{b}{a}$

24. $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలములు α మరియు β అయిన, $\frac{1}{\alpha}$ మరియు $\frac{1}{\beta}$ మూలములు కలిగిన సమీకరణము

(A) $ax^2 + bx + c = 0$ (B) $bx^2 + ax + c = 0$

(C) $cx^2 + bx + a = 0$ (D) $cx^2 + ax + b = 0$

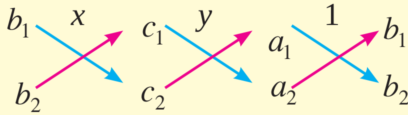
25. $b = a + c$ అయిన, $ax^2 + bx + c = 0$ అను సమీకరణమునకు

(A) వాస్తవ మూలములు కలవు (B) మూలములు లేవు

(C) సమాన మూలములు కలవు (D) వాస్తవ మూలములు లేవు

ముఖ్యాంశములు

- x మరియు y రెండు చలరాశులు కలిగియున్న ఏకఘాత సమీకరణముల పరిమిత సంఖ్య సమితిని, x మరియు y రెండు చలరాశులు గల ఏకఘాత సమీకరణముల వ్యవస్థ అందురు. దీనినే సమఘాత సమీకరణములు అనియు అందురు.
- మొదటగా చలరాశులలో ఒక దానిని తొలగించి, సాధించు పద్ధతిని తొలగించు పద్ధతి అందురు.
- $a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ను సాధించుటలో అడ్డుగుణకార పద్ధతినుపయోగించుటకు క్రింది బాణపు గుర్తుల పటము సహాయపడును.



- $p(k) = 0$ అయితే, k వాస్తవ సంఖ్య అనునది $p(x)$ అను బహుపద సమాసము యొక్క శూన్యము అనబడును.
- $p(x) = ax^2 + bx + c$ అను వర్గ సమాసముల శూన్యములు మరియు గుణకముల మధ్యగల ఆధారసంబంధములు

$$\text{శూన్యముల మొత్తము} = -\frac{b}{a} = -\frac{x \text{ గుణకము}}{x^2 \text{ గుణకము}}$$

$$\text{శూన్యముల లబ్ధము} = \frac{c}{a} = \frac{\text{స్థిరాంకము}}{x^2 \text{ గుణకము}}$$

- (i) $p(x)$ ఏవేని బహుపద సమాసమునకు, $p(a) = 0$ అయిన $x = a$ ఒకశూన్యమగును, విపర్యము సరియే
  (ii) $p(a) = 0$ అయిన, $p(x)$ కు $x - a$ ఒక కారణాంకమగును, విపర్యము సరియే
- రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ సమాసములను నిశ్శేషంగా భాగించు ఉమ్మడి భాజకము యొక్క అతి పెద్ద ఘాతమును కలిగిన భాజకమునే గ.సా.భా అగును.
- రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ సమాసములను నిశ్శేషంగా భాగించు ఉమ్మడి గుణిజము యొక్క అత్యంత చిన్న ఘాతము కలిగిన గుణిజమునే క.సా.గు అగును.
- ఏవేని రెండు బహుపద సమాసముల లబ్ధము, వాటి క.సా.గు మరియు గ.సా.భా ల లబ్ధమునకు సమానము.
- $a \in \mathbb{R}$ అనునది ఒక ఋణాత్మకము కాని వాస్తవ సంఖ్య. a యొక్క వర్గమూలము b ఒక వాస్తవ సంఖ్య, అది $b^2 = a$ అగును. a యొక్క వర్గమూలమును $\sqrt[2]{a}$ లేక $\sqrt{a}$ గుర్తించెదరు.
- $ax^2 + bx + c = 0$ అను రూపములో నున్న x చలరాశి గల వర్గ సమీకరణము ఇక్కడ a,b,c వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 0$ గా ఉండవలయును.
- (i) కారణాంక పద్ధతి (ii) వర్గములను పూరించు పద్ధతి (iii) వర్గసూత్రమును ఉపయోగించుట ద్వారా వర్గ సమీకరణములను సాధించవచ్చును.
- $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణము యొక్క మూలములు $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $b^2 - 4ac \geq 0$.
- $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణములో
  (i) $b^2 - 4ac > 0$ అయిన, రెండు మూలములు విభిన్న వాస్తవములు
  (ii) $b^2 - 4ac = 0$ అయిన, రెండు మూలములు సమానము.
  (iii) $b^2 - 4ac < 0$ అయిన, మూలములు అవాస్తవములు.

నీకు తెలుసా?

ఫెర్మాట్ కడపటి సిద్ధాంతము (Fermat's Last Theorem):

$x^n + y^n = z^n$ అను సమీకరణమునకు , $n > 2$ అయినపుడు పూర్ణాంకములలో సాధన లేదు. "నిజంగా ప్రసిద్ధిగాంచిన నిరూపణను నేను కనుగొంటిని. అయితే నిరూపణను పొందుపరచుటకు కావల సినంత అవధి లేదు" అని ఫెర్మాట్ వ్రాసెను. 1994 లో బ్రిటీష్ గణితశాస్త్రజ్ఞుడు ఆంద్రువైల్స్ (Andrew Wiles) దీనిని సాధించునంత వరకు 300 సంవత్సరములుగా ఎవరూ సాధించలేదు. ఉన్నత పాఠశాల విద్యార్థిగానున్నప్పుడు నగర గ్రంథాలయంనందు ఆంద్రూవైల్స్ ఈ సమస్యను తెలుసుకొనెను అనునది ఆసక్తికరమైన వార్త అగును.

4 మాత్రికలు

Number, place, and combination - the three intersecting but distinct spheres of thought to which all mathematical ideas admit of being referred - Sylvester

- పరిచయం
- మాత్రికల అమరిక
- మాత్రికల రకములు
- మాత్రికల సంకలనము, వ్యవకలనము మరియు గుణకారము
- మాత్రికల సమీకరణములు



జేమ్స్ జోసఫ్ సిల్‌వెష్టర్
(1814-1897)
ఇంగ్లాండు

ఇతను గణిత శాస్త్రము నందు మాత్రిక సిద్ధాంతము, స్థిర సిద్ధాంతము సంఖ్యా సిద్ధాంతము మరియు సంయోగాలకు మూలమైన రచనలను చేసెను. ఇవ్వబడిన మాత్రికతో అన్ని మాత్రికలు ఇచ్చుపుచ్చుకొనునని తెలిపెను. ఇతను 'విచక్షణి' లాంటి గణిత పదములను పరిచయము చేసెను. విజ్ఞానశాస్త్ర సాధనలకు ఉన్నత బహుమానము అయినటువంటి కోప్లే పతకమును 1880లో రాయల్ సొసైటి ఆఫ్ లండన్ వారిచే సిల్వస్టర్‌కు బహూకరించిరి, 1901లో రాయల్ సొసైటి ఆఫ్ లండన్ వారు గణిత శాస్త్ర పరిశోధనలను ప్రోత్సహించుటకు ఇతని జ్ఞాపకార్థమున సిల్వస్టర్ పతకమును ఏర్పాటుచేసిరి.

4.1 పరిచయం

మాత్రికలు అను ముఖ్యమైన గణితశాస్త్ర ఉద్దేశ్యము గూర్చి ఈ అధ్యాయములో చర్చించబోవుచున్నాము. ఇందులో మాత్రికలు మరియు మాత్రికా బీజగణిత ఆధారములు గూర్చి పరిచయము చేయబడినది.

18వ మరియు 19వ శతాబ్దములలో మాత్రికలు అనుభావనను సూత్రీకరించి అభివృద్ధి చేయబడెను. ప్రారంభమున, గుణ (జ్యామితి) రూపము మరియు రేఖీయ సమీకరణముల సాధనలు రూపాంతరము చెందుట ద్వారా అభివృద్ధి చెందినది. ప్రస్తుతము గణిత శాస్త్రమునందు మాత్రికలు చాలా శక్తివంతమైన ఉపకరణములగానున్నది. అనేక సంఖ్యలు ఒక వరుసక్రమములో ఒకే దాని క్రింద తీసుకొని, యిమడ్చి గణించుట యందు మాత్రికలు ఉపయోగపడుచున్నది. అనేక ప్రయోగాత్మక సమస్యలు సులభముగా సాధించుట యందు ఈ గణిత సూక్ష్మము ఉపయోగకరముగానున్నది.

క్రీ॥శ 1850వ సంవత్సరములో జేమ్స్‌జోసఫ్ సిల్‌వెస్టర్ చే 'మాట్రిక్స్' (మాత్రిక) అను పదము పరిచయము చేయబడినది. మాట్రిక్స్ అను లాటిన్ పదమును ఆంగ్లములో అలాగే ఉంచిరి. సాధారణముగా ఇది ఏదో ఒక చోట కొంత రూపం దాల్చినది లేక ఏర్పడినది.

క్రింద ఇవ్వబడిన x మరియు y అను చలరాశుల ఏకఘాత సమీకరణముల వ్యవస్థను తీసుకొనెదము.

$$3x - 2y = 4 \quad (1)$$

$$2x + 5y = 9 \quad (2)$$

తొలగించు పద్ధతి (గాస్‌పద్ధతి)ద్వారా ఈ వ్యవస్థ యొక్క సాధన (2,1) అని ముందే తెలుసుకొనియున్నాము. ఇచ్చట చలరాశులను ఉపయోగించక వాటి గుణకములు మాత్రమే ఉపయోగించవలెను. మాత్రికా బీజగణితము ఉపయోగించుట ద్వారా సాధనలు సాధించవచ్చును.

4.2 మాత్రికల అమరిక (Formation of Matrices)

మాత్రికల అమరిక యందు కొన్ని ఉదాహరణలు చూచెదము.

కుమారు వద్ద 10 కలములు కలవు. దీనిని (10) గా తెలుపవచ్చును. ( ) లో గల సంఖ్య కుమార్ వద్ద గల కలముల సంఖ్య అని అర్థము.

కుమార్ వద్ద 10 కలములు మరియు 7 పెన్సిల్‌లు కలవని అనుకొనిన, దీనిని (7, 10) గా తెలపవచ్చును. (10, 7) లో గల మొదటి సంఖ్య కలముల సంఖ్యను, రెండవది పెన్సిళ్ళ సంఖ్యను తెలియజేయును అని అర్థము.

క్రింది విషయములను గమనింపుము

కుమార్ మరియు అతని స్నేహితులు రాజు, గోపి వద్ద గల కలములు మరియు పెన్సిళ్ళ వివరములు క్రింద ఇవ్వబడినవి.

కుమారు వద్ద 10 కలములు, 7 పెన్సిళ్లు
రాజు వద్ద 8 కలములు, 4 పెన్సిళ్లు
గోపి వద్ద 6 కలములు, 5 పెన్సిళ్లు

పట్టిక రూపములో క్రింది విధముగా అమర్చవచ్చును

	కలములు	పెన్సిళ్ళు
కుమారు	10	7
రాజు	8	4
గోపి	6	5

వీటిని దీర్ఘచతురస్ర అమరికలో తెలుపవచ్చును. ఇందులోని విలువలు తగిన అంశములను సూచించును.

(i) $\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 8 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ← మొదటి అడ్డువరుస; ← రెండవ అడ్డువరుస; ← మూడవ అడ్డువరుస

↑ మొదటి నిలువ వరుస ↑ రెండవ నిలువ వరుస

ఇదే సమాచారమును ఈ పట్టిక రూపములో కూడా అమర్చవచ్చును.

	కుమారు	రాజు	గోపి
కలములు	10	8	6
పెన్సిళ్ళు	7	4	5

దీనిని దీర్ఘచతురస్రాకార అమరికలో తెలుపవచ్చును.

(ii) $\begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ← మొదటి అడ్డువరుస ← రెండవ అడ్డువరుస

↑ మొదటి నిలువ వరుస ↑ రెండవ నిలువ వరుస ↑ మూడవ నిలువ వరుస

అమరిక (i) లో మొదటి నిలువ వరుసలోగల విలువలు క్రమముగా కుమార్, రాజు మరియు గోపి వద్దగల కలముల సంఖ్యను తెలుపును. రెండవ నిలువ వరుసలోగల విలువలు క్రమముగా కుమారు, రాజు మరియు గోపి వద్ద గల పెన్సిళ్ళ సంఖ్యను తెలుపును.

అదే విధముగా అమరిక (ii) లో, మొదటి అడ్డువరుసలో గల విలువలు క్రమముగా కుమారు, రాజు మరియు గోపి వద్దగల కలముల సంఖ్యను తెలుపును. రెండవ అడ్డువరుసలో గల విలువలు క్రమముగా కుమారు, రాజు మరియు గోపి వద్ద గల పెన్సిళ్ళ సంఖ్యను తెలుపును.

సంఖ్యలను ఈ విధముగా అమర్చుటను లేక తెలుపు విధానమును మాత్రిక (matrix) అందురు.

నిర్వచనం

సంఖ్యలను దీర్ఘ చతురస్రాకార అమరికలో అడ్డువరుసలు మరియు నిలువ వరుసలుగా కుండలీకరణములు లేక చతురస్ర బ్రాకెట్ల మధ్య వ్రాసిన అమరికను మాత్రిక (matrix) అందురు.

సాధారణముగా ఒక మాత్రికను $A, B, X, Y, \cdots$ అను ఆంగ్ల పెద్ద అక్షరములతో సూచించుదురు. మాత్రికలలోని సంఖ్యలను విలువలు లేక మూలకములు అందురు. ఒక మాత్రికలోని క్షితిజ సమాంతరముగా నున్న అమరికను ఆ మాత్రిక అడ్డు వరుస అందురు. అదే విధముగా ఒక మాత్రికలోని క్షితిజ లంబముగా నున్న అమరికను ఆ మాత్రిక నిలువ వరుస అందురు.

మాత్రికలకు కొన్ని ఉదాహరణలు,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -8 & 9 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \text{ మరియు } C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.2.1 మాత్రిక సామాన్య రూపము (General Form of a Matrix))

m అడ్డు వరుసలు మరియు n నిలువ వరుసలు కలిగిన మాత్రిక A రూపము,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots$. అనునవి మాత్రిక మూలకములు పై మాత్రికను $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ లేక $A = (a_{ij})_{m\times n}$ అని వ్రాయవచ్చును. ఇందు $i = 1, 2, 3, \ldots, m$. మరియు $j = 1, 2, 3, \ldots, n$. a_{ij} అను మూలకము A మాత్రిక యొక్క i వ అడ్డు వరుస మరియు j వ నిలువ వరుసల అంతరఖండము నందు కలదు.

ఉదాహరణకు, $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ అయిన, $a_{23} = 1$, అను మూలకము రెండవ అడ్డువరుస మరియు మూడవ నిలువ వరుస యందు కలదు

అదే విధంగా , $a_{11} = 4$, $a_{12} = 5$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = 6$, $a_{22} = 2$, $a_{31} = 7$, $a_{32} = 8$ మరియు $a_{33} = 9$.

4.2.2 మాత్రిక తరగతి లేక పరిమాణం

m అడ్డువరుసలు n నిలువ వరుసలు కలిగియున్న మాత్రిక A యొక్క తరగతి లేక పరిమాణం $m \times n$ అని చెప్పవచ్చును. (m బై n అని చదువుము)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ అను మాత్రిక యందు 2 అడ్డ వరుసలు మరియు 3 నిలువ వరుసలు కలవు. కావున, A యొక్క తరగతి 2×3.

గమనిక

$m \times n$ మాత్రికలో మొదటది m అడ్డ వరుసల సంఖ్యను మరియు రెండవది n నిలువ వరుసల సంఖ్యను సూచిస్తుంది.

4.3 మాత్రికల రకములు (Types of matrices)

కొన్ని మాత్రికల రకములను గూర్చి నేర్చుకొనెదము.

(i) అడ్డ వరుస మాత్రిక (Row Matrix)

ఒకే ఒక అడ్డ వరుసను మాత్రము కలిగిన మాత్రికను అడ్డ వరుస మాత్రిక అందురు. అడ్డ వరుస మాత్రికను అడ్డ వరుస సదిశ అని కూడా అందురు. ఉదాహరణకు: $A = (5 \ \ 3 \ \ 4 \ \ 1)$ మరియు $B = (-3 \ \ 0 \ \ 5)$ అనునవి క్రమముగా 1×4 మరియు 1×3 తరగతి గల అడ్డ వరుస మాత్రికలు. సాధారణముగా $A = (a_{ij})_{1 \times n}$ అను అడ్డ వరుస తరగతి $1 \times n$.

(ii) నిలువ వరుస మాత్రిక (Column Matrix)

ఒకే ఒక నిలువ వరుసను మాత్రము కలిగిన మాత్రికను నిలువ వరుస మాత్రిక అందురు. దీనిని నిలువ వరుస సదిశ అని కూడా అందురు.

ఉదాహరణకు $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ మరియు $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ అనునవి క్రమముగా 2×1 మరియు 3×1 తరగతి గల నిలువ వరుస మాత్రికలు. సాధారణముగా, $A = [a_{ij}]_{m \times 1}$ అను నిలువ వరుస మాత్రిక తరగతి $m \times 1$.

(iii) చతురస్ర మాత్రిక (Square Matrix)

ఒక మాత్రికలో అడ్డ వరుసలు మరియు నిలువ వరుసలు సంఖ్య సమానమైన, ఆ మాత్రికను చతురస్ర మాత్రిక అందురు.

ఉదాహరణకు $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ మరియు $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -7 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ అను చతురస్ర మాత్రిక తరగతి క్రమముగా 2 మరియు 3. సాధారణముగా $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ అనునది m తరగతి గల చతురస్రమాత్రిక. చతురస్రమాత్రిక A లోని మూలకములు $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{mm}$ లను ప్రధాన వికర్ణములోని మూలకములు అందురు.

(iv) వికర్ణ మాత్రిక (Diagonal Matrix)

ప్రధాన వికర్ణమునకు పైన మరియు క్రింద గల మూలకములు శూన్యమునకు సమానముగా ఉండు చతురస్రమాత్రికను వికర్ణ మాత్రిక అందురు. ఉదాహరణకు $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ మరియు $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ అనునవి క్రమముగా 2 మరియు 3 తరగతులుగా నుండు వికర్ణమాత్రికలు. సాధారణముగా $a_{ij} = 0, i \neq j$ అయిన $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ ఒక వికర్ణమాత్రిక అని చెప్పవచ్చును.

> **గమనిక**
> వికర్ణ మాత్రికలోని ప్రధాన వికర్ణములో కొన్ని మూలకములు సున్నలుగా ఉండవచ్చును.

(v) అదిశా మాత్రిక (Scalar Matrix)

వికర్ణ మాత్రికలోని ప్రధాన వికర్ణములో అన్ని మూలకములు శూన్యేతరమైన స్థిరాంకములుగా సమానమైన, దానిని అదిశా మాత్రిక అందురు. ఉదాహరణకు,

$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ మరియు $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ అనునవి క్రమముగా 2 మరియు 3 తరగతిగా గల అదిశామాత్రికలు

సాధారణముగా, $a_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ k, i = j \end{cases}$ అయిన $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ అనునది ఒక అదిశామాత్రిక అగును. k అనునది ఒక అదిశ రాశి

(vi) యూనిట్ మాత్రిక (Unit Matrix)

వికర్ణ మాత్రికలోని ప్రధాన వికర్ణములో గల అన్ని మూలకములు 1 గానున్న ఆ మాత్రికను యూనిట్ మాత్రిక అందురు. 'n' తరగతి కలిగిన యూనిట్ మాత్రికను I_n గా సూచించెదరు. ఉదాహరణకు,

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ మరియు $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ అనునది క్రమముగా 2 మరియు 3 తరగతులుగా గల యూనిట్ మాత్రికలు. సాధారణముగా $a_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ అయిన $A = (a_{ij})_{n \times n}$ అను చతురస్రమాత్రిక ఒక యూనిట్ మాత్రిక అగును.

> **గమనిక**
> గుణకారమునకనుసరించి యూనిట్ మాత్రికను తత్సమ మాత్రిక అని అందురు. ప్రతి యూనిట్ మాత్రిక అనునది ఒక అదిశా మాత్రిక అని స్పష్టముగా చెప్పవచ్చును. కాని ఒక అదిశా మాత్రిక అనునది యూనిట్ మాత్రికగా ఉండవలసిన అవసరములేదు. సంఖ్యలలో 1 అను సంఖ్య పాత్రను యూనిట్ మాత్రిక కలిగియుండును.

(vii) శూన్య మాత్రిక లేక సున్న మాత్రిక (Null Matrix or Zero Matrix)

ఒక మాత్రికలోని అన్ని మూలకములు శూన్యములయిన ఆ మాత్రికను శూన్యమాత్రిక లేక సున్న మాత్రిక అందురు. దీనిని 'O' తో సూచించెదరు. ఉదాహరణకు $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ మరియు $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ అనునవి, క్రమముగా 2×3 మరియు 2×2 తరగతిగా గల శూన్య మాత్రికలు.

> **గమనిక**
>
> **(i)** ఒక శూన్యమాత్రిక, చతురస్రమాత్రికగా ఉండవలసిన అవసరము లేదు. **(ii)** సంఖ్యలలో సున్న అను సంఖ్య పాత్రను శూన్య మాత్రిక వహించును. **(iii)** ఒక మాత్రికకు అదే తరగతి గల శూన్య మాత్రికను కూడిన లేక తీసివేసిన ఆ మాత్రిక మారదు.

(viii) వ్యత్యయ మాత్రిక (Transpose Matrix)

నిర్వచనము: A మాత్రికలోని అడ్డ వరుసలు మరియు నిలువవరుసలును పరస్పరమార్పిడి చేసిన ఏర్పడు మాత్రికను A కి వ్యత్యయ మాత్రిక అందురు. దీనిని A^T అని వ్రాయుదురు (A ట్రాన్స్‌పోజ్ అని చదువుము).

ఉదాహరణకు, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, అయిన $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ అగును సాధారణముగా $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ అయిన $A^T = [b_{ij}]_{n\times m}$ అగును. ఇందు $b_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, 2, ..., n$ మరియు $j = 1, 2, ..., m$ అగును.

ఉదాహరణ 4.1

ఐదురోజుల వాతావరణములో గరిష్ట (H) మరియు కనిష్ట (L) ఉష్ణోగ్రతలు ఫారెన్‌హీట్‌లలో పట్టికలో చూపబడినది. మొదటి మరియు రెండవ అడ్డవరుసలు క్రమముగా గరిష్ట మరియు కనిష్ట ఉష్ణోగ్రతలను తెలుపు మాత్రికను వ్రాయుము మరియు అత్యధికోష్ణముగల రోజు ఏదో తెలుపుము

సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర
H 88	H 90	H 86	H 84	H 85
L 54	L 56	L 53	L 52	L 52

సాధన పై సమాచారమును మాత్రిక రూపములో ఈ విధముగా తెలుపవచ్చును.

$$A = \begin{matrix} & \text{సోమ} & \text{మంగళ} & \text{బుధ} & \text{గురు} & \text{శుక్ర} \\ H & 88 & 90 & 86 & 84 & 85 \\ L & 54 & 56 & 53 & 52 & 52 \end{matrix}. \text{ అనగా, } A = \begin{bmatrix} 88 & 90 & 86 & 84 & 85 \\ 54 & 56 & 53 & 52 & 52 \end{bmatrix}$$

మొదటి అడ్డ వరుస నుండి అత్యధికోష్ణము గల రోజు మంగళ వారము.

ఉదాహరణ 4.2

ప్రతీ ఆహార వస్తువులోగల కొవ్వులు పిండి పదార్థములు మరియు మాంసకృత్తుల మొత్తము గ్రాములలో క్రమముగా క్రింద ఇవ్వబడినది.

	వస్తువు I	వస్తువు II	వస్తువు III	వస్తువు IV
క్రొవ్వులు	5	0	1	10
పిండి పదార్థములు	0	15	6	9
మాంసకృత్తులు	7	1	2	8

ఈ సమాచారమును ఉపయోగించి 3×4 మరియు 4×3 మాత్రికలు వ్రాయుము.

సాధన పై సమాచారమును 3×4 మాత్రిక రూపములో ఈ విధముగా తెలుపవచ్చును.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 15 & 6 & 9 \\ 7 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$ ఇక్కడ నిలువ వరుసలు ఆహారపు వస్తువులను తెలుపును.

4×3 మాత్రికను $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 0 & 15 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ గా వ్రాయవచ్చును

ఇక్కడ అడ్డు వరుసలు ఆహారపు వస్తువులను తెలుపును.

ఉదాహరణ 4.3

$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 0 \\ 9 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. అనుకొనిన

(i) మాత్రిక యొక్క తరగతి (ii) a_{13} మరియు a_{42} మూలకములను

(iii) మూలకము 2 యొక్క స్థానమును కనుగొనుము

సాధన (1) A లో 4 అడ్డు వరుసలు మరియు 3 నిలువ వరుసలు ఉండుటచే A యొక్క తరగతి 4×3.

(2) a_{13} మూలకము అనునది మొదటి అడ్డువరుస మరియు మూడవ నిలువ వరుసలో కలదు $\therefore a_{13} = 8$.అదే విధముగా $a_{42} = -2$ ఈ మూలకము 4వ అడ్డువరుస మరియు 2వ నిలువ వరుసలోకలదు.

3) మూలకము 2 అనునది 2వ అడ్డువరుస మరియు 2వ నిలువ వరుసలో కలదు. $\therefore a_{22} = 2$.

ఉదాహరణ 4.4

$a_{ij} = |2i - 3j|$ గా మూలకములు ఉండునట్లు 2×3 మాత్రిక $A = [a_{ij}]$ ను నిర్మించుము.

సాధన సాధారణముగా 2×3 మాత్రిక క్రింది విధముగా ఉండును.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = |2i - 3j|$ ఇందు $i = 1, 2$ మరియు $j = 1, 2, 3$

$a_{11} = |2(1) - 3(1)| = 1$, $a_{12} = |2(1) - 3(2)| = 4$, $a_{13} = |2(1) - 3(3)| = 7$

$a_{21} = |2(2) - 3(1)| = 1$, $a_{22} = |2(2) - 3(2)| = 2$, $a_{23} = |2(2) - 3(3)| = 5$

కావున కావలసిన మాత్రిక $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

ఉదాహరణ 4.5

$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ అయిన, A^T మరియు $(A^T)^T$ ను కనుగొనుము

సాధన $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ మాత్రిక యొక్క అడ్డువరుసలు మరియు నిలువవరుసలును పరస్పర మార్పిడి ద్వారా A యొక్క వ్యత్యయ మాత్రిక A^T ను పొందగలము. కావున $A^T = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

అదే విధముగా, మాత్రిక A^T యొక్క అడ్డు వరుసలు మరియు నిలువ వరుసలు పర్వర మార్పిడి ద్వారా $(A^T)^T$ ను పొందగలము. కాబట్టి $(A^T)^T = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

గమనిక

పై ఉదాహరణ నుండి, $(A^T)^T = A$ అని చూచితిమి. ఏదైన మాత్రిక B కు $(B^T)^T = B$ అనునది సత్యమగును. $(kA)^T = kA^T$ మరియు k అనునది ఏదేని ఒక అదిశ రాశి

అభ్యాసము 4.1

1. వాటర్ థీమ్ పార్కులో ప్రవేశ టిక్కెట్ల ధరలు క్రింద ఇవ్వబడినది.

	సాధారణ రోజులకు (₹)	వారాంత రోజులకు (₹)
పెద్దలు	400	500
పిల్లలు	200	250
వృద్ధులు	300	400

పెద్దలు, పిల్లలు మరియు వయస్సు మళ్లిన పౌరుల ప్రవేశ టిక్కెట్ల ధరల మాత్రికలను వ్రాయుము మరియు ఆ మాత్రికల తరగతి కనుగొనుము.

2. ఒక నగరములో 6 మహోన్నత పాఠశాలలు, 8 ఉన్నత పాఠశాలలు మరియు 13 ప్రాథమిక పాఠశాలలు కలవు. ఈ వివరములను 3×1 మరియు 1×3 మాత్రికల రూపములో తెలుపుము

3. క్రిందివ్వబడిన మాత్రికల తరగతిని కనుగొనుము

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 6 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (iv) $(3 \quad 4 \quad 5)$ (v) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 9 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

4. ఒక మాత్రికలో 8 మూలకములు కలిగియున్న, ఎన్ని సాధ్యమైన తరగతులు అది కలిగియుండును?

5. ఒక మాత్రికలో 30 మూలకములున్న, సాధ్యమైన మాత్రికల తరగతులు కనుగొనుము.

6. $A = [a_{ij}]$ అను మాత్రికను క్రిందివ్వబడిన మూలకముల ద్వారా 2×2 మాత్రికను నిర్మింపుము.

(i) $a_{ij} = ij$ (ii) $a_{ij} = 2i - j$ (iii) $a_{ij} = \frac{i-j}{i+j}$

7. $A = [a_{ij}]$ అను మాత్రికకు క్రిందివ్వబడిన మూలకముల ద్వారా 3×2 మాత్రికను నిర్మింపుము.

(i) $a_{ij} = \frac{i}{j}$ (ii) $a_{ij} = \frac{(i-2j)^2}{2}$ (iii) $a_{ij} = \frac{|2i-3j|}{2}$

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 7 & 4 \\ 6 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ అయిన,

(i) ఈ మాత్రిక పరిమాణమును కనుగొనుము. (ii) a_{24} మరియు a_{32} లమూలకములను వ్రాయుము. (iii) 7 అను మూలకము ఏ అడ్డు మరియు నిలువ వరుసలలో కలదు.

9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, అయిన A యొక్క వ్యత్యయమును కనుగొనుము.

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$, అయిన $(A^T)^T = A$. అని సరిచూడుము.

4.4 మాత్రికల పరిక్రియలు (Operation on Matrices)

ఈ విభాగములో మాత్రికల సమానత్వము, అదిశచే మాత్రికను గుణించుట, మాత్రికల సంకలనము, వ్యవకలనము మరియు మాత్రికల గుణకారములను గూర్చి చర్చించెదము.

(i) మాత్రికల సమానత్వము (Equality of Matrices)

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ మరియు $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ అను రెండు మాత్రికలు సమానమనిన,

(i) అవి ఒకే పరిమాణమును కలిగియుండవలెను (ii) A లోని ప్రతిమూలకము B లోని అనురూప మూలకమునకు సమానముగా యుండవలెను, అనగా $a_{ij} = b_{ij}$ ప్రతి i మరియు j లకు.

ఉదాహరణకు, $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 9 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ మరియు $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ అను మాత్రికల తరగతులు వేర్వేరుగా ఉండుటచే ఈ మాత్రికలు సమానము కాదు. మరియు $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, ఇందు అనురూప మూలకములు సమానము కాదు.

ఉదాహరణ 4.6

$\begin{pmatrix} x & 5 & 4 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & z \\ 5 & y & 1 \end{pmatrix}$ అయిన x, y, z విలువలను కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన మాత్రికలు సమానమైనందున, వాటి అనురూప మూలకములు సమానమై యుండవలెను. అనురూపమూలకములను పోల్చిన. $x = 3$, $y = 9$, $z = 4$.అని పొందగలము.

ఉదాహరణ 4.7

సాధించుము : $\begin{pmatrix} y \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 2x \\ 31 + 4y \end{pmatrix}$

సాధన మాత్రికలు సమానమైనందున వాటి అనురూపమూలకములు సమానము. వీటి అనురూప మూలకముల ను పోల్చిన $y = 6 - 2x$ మరియు $3x = 31 + 4y$ అని పొందగలము.

$y = 6 - 2x$ ను మరొక సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించిన, $3x = 31 + 4(6 - 2x)$

$$3x = 31 + 24 - 8x$$

$\therefore \quad x = 5$ కావున $\quad y = 6 - 2(5) = -4.$

$x = 5$ మరియు $y = -4$

(ii) అదిశచే మాత్రికను గుణించుట (Multiplication of a Matrix by a Scalar)

నిర్వచనం

ఇవ్వబడిన మాత్రిక $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ మరియు అదిశరాశి (వాస్తవ సంఖ్య) k చే ఏర్పడు నూతన మాత్రిక $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ గా నిర్వచింపవచ్చు. ఇందు $b_{ij} = ka_{ij}$ ప్రతి i మరియు j లకు.

కావున అదిశ k చే A లోని ప్రతి మూలకమును గుణించిన B మాత్రికను పొంద వచ్చును దీనిని $B = kA.$ అని వ్రాయవచ్చును. ఈ గుణకారమునే అదిశా గుణకారము అందురు.

ఉదాహరణకు : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ అయిన $kA = k\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{pmatrix}$ అగును.

ఉదాహరణ 4.8

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ అయిన $3A$ ను కనుగొనుము

సాధన : A లోని ప్రతీ మూలకమును 3 చే గుణించగా $3A$ మాత్రిక వచ్చును.

$$3A = 3\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(-1) & 3(2) & 3(4) \\ 3(3) & 3(6) & 3(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 12 \\ 9 & 18 & -15 \end{pmatrix}$$

(iii) మాత్రికల సంకలనము (Addition of Matrices)

3 బాలురు మరియు 3 బాలికలు గణితము మరియు విజ్ఞాన శాస్త్రము నందు పొందిన మార్కులు క్రమముగా A మరియు B మాత్రికల ద్వారా క్రింద ఇవ్వబడినది.

గణితము: $A = \begin{pmatrix} 45 & 72 & 81 \\ 30 & 90 & 65 \end{pmatrix}$ బాలురు / బాలికలు

విజ్ఞాన శాస్త్రము: $B = \begin{pmatrix} 51 & 80 & 90 \\ 42 & 85 & 70 \end{pmatrix}$ బాలురు / బాలికలు

ప్రతి విద్యార్థి పొందిన మార్కులు మొత్తము కనుగొనుటకు A మరియు B యొక్క అనురూప మూలకములను కూడెదము.

$$A + B = \begin{pmatrix} 45 & 72 & 81 \\ 30 & 90 & 65 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 51 & 80 & 90 \\ 42 & 85 & 70 \end{pmatrix}$$ గా వ్రాయవచ్చును.

$$= \begin{pmatrix} 45+51 & 72+80 & 81+90 \\ 30+42 & 90+85 & 65+70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 & 152 & 171 \\ 72 & 175 & 135 \end{pmatrix}$$

ఈ చివరి మాత్రిక, గణితము మరియు విజ్ఞాన శాస్త్రము నందు మొదటి బాలుడు పొందిన మొత్తం మార్కులు 96 అని చూపుచున్నది. అదే విధముగా గణితము మరియు విజ్ఞానశాస్త్రము నందు చివరి బాలిక పొందిన మొత్తం మార్కులు 135 అని తెలుసుకొనవచ్చును.

కావున, ఒకే తరగతి గల రెండు మాత్రికల మొత్తము అనునది ఆ రెండు మాత్రికల అనురూప మూలకములను కూడగా ఏర్పడునని గమనించితిమి.

నిర్వచనం

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ మరియు $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ లు ఒకే తరగతి గల రెండు మాత్రికలు అయిన A మరియు B ల సంకలనము $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ మాత్రిక అగును. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall$ i మరియు j . మాత్రికలలో గల సంఖ్యలననుసరించి సంకల ప్రక్రియను నిర్వచింపబడునని గమనింపుము. A మరియు B అను రెండు మాత్రికల కూడికను $A+B$ చే గుర్తింతురు. వేర్వేరు తరగతులు గల మాత్రికల కూడికను నిర్వచింపలేము.

ఉదాహరణ 4.9

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \text{ మరియు } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$ $A+B$ లభించిన, దానిని కనుగొనుము.

సాధన A తరగతి 2×3 మరియు B తరగతి 2×2 అయినందున A మరియు B మాత్రికల సంకలనము సాధ్యముకాదు.

ఉదాహరణ 4.10

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ మరియు } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ అయిన, $A+B$ కనుగొనుము

సాధన A మరియు B లు ఒకే తరగతి 2×4 కలిగిన మాత్రికలు అయినందున A మరియు B ల సంకల నము నిర్వచించవచ్చును.

కావున $$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5+3 & 6-1 & -2+4 & 3+7 \\ 1+2 & 0+8 & 4+2 & 2+3 \end{pmatrix}$$

కనుక $$A + B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 & 10 \\ 3 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

(iv) ఋణాత్మక మాత్రిక (Negative of a Matrix)

మాత్రిక $A = [a_{ij}]_{mxn}$ యొక్క ఋణాత్మక మాత్రికను $-A$ గా సూచించెదరు. మరియు దీనిని $-A = (-1)A$. గా నిర్వచింపవచ్చు అనగా $-A = [b_{ij}]_{mxn}$. ఇందు $b_{ij} = -a_{ij}$ $\forall$ i మరియు j .

(v) మాత్రికల వ్యవకలనము (Subtraction of Matrices)

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ మరియు $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ ఒకే తరగతి గల రెండు మాత్రికలయిన $A - B$ ను $A - B = A + (-1)B$. గా నిర్వచింపవచ్చు, అనగా $A - B = [c_{ij}]$ ఇందు $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ $\forall$ i మరియు j

ఉదాహరణ 4.11

బరువులు తగ్గించు నిమిత్తమై ఆహార నియమావళి (diet) కార్యక్రమములో పాల్గొనడానికి ముందు నల ుగురు బాలురు మరియు నలుగురు బాలికల బరువులు కి॥గ్రా॥లలో మాత్రిక A నందు చూపబడినది. ఆహార నియమావళి కార్యక్రమము తరువాత వాటి అనురూప బరువుల మాత్రిక B నందు చూపబడినది.

$$A = \begin{pmatrix} 35 & 40 & 28 & 45 \\ 42 & 38 & 41 & 30 \end{pmatrix}\begin{matrix} \text{బాలురు} \\ \text{బాలికలు} \end{matrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 32 & 35 & 27 & 41 \\ 40 & 30 & 34 & 27 \end{pmatrix}\begin{matrix} \text{బాలురు} \\ \text{బాలికలు} \end{matrix}$$

బాలురు మరియు బాలికల తగ్గిన బరువులను కనుగొనుము

సాధన తగ్గిన బరువుల మాత్రిక $A - B = \begin{pmatrix} 35 & 40 & 28 & 45 \\ 42 & 38 & 41 & 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 32 & 35 & 27 & 41 \\ 40 & 30 & 34 & 27 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.5 మాత్రిక సంకలన ధర్మములు (Properties of matrix addition)

(i) మాత్రికల సంకలనం వినిమయము

ఒకే తరగతి కలిగిన ఏదేని రెండు మాత్రికలు A మరియు B అయిన, $A+B = B+A$ అగును.

(ii) మాత్రికల సంకలనం సాహచర్యం

ఒకే తరగతి కలిగిన ఏదేని మూడు మాత్రికలు A, B మరియు C అయిన

$A + (B + C) = (A + B) + C$ అగును.

(iii) మాత్రికల సంకలన తత్సమము

మాత్రికల సంకలనంలో శూన్య లేక సున్న మాత్రిక తత్సమమగును. మాత్రిక A యొక్క తరగతి $m \times n$ అయిన $A + O = O + A = A$ అగును, ఇందు 'O' అనునది $m \times n$ తరగతి గల శూన్య మాత్రిక అగును.

(iv) మాత్రికల సంకలన విలోమం

మాత్రిక A కు B అనునది సంకలన విలోమమైన, $B + A = A + B = O$ అగును.

$A + (-A) = (-A) + A = O$, అగుటచే $-A$ ని A యొక్క సంకలన విలోమం అందురు.

> **గమనిక**
>
> ఒక మాత్రిక యొక్క సంకలన విలోమం అనునది దాని ఋణాత్మక మాత్రిక అగును మరియు ఇది ఏకైకమగును.

అభ్యాసము 4.2

1. క్రింది మాత్రికా సమీకరణము నుండి x, y మరియు z విలువలు కనుగొనుము.

$$\begin{pmatrix} 5x+2 & y-4 \\ 0 & 4z+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. $\begin{pmatrix} 2x+y \\ x-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \end{pmatrix}$ అయిన x మరియు y లను సాధించుము.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$, అయిన A యొక్క సంకలన విలోమం కనుగొనుము.

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ మరియు $B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ అనుకొనిన $C = 2A + B$ అయిన మాత్రిక C ను కనుగొనుము.

5. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$ మరియు $B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ అయిన, $6A - 3B$ కనుగొనుము.

6. $a\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ అయిన, a మరియు b లను కనుగొనుము.

7. $2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ మరియు $3X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ అయిన, X మరియు Y కనుగొనుము.

8. $\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix}$ అయిన, x మరియు y లనుసాధించుము

9. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ మరియు $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ అయిన,

(i) $A + B = B + A$ (ii) $A + (-A) = O = (-A) + A$ యని సరిచూడుము.

10. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ మరియు $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ అయిన,

$A + (B + C) = (A + B) + C$ ని సరిచూడుము.

11. ఒక ఎలక్ట్రానిక్ కంపెనీవారు తమ మూడు దుకాణశాఖల యందు అమ్మిన ఒకొక్క ఎంటర్‌టైన్‌మెంట్ (వినోద) ఎలక్ట్రానిక్ వస్తువులను రికార్డు చేయుటద్వారా వారు సరఫరా చేసిన వాటిని సర్దుబాటు చేసుకోగలరు. రెండు వారములలో అమ్మిన వివరములు క్రింది పట్టిక ద్వారా చూపబడినది.

		టి.వి.	డి.వి.డి.	విడియోగేమ్స్	సి.డి. ప్లేయర్స్
వారము I	దుకాణము I	30	15	12	10
	దుకాణము II	40	20	15	15
	దుకాణము III	25	18	10	12
వారము II	దుకాణము I	25	12	8	6
	దుకాణము II	32	10	10	12
	దుకాణము III	22	15	8	10

మాత్రిక సంకలనము ఉపయోగించి రెండు వారములలో అమ్మిన వస్తువుల మొత్తమును కనుగొనుము

12. ఒక ఈత కొలనుకు ఒక రోజు ప్రవేశ రుసుము క్రింది విధముగా ఉన్నది.

దినసరి ప్రవేశ రుసుము ₹ లో		
సభ్యత్వమున్నవారు	పిల్లలు	పెద్దలు
2.00 p.m. ముందు	20	30
2.00 p.m. తరువాత	30	40
సభ్యత్వములేనివారు		
2.00 p.m. ముందు	25	35
2.00 p.m. తరువాత	40	50

సభ్యత్వము లేనివారు చెల్లించు అధికరుసుమును తెలుపు మాత్రికను వ్రాయుము

4.6. మాత్రికల గుణకారం (Multiplication of matrices)

సెల్వి 3 కలములు మరియు 2 పెన్సిళ్లు, మీనా 4 కలములు మరియు 5 పెన్సిళ్ళు కొనుటకు నిశ్చయించిరి. కలము మరియు పెన్సిల్ ధరలు క్రమముగా ₹ 10 మరియు ₹ 5 అయిన, ఒక్కొక్కరికి ఎంత ఖర్చగును?

$3\times 10 + 2\times 5 = 40$, కనుక సెల్వి కి ₹ 40 కావలెను.

$4\times 10 + 5\times 5 = 65$, కనుక మీనాకి ₹ 65 కావలెను.

మాత్రికల గుణకారం ఉపయోగించి దీనిని చేయగలము.

పై సమీకరణమును క్రింది విధముగా వ్రాయుము

	కావలసినవి	ధర (₹ లలో)	కావలసిన పైకము (₹ లలో)
సెల్వి మీనా	$\begin{pmatrix}3 & 2\\4 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\times 10+2\times 5\\4\times 10+5\times 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40\\65\end{pmatrix}$

మరొక దుకాణములో కలము మరియు పెన్సిల్ ధరలు క్రమముగా ₹ 8 మరియు ₹ 4 అనుకొనిన, సెల్వి, మీనాలకు కావసిన డబ్బు క్రమముగా $3\times 8 + 2\times 4$ = ₹ 32 మరియు $4\times 8 + 5\times 4$= ₹ 52. పై సమాచారమును ఈ విధముగా వ్రాయవచ్చును.

	కావలసినవి	ధర (₹ లలో)	కావలసిన పైకము (₹ లలో)
సెల్వి మీనా	$\begin{pmatrix}3 & 2\\4 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\times 8+2\times 4\\4\times 8+5\times 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32\\52\end{pmatrix}$

పై రెండు సంఘటనలలోగల సమాచారమును కలిసి మాత్రిక రూపములో క్రింది విధముగా చూపవచ్చును.

	కావలసినవి	ధర (₹ లలో)	కావలసిన పైకము (₹ లలో)
సెల్వి మీనా	$\begin{pmatrix}3 & 2\\4 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10 & 8\\5 & 4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\times 10+2\times 5 & 3\times 8+2\times 4\\4\times 10+5\times 5 & 4\times 8+5\times 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40 & 32\\65 & 52\end{pmatrix}$

పై ఉదాహరణము నుండి, మొదటి మాత్రికలోని నిలువ వరుసల సంఖ్య, రెండవ మాత్రికలోని అడ్డువరుసల సంఖ్యకు సమానము అయిన రెండు మాత్రికల గుణకారము సాధ్యమగునని గమనింపుము. మొదటి మాత్రిక అడ్డువరుస మరియు రెండవ మాత్రిక నిలువ వరుసలను తీసుకొని మూలకముల వారిగా గుణించి మరియు వాటి మొత్తముల ద్వారా లబ్దమాత్రికను పొందవచ్చును.

ఉదాహరణకు $A = \begin{pmatrix}2 & -1\\3 & 4\end{pmatrix}$ మరియు $B = \begin{pmatrix}3 & -9\\5 & 7\end{pmatrix}$ అయిన, AB ల లబ్దము క్రింది విధముగా వివరించబడినది.

$$AB = \begin{pmatrix}2 & -1\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -9\\5 & 7\end{pmatrix}$$

సోపానము 1: A యొక్క మొదటి అడ్డ వరుసలోని సంఖ్యలను B యొక్క మొదటి నిలువ వరుసలోని సంఖ్యలచే గుణించి వచ్చు లబ్దముల కూడిక ఫలితమును AB యొక్క మొదటి అడ్డువరుస మరియు మొదటి నిలువ వరుస యందు ఉంచుము.

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -9\\5 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2(3)+(-1)5 & \\ & \end{pmatrix}$$

సోపానము 2: సోపానము 1 లోని అదే పద్ధతిననుసరించి, A యొక్క మొదటి అడ్డు వరుసను మరియు B యొక్క రెండవ నిలువ వరుసనుపయోగించి ఫలితమును AB యొక్క మొదటి అడ్డువరుస మరియు రెండవ నిలువ వరుస యందు వ్రాయుము.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ & \end{pmatrix}$$

సోపానము 3: A యొక్క రెండవ అడ్డు వరుస మరియు B యొక్క మొదటి నిలువ వరుసతో అదే పద్ధతిననుసరించుము. ఫలితమును AB యొక్క రెండవ అడ్డువరుస మరియు మొదటి నిలువవరుస యందు వ్రాయుము.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ 3(3)+4(5) & \end{pmatrix}$$

సోపానము 4: A యొక్క రెండవ అడ్డు వరుస మరియు B యొక్క రెండవ నిలువ వరుసలోని సంఖ్యలను అదే విధముగా చేయుము.

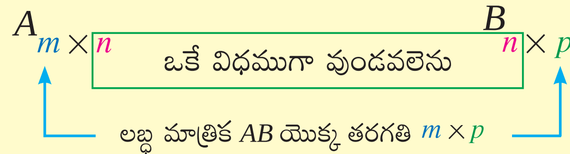
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ 3(3)+4(5) & 3(-9)+4(7) \end{pmatrix}$$

సోపానము 5: AB లబ్ద మాత్రిక పొందుటకు సూక్ష్మీకరింపుము.

$$\begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ 3(3)+4(5) & 3(-9)+4(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -25 \\ 29 & 1 \end{pmatrix}$$

నిర్వచనం

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$ మరియు $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ అయిన లబ్ధమాత్రిక AB ను నిర్వచింపబడి మరియు దీని యొక్క తరగతి $m\times p$ అగును. దీనిని క్రింది పటము ద్వారా వివరించవచ్చును.



ఉదాహరణ 4.12

క్రింది మాత్రిక లబ్ధమును నిర్వచించగలమా, లేదా తెలుపుము. నిర్వచించినట్లయిన లబ్ధమాత్రిక పరిమాణమును కనుగొనుము. (i) $A_{2\times5}$ మరియు $B_{5\times4}$ (ii) $A_{1\times3}$ మరియు $B_{4\times3}$

సాధన

(i) A లోని నిలువవరుసలసంఖ్య మరియు B లోని అడ్డువరుసల సంఖ్యకు సమానము. కావున AB లబ్ధమును కనుగొనవచ్చును. లబ్ధమాత్రిక AB తరగతి 2×4 అగును.

(ii) A యొక్క తరగతి 1×3 మరియు B యొక్క తరగతి 4×3 ఇవ్వబడినది. ఇప్పుడు A లోని నిలువ వరుసల సంఖ్య మరియు B లోని అడ్డువరుసల సంఖ్యకు సమానము కాదు. కావున లబ్ధమాత్రిక AB ను కనుగొనలేము.

ఉదాహరణ 4.13

సాధించుము: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$

సాధన $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$ అని ఇవ్వబడినది.

$$\implies \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 4x + 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

అనురూప మూలకములను సమానపరచిన,

$$3x + 2y = 8 \quad \text{మరియు} \quad 4x + 5y = 13$$

$$\implies 3x + 2y - 8 = 0 \quad \text{మరియు} \quad 4x + 5y - 13 = 0\ .$$

అడ్డగుణకార పద్ధతిలో సమీకరణములు సాధించగా,

	x		y		1
2		–8		3	2
5		–13		4	5

$$\implies \frac{x}{-26+40} = \frac{y}{-32+39} = \frac{1}{15-8} \implies \frac{x}{14} = \frac{y}{7} = \frac{1}{7}\ .$$

కావున, $x = 2,\ \ y = 1$

ఉదాహరణ 4.14

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ మరియు $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ అయిన, $A^2 - (a+d)A = (bc - ad)I_2$ అని చూపుము.

సాధన $A^2 = A \times A$ గా తీసుకొనిన,

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$(a+d)A = (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

(1) మరియు (2) నుండి

$$A^2 - (a+d)A = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} = (bc - ad)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

కావున, $A^2 - (a+d)A = (bc - ad)I_2$.

4.7 మాత్రికల గుణకార ధర్మాలు (Properties of matrix multiplication)

సంఖ్యల గుణకారము నందు గల కొన్ని ముఖ్యమైన ధర్మములు మాత్రికల గుణకారం నందు లేవు. అటువంటి ధర్మములు (i) $AB \neq BA$ (సాధారణముగా) (ii) $AB = 0$, A లేక B ఒక శూన్యమాత్రిక అని సూచించుట లేదు. (iii) $AB = AC$, A అనునది శూన్యేతర మాత్రిక అయిన $B = C$ అని సూచించుట లేదు.

ఉదాహరణకు, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ మరియు $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ అనుకొనిన,

(i) $AB \neq BA$ (ii) $AD = 0$ అయినను, A మరియు D లు శూన్య మాత్రికలు కావు మరియు

(iii) $AB = AC$, కాని $B \neq C$. కొన్ని ఉదాహరణముల ద్వారా మాత్రికల గుణకార ధర్మములను చూచెదము.

i) మాత్రికల గుణకారం వినిమయంకాదు (Matrix multiplication is not commutative)

A మరియు B రెండు మాత్రికలయిన AB మరియు BA పొందినప్పటికి, $AB = BA$ గా ఉండవలసిన అవసరం లేదు.

ఉదాహరణ 4.15

$A = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ మరియు $B = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ అయిన, AB మరియు BA లు లభించునట్లైన వాటిని కనుగొనుము.

సాధన మాత్రిక A తరగతి 3×2 మరియు B తరగతి 2×3 కనుక AB మరియు BA రెండు లబ్ధములను నిర్వచింపవచ్చును.

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 6 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 72-42 & -24+7 & 16+35 \\ -18+24 & 6-4 & -4-20 \\ 0+18 & 0-3 & 0-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -17 & 51 \\ 6 & 2 & -24 \\ 18 & -3 & -15 \end{pmatrix}$$

అదేవిధముగా,

$$BA = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 6 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 & -69 \\ 50 & -61 \end{pmatrix}.$$ ($AB \neq BA$ అని గమనింపుము)

సూచన

ఒకే తరగతి గల రెండు వికర్ణ మాత్రికల లబ్ధము వినిమయమగును. మరియు గుణకారములో ఒకే తరగతి గల ఏదేని చతురస్ర మాత్రికతో యునిట్ మాత్రిక వినిమయమగును.

(ii) మాత్రిక గుణకార సహచర్యం (Matrix multiplication is always associative)

A, B మరియు C, ఏదేని మూడు మాత్రికలలో $(AB)C = A(BC)$ అగును. (సమానమునకు ఇరువైపులవి లభించినపుడు)

(iii) సంకలనముపై మాత్రిక గుణకార విభాగ న్యాయం (Matrix multiplication is distributive over addition)

A, B మరియు C, ఏవేని మూడు మాత్రికలలో (i) $A(B+C) = AB + AC$

(ii) $(A+B)C = AC + BC$ అగును. (సమానమునకు ఇరువైపులవి లభించినపుడు)

ఉదాహరణ 4.16

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ మరియు $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ అయిన, $A(B+C) = AB + AC$ అని సరిచూడుము.

సాధన

$$B + C = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A(B+C) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 38 \\ 5 & 34 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6+12 & 15+14 \\ 2+24 & -5+28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3-10 & 3+6 \\ -1-20 & -1+12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 29 \\ 26 & 23 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -21 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 38 \\ 5 & 34 \end{pmatrix} \quad (2)$$

(1) మరియు (2) నుండి, $A(B+C) = AB + AC$.

(iv) గుణకార తత్సమాంశం (Existence of multiplicative identity)

సాధారణ బీజగణితము నందు సంఖ్య 1చే ఏదేని సంఖ్యను గుణించిన అదే సంఖ్య వచ్చునను ధర్మము కలదు. ఇప్పుడు ఈ సామాన్య భావనను మాత్రికల బీజగణితమునందు పరిచయము చేసెదము.

n తరగతి గల ఏదేని చతురస్రమాత్రిక A కు $AI = IA = A$ అయిన, I అనునది n తరగతి గల తత్సమ మాత్రిక. కాబట్టి, గుణకారము నందు I ను తత్సమమాత్రిక అని అందురు.

ఉదాహరణ 4.17

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$, అయిన $AI = IA = A$ యని సరిచూడుము. ఇక్కడ I అనునది 2 తరగతి గల తత్సమ మాత్రిక.

సాధన

$$AI = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+3 \\ 9+0 & 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = A$$

మరియు $$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 3+0 \\ 0+9 & 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = A$$

కాబట్టి $AI = IA = A$.

(v) గుణకార విలోమము (Existence of multiplicative inverse)

n తరగతి గల చతురస్రమాత్రిక A అయిన, అదే n తరగతి కలిగిన చతురస్రమాత్రిక B ఉండి $AB = BA = I$ అయిన, B అనునది A యొక్క గుణకార విలోమం అగును. దానిని A^{-1} చే సూచింతురు. ఇచట I అనునది n తరగతి గల తత్సమమాత్రిక

సూచన

1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ లాంటి కొన్ని చతురస్ర మాత్రికలకు గుణకార విలోమం కలిగియుండదు.

2) B అనునది A యొక్క గుణకార విలోమం అయిన, A అనునది B యొక్క గుణకార విలోమం అగును.

3) ఒక చతురస్రమాత్రికకు గుణకార విలోమం లభించిన, అది ఏకైకమగును.

ఉదాహరణ 4.18

$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ మరియు $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ అనునది ఒక దానికొకటి గుణకార విలోమం అగునని నిరూపించుము.

సాధన

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -15+15 \\ 2-2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

మరియు $$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & 10-10 \\ -3+3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

ఇచ్చిన మాత్రికలు ఒకదానికొకటి గుణకార విలోమం అగును

(vi) వ్యత్యయమాత్రికల ప్రతిలోమం (Reversal law for transpose of matrices)

A మరియు B అను రెండు మాత్రికలు మరియు AB ని కనుగొనుటకు వీలైన, $(AB)^T = B^T A^T$ అగును.

ఉదాహరణ 4.19

$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ మరియు $B = (1 \quad 3 \quad 6)$ అయిన, $(AB)^T = B^T A^T$ యని సరిచూడుము

సాధన

$$AB = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}(1 \;\; 3 \;\; -6) = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 12 \\ 4 & 12 & -24 \\ 5 & 15 & -30 \end{bmatrix}$$

కనుక, $$(AB)^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

ఇప్పుడు , $$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}(-2 \;\; 4 \;\; 5)$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

(1) మరియు (2) నుండి $(AB)^T = B^T A^T$ అగును.

అభ్యాసము 4.3

1. క్రింది మాత్రికల లబ్ధమును కనుగొనుటకు వీలైన, వాటి లబ్ధముల తరగతిని తెలుపుము.

   (i) AB, ఇందు $A = [a_{ij}]_{4x3}, B = [b_{ij}]_{3x2}$ (ii) PQ, ఇందు $P = [p_{ij}]_{4x3}, Q = [q_{ij}]_{4x3}$

   (iii) MN, ఇందు $M = [m_{ij}]_{3x1}, N = [n_{ij}]_{1x5}$ (iv) RS, ఇందు $R = [r_{ij}]_{2x2}, S = [s_{ij}]_{2x2}$

2. క్రింది మాత్రికల లబ్ధము లభించినట్లైన కనుగొనుము.

   (i) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

   (iii) $\begin{pmatrix} 2 & 9 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -7 \end{pmatrix}$

3. పండ్లు అమ్మువాడు తన దుకాణముయందు పండ్లను అమ్మెను. ఆపిల్, మామిడి మరియు నారింజ పండ్ల ధరలు క్రమముగా ₹ 20, ₹ 10 మరియు ₹ 5 గా ఉన్నవి . మూడు రోజుల అమ్మకాలు క్రింది ఇవ్వబడినది.

రోజులు	ఆపిల్	మామిడి	నారింజ
1	50	60	30
2	40	70	20
3	60	40	10

   ప్రతిరోజు లభించు మొత్తము నగదు మరియు మూడు పండ్లను కలిపి అమ్మిన వచ్చు మొత్తము నగదును తెలుపు మాత్రికల రూపమును వ్రాయుము.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$. అయిన x మరియు y విలువలను కనుగొనుము

5. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \end{pmatrix}$ మరియు $AX = C$ అయిన, x మరియు y విలువలను కనుగొనుము.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ అయిన, $A^2 - 4A + 5I_2 = O$. అని చూపుము.

7. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ మరియు $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ అయిన, AB మరియు BA లను కనుగొనుము. అవి సమానమా?

8. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ మరియు $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ అయిన, $(AB)C = A(BC)$ యని సరిచూడుము.

9. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ అయిన $(AB)^T = B^T A^T$ యని సరిచూడుము.

10. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ మరియు $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ అనునది మాత్రికా గుణకారములో ఒక దానికొకటి విలోమం అగునని నిరూపింపుము.

11. సాధించుము $(x \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 5 \end{pmatrix} = (\ 0\ )$.

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ మరియు $B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ అయిన, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ అని నిరూపింపుము.

13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ మరియు $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ అయిన, (A+B)+C మరియు AC+BC లను కనుగొనుము. $(A+B)C = AC + BC$ అగునా?

అభ్యాసము 4.4

సరియైన సమాధానమును ఎన్నుకొనుము

1. క్రింది ప్రవచనములలో ఏది సత్యము కాదు?

   (A) ఒక అదిశా మాత్రిక అనునది ఒక చతురస్రమాత్రిక అగును

   (B) ఒక విలోమ మాత్రిక అనునది ఒక చతురస్రమాత్రిక అగును

   (C) ఒక అదిశా మాత్రిక అనునది ఒక వికర్ణమాత్రిక అగును

   (D) ఒక వికర్ణ మాత్రిక అనునది ఒక అదిశా మాత్రిక అగును

2. మాత్రిక $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ అనునది ఒక చతురస్రమాత్రిక అగుటకు

   (A) $m < n$ (B) $m > n$ (సి) $m = 1$ (D) $m = n$

3. $\begin{pmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y-2 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$ అయిన x మరియు y విలువలు క్రమముగా

   (A) $-2, 7$ (B) $-\frac{1}{3}, 7$ (C) $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$ (D) $2, -7$

4. $A = (1 \ \ -2 \ \ 3)$ మరియు $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ అయిన $A + B$

   (A) $(0 \ \ 0 \ \ 0)$ (B) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (C) $(\ -14\ )$ (D) నిర్వచింపలేము

5. ఒక మాత్రిక యొక్క తరగతి 2×3 అయిన ఆ మాత్రికలోని మూలకముల సంఖ్య

(A) 5 (B) 6 (C) 2 (D) 3

6. $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ x & 8 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ అయిన x విలువ

(A) 1 (B) 2 (C) $\frac{1}{4}$ (D) 4

7. A తరగతి 3×4 మరియు B తరగతి 4×3 అయిన, BA తరగతి

(A) 3×3 (B) 4×4 (C) 4×3 (D) చెప్పలేము

8. $A \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ అయిన A తరగతి

(A) 2×1 (B) 2×2 (C) 1×2 (D) 3×2

9. A మరియు B అను చతురస్రమాత్రికలలో $AB = I$ మరియు $BA = I$ అయిన B అనునది

(A) తత్సమమాత్రిక (B) శూన్యమాత్రిక

(C) A యొక్క మాత్రికా గుణకార విలోమం (D) $-A$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ అయిన, x మరియు y విలువలు క్రమముగా

(A) 2 , 0 (B) 0 , 2 (C) 0 , −2 (D) 1 , 1

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ మరియు $A + B = O$, అయిన B అనునది

(A) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

12. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$, అయిన A^2 అనునది

(A) $\begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 36 & 9 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

13. A తరగతి $m \times n$ మరియు B తరగతి $p \times q$ అయిన A మరియు B ల సంకలనము సాధ్యమగుటకు

(A) $m = p$ (B) $n = q$ (C) $n = p$ (D) $m = p, n = q$

14. $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ అయిన, a విలువ

(A) 8 (B) 4 (C) 2 (D) 11

15. $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$ అయిన $A^2 = I$ అగుటకు

(A) $1 + \alpha^2 + \beta\gamma = 0$ (B) $1 - \alpha^2 + \beta\gamma = 0$

(C) $1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$ (D) $1 + \alpha^2 - \beta\gamma = 0$

16. $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ మరియు $a_{ij} = i + j$, అయిన $A =$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ అయిన, a, b, c మరియు d విలువలు క్రమముగా

(A) $-1, 0, 0, -1$ (B) 1, 0, 0, 1 (C) $-1, 0, 1, 0$ (D) 1, 0, 0, 0

18. $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ మరియు $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ అయిన మాత్రిక $B =$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 5 & x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \end{pmatrix}$ అయిన x విలువ

(A) 7 (B) -7 (C) $\frac{1}{7}$ (D) 0

20. ఒకే తరగతి కలిగిన A మరియు B అనునవి ఏవేని రెండు చతురస్రమాత్రికలు అయిన క్రింది వాటిలో ఏది సత్యమగును?

(A) $(AB)^T = A^T B^T$ (B) $(A^T B)^T = A^T B^T$ (C) $(AB)^T = BA$ (D) $(AB)^T = B^T A^T$

ముఖ్యాంశములు

- సంఖ్యలను దీర్ఘచతురస్రాకార అమరికలో అమర్చుటను మాత్రిక అందురు.
- m అడ్డ వరుసలు మరియు n నిలువ వరుసలు కలిగిన మాత్రిక యొక్క తరగతి $m \times n$ అగును.
- $m = 1$ అయిన $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ అనునది ఒక అడ్డువరుస మాత్రిక అగును.
- $n = 1$ అయిన $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ అనునది ఒక నిలువవరుస మాత్రిక అగును.
- $m = n$ అయిన $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ అనునది ఒక చతురస్రమాత్రిక అగును.
- $i \neq j$ గా ఉండి $a_{ij}=0$ అయిన $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ అనునది ఒక వికర్ణమాత్రిక అగును.
- $i \neq j$ గా ఉండి $a_{ij}=0$ అయిన మరియు $i = j$ గా ఉండి $a_{ij} = k$, అయిన $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ అనునది ఒక అదిశా మాత్రిక అగును. (k అనునది శూన్యేతర స్థిరాంకము).

- $i = j$ గా ఉండి $a_{ij} = 1$ అయిన మరియు $i \neq j$ గా ఉండి $a_{ij}=0$ అయిన $A = [a_{ij}]$ అనునది ఒక తత్సమ మాత్రికగును.
- అన్నీ మూలకములు శూన్యములుగా గల మాత్రికను శూన్యమాత్రిక అందురు.
- ఒకే తరగతి గల A మరియు B మాత్రికల అనురూపమూలకములు సమానమైన A మరియు B మాత్రికలు సమాన మాత్రికలగును.
- ఒకే తరగతి గల రెండు మాత్రికల సంకలనము లేక వ్యవకలనము చేయటకు వీలగును.
- మాత్రికల సంకలన వినిమయం

  ఒకే తరగతి గల A మరియు B మాత్రికల లో $A + B = B + A$ అగును.
- మాత్రికల సంకలనం సాహచర్యం

  ఒకే తనగతిగల A, B మరియు C మాత్రికలలో $(A + B) + C = A + (B + C)$, అగును
- A మాత్రిక తరగతి $m \times n$ మరియు B మాత్రిక తరగతి $n \times p$ అయిన AB మాత్రిక లబ్దమును నిర్వచింపబడును మరియు దీని తరగతి $m \times p$ అగును.
- సామాన్యముగా, మాత్రికల గుణకారం వినిమయం కాదు i.e., $AB \neq BA$.
- మాత్రికల గుణకారం సాహచర్యం అగును i.e., $(AB)C = A(BC)$, రెండువైపుల లబించినట్లైన.
- $(A^T)^T = A$, $(A + B)^T = A^T + B^T$ మరియు $(AB)^T = B^T A^T$
- $AB = BA = I$ అయిన, A మరియు B లు ఒక దానికొకటి గుణకార విలోమం అగును.
- $AB = 0$ అయిన, $A = 0$ లేక $B = 0$ గా ఉండనవసరము లేదు.

మీకు తెలుసా?

ఒక మిలియన్ అమెరికా డాలర్ల విలువచేయు ఏబెల్ బహుమానము మొట్టమొదట 2003 సంవత్సరములో బహుకరించబడినది. ఇది ఒక అంతర్జాతీయ బహుమానము. నార్వే వైజ్ఞానిక సంస్థ ప్రతి సంవత్సరము నార్వే దేశపు రాజు మూలముగా ఒకరు లేక అంతకన్నా ప్రఖ్యాతిగాంచిన గణిత మేధావులకు ఇవ్వబడుచున్నది.

చెన్నై నగరములో జన్మించిన ఇండో-అమెరికా గణిత శాస్త్రజ్ఞుడైన S.R. శ్రీనివాస వరదన్‌కు 2007 సంవత్సరములో ఈ ఏబెల్ బహుమానము నొసిగిరి. ఇతనికి సంభావ్యత ప్రాథమిక సిద్ధాంతములోని గరిష్ఠ విచలనములను ఏకీకృతము చేసినందుకు ఈ బహుమానము ఇవ్వబడినది.

5

నిరూపక జ్యామితి

"No human investigation can be called real science if it cannot be demonstrated mathematically" - Leonardo de Vinci

- పరిచయం
- విభజన సూత్రం
- త్రిభుజము మరియు చతుర్భుజ వైశాల్యం
- సరళరేఖలు



పియరే డి ఫెర్మాట్
(1601-1665)
ఫ్రాన్స్

17వ శతాబ్దము ప్రథమార్థములో రేణిడే కార్ట్స్ మరియు ఫెర్మాట్ అను ఇద్దరు ప్రముఖ గణిత శాస్త్రవేత్తలలో ఒకరైన వారు ఫెర్మాట్, ఈయన వైశ్లేషిక రేఖాగణితం యొక్క మూల సిద్ధాంతములను కనుగొనెను ఇతను వక్రరేఖ నిరూపకముల గరిష్టము మరియు కనిష్టములను కనుగొను అసలైన పద్ధతుల ను కనుగొనెను. ఇతను నిరూపక జ్యామితికి గుర్తింపైన కృషిని చేసెను. డెస్కార్ట్స్ యొక్క ప్రఖ్యాత ప్రచురణ అయినటువంటి "లా జ్యామెట్రీ" కి ముందే ఫెర్మాట్ వైశ్లేషిక రేఖాగణితములోని కొత్త పరిశోధనా విషయముల వ్రాతప్రతిని 1636 లోనే పంపిణీ (ప్రచురణ) చేసెను.

5.1 పరిచయం

నిరూపక పద్ధతి మరియు బీజగణితముల విశ్లేషణ సిద్ధాంతముల ను ఉపయోగించి అధ్యయనంచేయు రేఖాగణితమునే నిరూపక జ్యామితి లేక వైశ్లేషిక రేఖాగణితం అందురు. ఇది బీజీయ ఫలితములను జ్యామితీయముగా సమన్వయపరచుటకు దోహదపడుచూ బీజగణితం మరియు రేఖాగణితం మధ్య ఒక వంతెన వలె సహాయపడును. ఫ్రెంచి తత్వవేత్త మరియు గణిత శాస్త్రజ్ఞుడైన రెనీ డెకార్టె బీజగణితమును ఉపయోగించి రేఖాగణితంను ఒక ప్రణాళిక బద్ధంగా తీసుకొనివచ్చెను. గణిత శాస్త్రములో నిరూపకముల ఉపయోగము డెకార్టె యొక్క కృషియే. ఇది రేఖాగణిత అధ్యయనమునకు విప్లవాత్మకమయ్యెను. 1637లో తన గ్రంథమయిన లా జ్యామెట్రీని ప్రచురించెను. ఆ గ్రంథంలో అతను జ్యామితీయ సమస్యను బీజీయ సమీకరణంగా మార్చి దానిని సూక్ష్మీకరించి ఆ తర్వాత ఆ సమీకరణంను జ్యామితీయంగా సాధించెను. ఆదే కాలములో మరొక ఫ్రెంచి గణిత శాస్త్రవేత్త పియరీ డీ ఫెర్మాట్ ఈ నిరూపక జ్యామితిని సూత్రీకరించి గణితశాస్త్రంలో ఒక నూతన అధ్యయనమును ఆవిష్కరించారు. 1692 లో జర్మనీ గణిత శాస్త్రవేత్త అయిన గాటెఫ్రైడ్ విల్‌హెల్మ్‌వాన్ లెబినిజ్, x నిరూపకము (abscissa) మరియు y నిరూపకము (ordinate) వంటి నూతన పదములను నిరూపకజ్యామితికి పరిచయం చేసెను.

నికోలస్ ముర్రే బట్లర్ ప్రకారం, "డెకార్ట్ వైశ్లేషిక రేఖాగణితం, న్యూటన్ మరియు లెబినిజ్‌ల కలనగణితము, గణిత శాస్త్ర పద్ధతులను ఆశ్చర్యాన్ని కలిగించే విధంగా వ్యాపింపచేసెను".

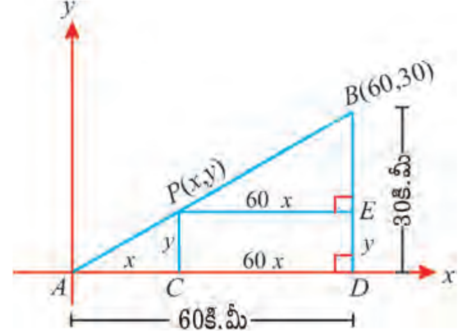
మనము 9వ తరగతిలో నిరూపకజ్యామితి యొక్క ప్రధాన అంశములైన నిరూపకాక్షాలు, సమతలం, సమతలంపై బిందువులను గుర్తించుట మరియు రెండు బిందువుల మధ్య దూరం వంటి విషయాలను అభ్యసించితిమి. ఈ పాఠ్యాంశములో విభజన సూత్రం, త్రిభుజవైశాల్యం, సరళరేఖ వాలు మరియు సమీకరణం గూర్చి అధ్యయనం చేయుదుము.

5.2 విభజన సూత్రం

ఈ క్రింది సమస్యను గమనించెదము.

A మరియు B అనునవి రెండు నగరములు. ఒకడు A నుండి 60కి.మీ. తూర్పు దిశగా ప్రయాణం చేసి ఆ తర్వాత 30 కి.మీ. ఉత్తర దిశగా ప్రయాణం చేసి B నగరంను చేరెను. ఒక టెలిఫోన్ సంస్థ A మరియు B కలుపు సరళరేఖను అంతరముగా 1:2 నిష్పత్తిలో విభజించు P వద్ద ప్రసార గోపురమును నిర్మించుటకు నిర్ణయించెను. ఇప్పుడు ప్రసార గోపురము నిర్మించు P స్థలమును తెలుసుకొనవలెను.

బిందువు A ను ఆదిబిందువుగా తీసుకొనుము $P(x,y)$ అనునది ఏదేని ఒక బిందువనుకొనుము P మరియు B నుండి x అక్షమును క్రమముగా C మరియు D ల వద్ద సంధించునట్లు లంబములను గీయుము. మరియు P నుండి BD కి లంబముగా E వద్ద ఖండించునట్లు గీయుము.



పటము 5.1

ΔPAC మరియు ΔBPE సరూపమగుటచే

$$\frac{AC}{PE} = \frac{PC}{BE} = \frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}$$

ఇప్పుడు $\frac{AC}{PE} = \frac{1}{2}$

$$\Longrightarrow \frac{x}{60-x} = \frac{1}{2}$$

$$2x = 60 - x$$

$$x = 20.$$

మరియు $\frac{PC}{BE} = \frac{1}{2}$

$$\Longrightarrow \frac{y}{30-y} = \frac{1}{2}$$

$$2y = 30 - y \quad \Longrightarrow \quad y = 10.$$

$\therefore$ ప్రసార గోపురము యొక్క స్థానము $P(20, 10)$. అగును

పై సమస్యను మాదిరిగా తీసుకొని, సామాన్య విభజనసూత్రంను ఉత్పాదించెదము.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ అనునవి రెండు వేర్వేరు బిందువులనుకొనుము. బిందువు $P(x, y)$ అనునది AB ని అంతరముగా $l : m$ నిష్పత్తిలో విభజించిన

$$\frac{AP}{PB} = \frac{l}{m}$$ అగును.

పటము 5.2 నుండి $AF = CD = OD - OC = x - x_1$

$$PG = DE = OE - OD = x_2 - x$$

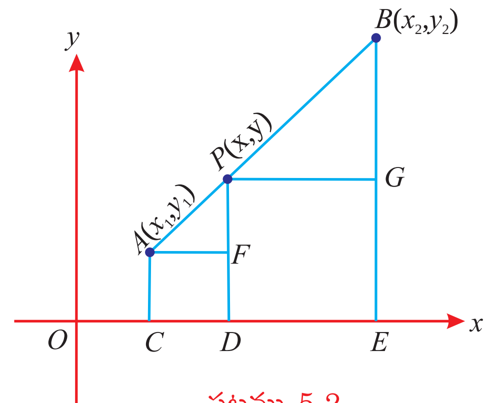
మరియు $PF = PD - FD = y - y_1$

$$BG = BE - GE = y_2 - y$$

ఇప్పుడు ΔAFP మరియు ΔPGB సరూపములు

(వివరణకు 6వ అధ్యాయములో 6.3 ను చూడుము)

$$\frac{AF}{PG} = \frac{PF}{BG} = \frac{AP}{PB} = \frac{l}{m}$$



పటము 5.2

$$\therefore \quad \frac{AF}{PG} = \frac{l}{m} \quad \text{మరియు} \quad \frac{PF}{BG} = \frac{l}{m}$$

$$\Longrightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{l}{m} \qquad \Longrightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{l}{m}$$

$$\Longrightarrow mx - mx_1 = lx_2 - lx \qquad \Longrightarrow my - my_1 = ly_2 - ly$$

$$lx + mx = lx_2 + mx_1 \qquad ly + my = ly_2 + my_1$$

$$\Longrightarrow x = \frac{lx_2 + mx_1}{l + m} \qquad \Longrightarrow y = \frac{ly_2 + my_1}{l + m}$$

కనుక : $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండమును P అను బిందువు అంతరముగా $l : m$ నిష్పత్తిలో విభజించిన $P\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \frac{ly_2 + my_1}{l + m}\right)$ అగును.

దీనినే విభజన సూత్రం అని అందురు.

ఇందుమూలముగా సంభందిత మూడు బిందువులు ఏకరేఖీయమైనప్పుడే ఈ విభజన సూత్రనుపయోగించుటయని స్పష్టమగుచున్నది.

ఫలితములు

(i) $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండమును బాహ్యంగా $l : m$, నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు P నిరూపకములు $\left(\frac{lx_2 - mx_1}{l - m}, \frac{ly_2 - my_1}{l - m}\right)$. ఈ సందర్భమున $\frac{l}{m}$ అనునది ఋణాత్మకము.

(ii) **AB మధ్యబిందువు**

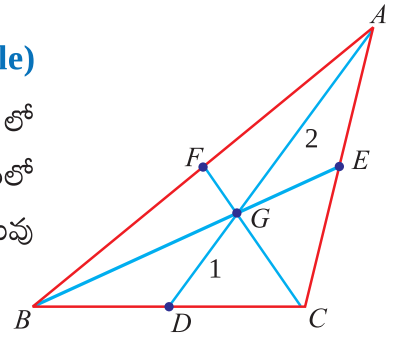
AB మధ్య బిందువు M అయిన, AB ని M అనునది అంతరముగా 1:1 నిష్పత్తిలో విభజించును.

$l = 1$ మరియు $m = 1$ లను విభజన సూత్రములో ప్రతిక్షేపించిన

AB మధ్య బిందువు $M\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$.

$A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండము యొక్క మధ్య బిందువు $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ అగును.

(iii) **త్రిభుజము యొక్క గురుత్వ కేంద్రము (Centroid of a triangle)**



పటము 5.3

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$. శీర్షములుగా గల ΔABC లో AD, BE మరియు CF అనునవి మధ్యగతరేఖలు ఒక త్రిభుజంలో మధ్యగత రేఖలు అనుషక్తము అగును. మరియు అనుషక్త బిందువు గురుత్వకేంద్రమగును.

ΔABC యొక్క గురుత్వ కేంద్రము $G(x, y)$ అనుకొనుము.

BC మధ్యబిందువు $= D\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$

త్రిభుజధర్మము నుండి గురుత్వకేంద్రము G అనునది మధ్యగత రేఖ AD ని అంతరముగా $2:1$ నిష్పత్తిలో విభజించును.

విభజన సూత్రం ప్రకారము గురుత్వకేంద్రము

$$G(x, y) = G\left(\frac{2\frac{(x_2+x_3)}{2}+1(x_1)}{2+1}, \frac{2\frac{(y_2+y_3)}{2}+1(y_1)}{2+1}\right)$$

$$= G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

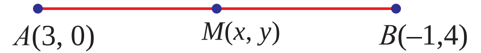
(x_1,y_1), (x_2,y_2) మరియు (x_3, y_3) లను శీర్షములుగా గల త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రం $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$. అగును.

ఉదాహరణ 5.1

$(3, 0)$ మరియు $(-1, 4)$. బిందువులను కలుపు రేఖాఖండము యొక్క మధ్యబిందువును కనుగొనుము.

సాధన (x_1,y_1) మరియు (x_2,y_2) బిందువులను కలుపు రేఖాఖండము యొక్క

మధ్య బిందువు $M(x, y) = M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$



పటము 5.4

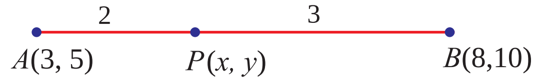
$\therefore$ $(3, 0)$ మరియు $(-1, 4)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండము యొక్క మధ్య బిందువు

$$M(x, y) = M\left(\frac{3-1}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = M(1, 2).$$

ఉదాహరణ 5.2

$(3,5)$ మరియు $(8,10)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండమును అంతరముగా $2:3$ నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువును కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన బిందువులను $A(3, 5)$, $B(8, 10)$ అనుకొనెదము, సరళరేఖ AB ని బిందువు P, $2:3$ నిష్పత్తిలో విభజించుచున్నదనుకొనెదము.



పటము 5.5

విభజనసూత్రం ప్రకారము $P(x, y) = P\left(\frac{lx_2+mx_1}{l+m}, \frac{ly_2+my_1}{l+m}\right)$

ఇక్కడ $x_1 = 3, y_1 = 5, x_2 = 8, y_2 = 10$ మరియు $l = 2, m = 3$

$$\therefore \quad P(x, y) = P\left(\frac{2(8)+3(3)}{2+3}, \frac{2(10)+3(5)}{2+3}\right) = P(5, 7)$$

ఉదాహరణ 5.3

$A(-3, 5)$ మరియు $B(4, -9)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండమును $P(-2, 3)$ బిందువు అంతరముగా ఏ నిష్పత్తిలో విభజించును.

సాధన $A(-3, 5)$, $B(4, -9)$ అనునవి ఇవ్వబడిన బిందువులు. $P(-2, 3)$, AB ని అంతరముగా $l : m$ నిష్పత్తి లో విభజించుచున్నదనుకొనెదము.



పటము 5.6

విభజన సూత్రము నుండి $P\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l+m}, \frac{ly_2 + my_1}{l+m}\right) = P(-2, 3)$ (1)

ఇక్కడ $x_1 = -3, y_1 = 5, x_2 = 4, y_2 = -9$.

(1) $\Longrightarrow \left(\frac{l(4) + m(-3)}{l+m}, \frac{l(-9) + m(5)}{l+m}\right) = (-2, 3)$

$x-$ నిరూపకములను సమానపరచగా

$$\frac{4l - 3m}{l+m} = -2$$

$$\Longrightarrow \quad 6l = m$$

$$\frac{l}{m} = \frac{1}{6}$$

i.e., $l : m = 1 : 6$

కావున P, AB ని అంతరముగా $1 : 6$ నిష్పత్తిలో విభజించును

గమనిక

(i) పై ఉదాహరణలో $y-$నిరూపకములను సమానము చేసుకొని కూడ నిష్పత్తిని పొందవచ్చు.

(ii) మూడు బిందువులు ఏకరేఖీయములైనప్పుడు $x-$ నిరూపకములనో y నిరూపకములనో సమానపరచగా పొందు నిష్పత్తి ఒకే విదముగా నుండును.

(iii) ఒక బిందువు రేఖాఖండమును అంతరముగా $l : m$, నిష్పత్తిలో విభజించిన $\frac{l}{m}$ ధనాత్మకమగును

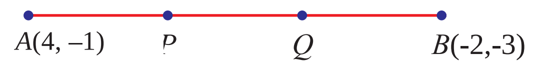
(iv) ఒక బిందువు రేఖాఖండమును బాహ్యంగా $l : m$, నిష్పత్తిలో విభజించిన $\frac{l}{m}$ ఋణాత్మకమగును.

ఉదాహరణ 5.4

$(4, -1)$, $(-2, -3)$ లను కలుపు రేఖాఖండమును త్రిధాకరించు బిందువులను కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన బిందువులను $A(4, -1)$ మరియు $B(-2, -3)$ అనుకొనెదము. $P(x, y)$ మరియు $Q(a, b)$ లు AB యొక్క త్రిధాకరణ బిందువులనుకొనుము.

దాని ప్రకారము $AP = PQ = QB$ అగును. కావున AB ని P బిందువు $1 : 2$ నిష్పత్తిలో మరియు Q బిందువు $2 : 1$ నిష్పత్తిలో అంతరముగా విభజించుచున్నది.

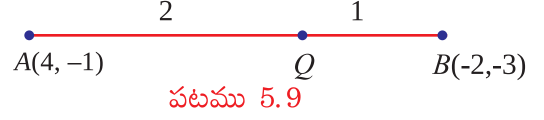


పటము 5.7



పటము 5.8

$\therefore$ విభజన సూత్రమునుండి కావలసిన బిందువులు



పటము 5.9

$$P\left(\frac{1(-2)+2(4)}{1+2},\frac{1(-3)+2(-1)}{1+2}\right),\ Q\left(\frac{2(-2)+1(4)}{2+1},\frac{2(-3)+1(-1)}{2+1}\right)$$

$$\Longrightarrow\ P(x,y) = P\left(\frac{-2+8}{3},\frac{-3-2}{3}\right) \text{ మరియు } Q(a,b) = Q\left(\frac{-4+4}{3},\frac{-6-1}{3}\right)$$

$$= P\left(2,-\frac{5}{3}\right) \qquad = Q\left(0,-\frac{7}{3}\right).$$

Q అనునది PB యొక్క మధ్య బిందువు మరియు P అనునది AQ యొక్క మధ్యబిందువని గమనింపుము.

ఉదాహరణ 5.5

$A(4,-6), B(3,-2), C(5,2)$ లను శీర్షములుగాగల త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రంను కనుగొనుము.

సాధన $(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ (x_3,y_3)$ లను శీర్షములుగా గల త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రము

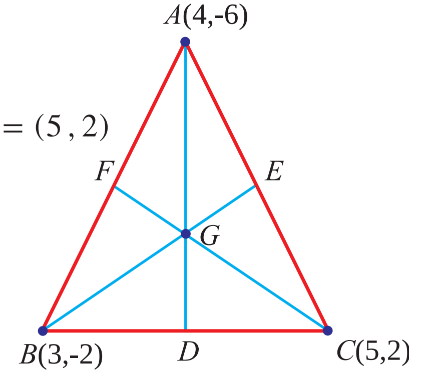
$$G(x\,,y) = G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

ఇక్కడ $(x_1,y_1) = (4,-6),\ (x_2,y_2) = (3,-2),\ (x_3,y_3) = (5,2)$

$\therefore$ $(4,-6), (3,-2)$ మరియు $(5, 2)$ లను శీర్షములుగా గల త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్రము

$$G(x\,,y) = G\left(\frac{4+3+5}{3},\frac{-6-2+2}{3}\right)$$

$$= G(4,-2).$$



పటము 5.10

ఉదాహరణ 5.6

సమాంతరచతుర్భుజ శీర్షములు (7, 3), (6, 1), (8, 2) మరియు (p, 4) లను ఒక క్రమపద్ధతిలో తీసుకొనబడిన p విలువను కనుగొనుము.

సాధన సమాంతర చతుర్భుజ శీర్షములను A (7, 3), B (6, 1), C (8, 2) మరియు D (p, 4) అనుకొనెదము.

సమాతరచతుర్భుజ కర్ణములు ఒకదానికొకటి సమద్విఖండన చేసుకొనును.

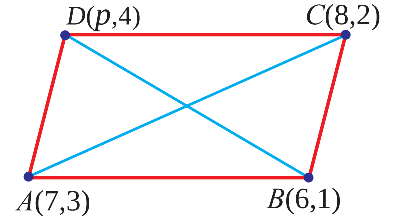
$\therefore$ కర్ణము AC, కర్ణము BD ల మధ్య బిందువులు ఏకీభవించును.

కావున $\left(\frac{7+8}{2},\frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{6+p}{2},\frac{1+4}{2}\right)$

$$\Longrightarrow \qquad \left(\frac{6+p}{2},\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{15}{2},\frac{5}{2}\right)$$

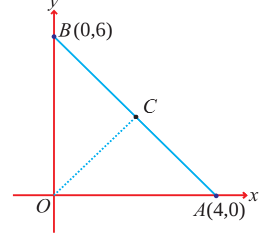
x నిరూపకములను సమానపరచగా, $\frac{6+p}{2} = \frac{15}{2}$

$$\therefore\ p = 9$$



పటము 5.11

ఉదాహరణ 5.7



పటము 5.12

$A(4\ ,\ 0)$ మరియు $B(0\ ,\ 6)$ లను కలుపు రేఖాఖండము యొక్క మధ్య బిందువు C మరియు O అనునది ఆదిబిందువు అయిన, C అనునది $\triangle OAB$ శీర్షములకు సమానదూరములో నుండునని చూపుము.

సాధన AB మధ్య బిందువు $C\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = C(2, 3)$

$P(x_1, y_1)$ మరియు $Q(x_2, y_2)$ ల మధ్య దూరము $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ అని తెలియును.

$O(0, 0)$ మరియు $C\ (2, 3)$ ల మధ్య దూరము

$$OC = \sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}.$$

$A(4, 0)$ మరియు $C(2, 3)$ ల మధ్య దూరము

$$AC = \sqrt{(2-4)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$B\ (0, 6)$ మరియు $C(2, 3)$ ల మధ్య దూరము

$$BC = \sqrt{(2-0)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$\therefore \quad OC = AC = BC$

$\therefore$ బిందువు C అనునది $\triangle\, OAB$. శీర్షములకు సమానదూరములో ఉన్నది.

గమనిక కర్ణము మధ్య బిందువు C అనునది, లంబకోణ $\triangle\, OAB$ యొక్క పరివృత్తకేంద్రమగును.

అభ్యాసము 5.1

1. క్రింది బిందువులను కలుపు రేఖా ఖండము యొక్క మధ్య బిందువులను కనుగొనుము
   (i) $(1, -1)$ మరియు $(-5, 3)$ (ii) $(0, 0)$ మరియు $(0, 4)$
2. క్రింది వాటిని శీర్షములుగా గల త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రమును కనుగొనుము.
   (i) (1, 3), (2, 7), (12, −16) (ii) (3, −5), (−7, 4), (10, −2)
3. ఒక వృత్త కేంద్రము (−6, 4). వృత్త వ్యాసము యొక్క ఒక అంత్యబిందువు ఆదిబిందువు అయిన మరొక అంత్య బిందువును కనుగొనుము.
4. ఒక త్రిభుజ గురుత్వకేంద్రము (1, 3) మరియు రెండు శీర్షములు(−7, 6), (8, 5) అయిన మూడవ శీర్షమును కనుగొనుము.
5. విభజన సూత్రమునుపయోగించి, క్రమపద్ధతిలో తీసుకొనిన $A(1,0)$, $B(5,3)$, $C(2,7)$, $D(-2, 4)$ బిందువులు సమాంతరచతుర్భుజము యొక్క శీర్షములని చూపుము.
6. (3,4), (−6, 2) లను కలుపు రేఖాఖండమును బాహ్యముగా 3:2 నిష్పత్తిలో విభజించు బిందు నిరూపకములను కనుగొనుము.
7. (−3, 5), (4, −9) లను కలుపు రేఖాఖండమును అంతరముగా 1:6 నిష్పత్తిలో విభజించు బిందు నిరూపకములను కనుగొనుము.

8. $A(-6,-5)$, $B(-6, 4)$ అనునవి రెండు బిందువులు. AB పై బిందువు P అనునది $AP = \frac{2}{9} AB$ ని సంతృప్తి పరిచినట్లైన, బిందువు P ని కనుగొనుము.

9. $A(2,-2)$, $B(-7, 4)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండమును త్రిధాకరణచేయు బిందువులను కనుగొనుము.

10. $A(-4, 0)$, $B (0, 6)$ బిందువులను కలుపు రేఖా ఖండమును నాలుగు సమభాగములుగా విభజించు బిందువులను కనుగొనుము.

11. $(6, 4), (1, -7)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండమును $x-$ అక్షము ఏ నిష్పత్తిలో విభజించునో కనుగొనుము.

12. $(-5, 1)$, $(2, 3)$ బిందువులను కలుపు రేఖను $y-$ అక్షము ఏ నిష్పత్తిలో విభజించును? మరియు ఖండన బిందువును కనుగొనుము.

13. $(1, -1)$, $(0, 4)$, $(-5, 3)$ లను శీర్షములుగా గల త్రిభుజము యొక్క మధ్యగత రేఖల పొడవులను కనుగొనుము.

5.3 త్రిభుజ వైశాల్యం

క్రింది తరగతులలో త్రిభుజము యొక్క కొన్ని కొలతలు ఇచ్చినచో త్రిభుజ వైశాల్యం లెక్కించుటను నేర్చుకొంటిమి . ఇప్పుడు త్రిభుజ శీర్షముల నిరూపకములు ఇచ్చినచో దాని వైశాల్యం కనుగొనగలమా?

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ లను ΔABC శీర్షములనుకొనెదము

AD, BE, CF అనురేఖలు x అక్షమునకు లంబముగా నుండునట్లు గీయుము.

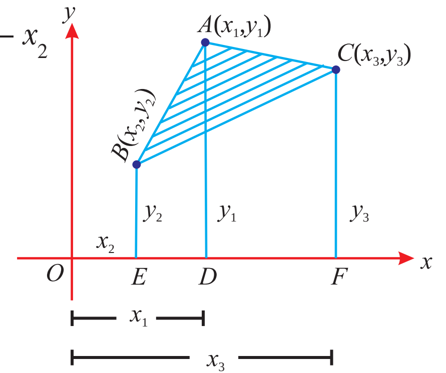
పటము నుండి $ED = x_1 - x_2$, $DF = x_3 - x_1$, $EF = x_3 - x_2$

త్రిభుజం ABC వైశాల్యం

= సమలంబచతుర్భుజం $ABED$ వైశాల్యం

+ సమలంబచతుర్భుజం $ADFC$ వైశాల్యం

− సమలంబచతుర్భుజం $BEFC$ వైశాల్యం



పటము 5.13

$$= \frac{1}{2}(BE + AD)ED + \frac{1}{2}(AD + CF)DF - \frac{1}{2}(BE + CF)EF$$

$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}\{x_1y_2 - x_2y_2 + x_1y_1 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_1y_1 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_2y_2 - x_3y_3 + x_2y_3\}$$

$\therefore$ ΔABC వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$ చ.ప్రమాణములు

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ అనునవి ΔABC శీర్షములైన,

ΔABC వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$ చ.ప్రమాణములు.

గమనిక

త్రిభుజవైశాల్యంను ఈ క్రింది విధముగాను వ్రాయవచ్చును

$$\frac{1}{2}\{x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2\} \text{ చ.ప్రమాణములు}$$

(లేక) $$\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2\ y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\} \text{ చ.ప్రమాణములు}$$

పై సూత్రమును చాలా సులభంగా వ్రాయుటకు ఈ క్రింది చిత్రరూపము మనకు సహాయపడును.

ΔABC శీర్షములు $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ లను అపసవ్య దిశలో తీసుకొని వాటిని నిలువ వరుస రీత్యా ఈ క్రింద చూపిన విధంగా వ్రాయవలెను.

$$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{Bmatrix}$$

చిక్కని బాణపు గుర్తులతో చూపబడిన కర్ణముల లబ్ధము x_1y_2, x_2y_3, x_3y_1 లను కూడుము. మరియు చుక్కలతో చూపబడిన బాణపు గుర్తుల లబ్ధములు x_2y_1, x_3y_2, x_1y_3 లను కూడము. ఆ తర్వాత $\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2\ y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$ సమాసమును పొందుటకు రెండవ దానిని మొదటిదాని నుంచి తీసివేయుము.

గమనిక

త్రిభుజవైశాల్యము కనుగొనుటకు ఈ క్రింది సోపానములు ఉపయోగపడును.

(i) బిందువులను చిత్తుపటముద్వారా గుర్తించుము.

(ii) శీర్షములను అపసవ్యదిశలో (counter clock-wise direction) తీసుకొనవలెను. లేనిచో సూత్రం ఋణాత్మక విలువను ఇచ్చును.

(iii) ΔABC వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2\ y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$ సూత్రమును ఉపయోగించుము.

5.4 మూడు బిందువుల ఏకరేఖీయత (Collinearity of three points)

సమతలంలో మూడు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ బిందువులు ఏకరేఖీయమని చెప్పుటకు అవి ఒకే సరళరేఖపై నుండవలెను. మరొక విధంగా $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ అను మూడు బిందువులు ఏకరేఖీయమైన వాటిలో ఏదేని ఒక బిందవు మిగిలిన రెండు బిందువులను కలుపు సరళరేఖపై నుండవలెను.

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ మరియు $C(x_3,y_3)$ మూడు బిందువులు ఏక రేఖీయమైన అవి త్రిభుజమును ఏర్పరచదు. కావున $\triangle ABC$ వైశాల్యం సున్న అగును.

$$i.e.,\ \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3$$

దీని విపర్యమును సరియేయని మనము నిరూపించవచ్చును.

కావున $\triangle ABC$ వైశాల్యం సున్న అయినచో A, B, C బిందువులు ఏకరేఖీయమగును.

5.5 చతుర్భుజ వైశాల్యం (Area of the Quadrilateral)

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ మరియు $D(x_4,y_4)$ అనునవి చతుర్భుజం $ABCD$ శీర్షములు అనుకొనెదము.

చతుర్భుజం $ABCD$ వైశాల్యం = ΔABD వైశాల్యం + ΔBCD వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_4y_2 + x_1y_4)\}$$

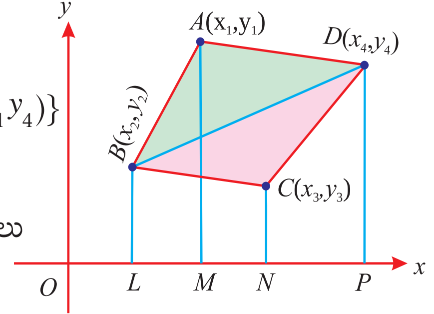
$$+\frac{1}{2}\{(x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_2) - (x_3y_2 + x_4y_3 + x_2y_4)\}$$

$\therefore$ చతుర్భుజం $ABCD$ వైశాల్యం

$$=\frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\}$$

లేక

$$\frac{1}{2}\{(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)\}$$ చ.ప్రమాణములు



పటము 5.14

పై సూత్రమును ఈ క్రింది చిత్ర రూపము ద్వారా చాలా సులభంగా వ్రాయవచ్చును.

శీర్షములు $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ మరియు $D(x_4,y_4)$ లను అపసవ్యదిశలో తీసుకొని క్రింద చూపిన విధంగా నిలువ వరుస రీత్యా వ్రాసి త్రిభుజవైశాల్యం కనుగొనుటలో పాటించిన నైపుణ్యమునే అనుసరించవలెను.

$$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{Bmatrix}.$$

ఇది మనకు కావలసిన సమాసము

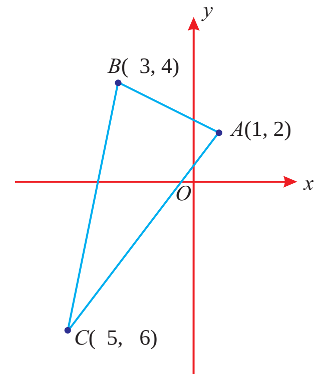
$\frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\}$. పొందుటకు సహాయపడును.

ఉదాహరణ 5.8

$(1, 2), (-3, 4), (-5, -6)$. బిందువులను శీర్షములుగా గల త్రిభుజ వైశాల్యం కనుగొనుము.

సాధన బిందువులను చిత్తు పటములో గుర్తించి వాటిని ఒక క్రమములో తీసుకొనుము.

శీర్షములను $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$ మరియు $C(-5, -6)$ అనుకొనెదము.



పటము 5.15

$\triangle ABC$ వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(4 + 18 - 10) - (-6 - 20 - 6)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{12 + 32\} = 22.$$ చ. ప్రమాణములు.

$$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 1 & -3 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 2 \end{Bmatrix}$$ ను ఉపయోగించి

ఉదాహరణ 5.9

$A(6,7)$, $B(-4,1)$ మరియు $C(a,-9)$ శీర్షములుగా గల ΔABC వైశాల్యము 68 చ.ప్రమాణములు అయినచో 'a' విలువను కనుగొనుము.

సాధన $\triangle ABC$ వైశాల్యం

$$\frac{1}{2}\{(6+36+7a)-(-28+a-54)\}=68,$$

$$\Longrightarrow (42+7a)-(a-82)=136$$

$$\Longrightarrow 6a = 12 \qquad \therefore \quad a = 2$$

$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 6 & -4 & a & 6 \\ 7 & 1 & -9 & 7 \end{Bmatrix}$ ను ఉపయోగించి

ఉదాహరణ 5.10

$A(2,3)$, $B(4,0)$, $C(6,-3)$ బిందువులు ఏకరేఖీయమని చూపుము.

సాధన $\triangle ABC$ వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2}\{(0-12+18)-(12+0-6)\},$$

$$= \frac{1}{2}\{6-6\} = 0.$$

$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 3 \end{Bmatrix}$ ను ఉపయోగించి

$\therefore$ ఇవ్వబడిన బిందువులు ఏకరేఖీయమగును.

ఉదాహరణ 5.11

బిందువులు $(a,0)$ మరియు $(0,b)$ లను కలుపు రేఖాఖండంపై $P(x,y)$ ఏదేని ఒక బిందువైన $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, అని నిరూపించుము. (ఇచ్చట $a, b \neq 0$).

సాధన బిందువులు (x, y), $(a,0)$ మరియు $(0,b)$,లు ఏకరేఖీయమగును.

$\therefore$ వీటిచే ఏర్పడిన త్రిభుజవైశాల్యం సున్న అగును.

$$\Longrightarrow \quad ab - bx - ay = 0$$

$$\therefore \quad bx + ay = ab$$

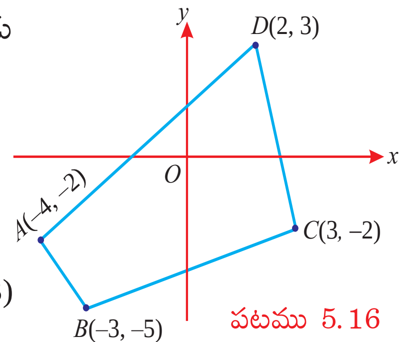
$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} a & 0 & x & a \\ 0 & b & y & 0 \end{Bmatrix}$ ను ఉపయోగించి

ఇరువైపుల ab చే భాగించగా

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, ని పొందగలము. ఇచ్చట $a, b \neq 0$

ఉదాహరణ 5.12

$(-4,-2)$, $(-3,-5)$, $(3,-2)$, $(2,3)$ బిందువులచే ఏర్పడు చతుర్భుజవైశాల్యం కనుగొనుము.



పటము 5.16

సాధన బిందువులను చిత్తుపటములో గుర్తించి శీర్షములను అపసవ్యదిశలో తీసుకొనుము.

శీర్షములను $A(-4,-2)$, $B(-3,-5)$, $C(3,-2)$, $D(2,3)$ అనుకొనెదము.

చతుర్భుజం $ABCD$ వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2}\{(20+6+9-4)-(6-15-4-12)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{31+25\} = 28 \text{ చ.ప్రమాణములు}$$

$$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} -4 & -3 & 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & -2 & 3 & -2 \end{Bmatrix}$$

అభ్యాసము 5.2

1. క్రింది బిందువులను శీర్షములుగా గల త్రిభుజవైశాల్యం కనుగొనుము.
   (i) (0, 0), (3, 0), (0, 2) (ii) (5, 2), (3, −5), (−5, −1)
   (iii) (−4, −5), (4, 5), (−1, −6)

2. ఒక క్రమములో తీసుకొనబడిన త్రిభుజ శీర్షములు మరియు వాటి వైశాల్యములు క్రింద ఇవ్వబడినవి. ప్రతిదానిలో a విలువను కనుగొనుము.

శీర్షములు	వైశాల్యం (చ.ప్రమాణములలో)
(i) (0 , 0), (4, a), (6, 4)	17
(ii) (a, a), (4, 5), (6,−1)	9
(iii) (a, −3), (3, a), (−1,5)	12

3. క్రింది బిందువులు ఏకరేఖీయము అగునా, కాదాయని నిర్ణయించుము.
   (i) (4, 3), (1, 2), (−2, 1) (ii) (−2, −2), (−6, −2), (−2, 2)
   (iii) $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$,(6, −2), (−3, 4)

4. క్రిందివ్వబడిన బిందువులు ఏకరేఖీయములగుటచే k విలువను కనుగొనుము.
   (i) (k, −1), (2, 1), (4, 5) (ii) (2, −5), (3, −4) మరియు (9, k)
   (iii) (k, k), (2, 3) మరియు (4, −1)

5. క్రింది వాటిని శీర్షములుగా గల చతుర్భుజ వైశాల్యం కనుగొనుము.
   (i) (6, 9), (7, 4), (3, 7) (ii) (−3, 4), (−5, −6), (3, −1), (1, 2)
   (iii) (−4, 5), (0, 7), (5, −5), (−4, 2)

6. మూడు బిందువులు (h, 0), (a, −b) మరియు (0, k) ఒకే రేఖపై అమరియున్నచో త్రిభుజ వైశాల్యం సూత్రమునుపయోగించి $\frac{a}{h}+\frac{b}{k}=1, (h, k \neq 0)$ అని చూపుము.

7. (0, −1), (2, 1), (0, 3) శీర్షములుగా గల త్రిభుజ భుజముల మధ్య బిందువులను కలుపగా ఏర్పడు త్రిభుజవైశాల్యం కనుగొనుము. ఈ త్రిభుజవైశాల్యమునకు ఇవ్వబడిన త్రిభుజ వైశాల్యమునకు గల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

5.6 సరళరేఖలు

5.6.1 క్షితిజముతో చేయు కోణము (Angle of Inclination)

సరళరేఖ l, x అక్షమును A వద్ద ఖండించుచున్నదనుకొనెదము. ధనాత్మక x అక్షమునకు మరియు సరళరేఖ l మధ్యకోణము అనునది x అక్షమునుండి అపసవ్యదిశలో కొలవబడినది. దీనినే సరళరేఖ l, క్షితిజముతో చేయుకోణము అందురు.

పటము 5.17

గమనిక

సరళరేఖ l, క్షితిజముతో చేయు కోణము θ అయిన,

(i) $0^0 \leq \theta \leq 180^0$

(ii) క్షితిజరేఖలకు $\theta = 0^0$ లేక 180^0 మరియు క్షితిజ లంబరేఖలకు, $\theta = 90^0$.

(iii) ఒకసరళరేఖ ప్రారంభమున x అక్షముపైనుండి, ఆతర్వాత x అక్షముపైగల ఒక స్థిరబిందువు A ని ఆధారముగా చేసుకొని అపసవ్యదిశలో భ్రమణము చెంది చివరగా x అక్షముతో ఏకీభవించిన ఆ సరళరేఖ క్షితిజముతో చేయుకోణము ప్రారంభస్థితిలో 0^0 మరియు తుది స్థానములో 180^0 అగును.

5.6.2 సరళరేఖ వాలు (Slope of a straight line)

నిర్వచనం

క్షితిజ లంబముకాని ఒక సరళరేఖ l, క్షితిజముతో చేయు కోణము θ అయిన, $\tan\theta$ ను సరళరేఖ యొక్క వాలు అని అందురు. దీనిని m తో సూచింతురు.

$$\therefore \text{ సరళరేఖ వాలు }, m = \tan\theta \qquad (0^0 \leq \theta \leq 180^0, \theta \neq 90^0)$$

సూచన

(i) $x-$ అక్షము లేక $x-$ అక్షమునకు సమాంతరముగా గల సరళరేఖ వాలు సున్న.

(ii) $y-$ అక్షము లేక $y-$ అక్షమునకు సమాంతరముగా గల సరళరేఖ వాలు ను నిర్వచింపలేము. ఎందుకనగా $\tan 90^0$ అనిర్వచితము. సరళరేఖ యొక్క వాలు అనగా అది ఒక క్షితిజ లంబముకాని సరళరేఖయని అర్థము.

(iii) θ లఘుకోణమైన వాలు ధనాత్మకముగాను, θ గురుకోణమైన వాలు ఋణాత్మకముగాను ఉండును.

5.6.3 సరళరేఖపై గల ఏదేని రెండు బిందువులు ఇవ్వబడిన ఆ రేఖ వాలు

క్షితిజముతో θ కోణము చేయు సరళరేఖ l పై $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ అనునవి ఏవేని రెండు బిందువులనుకొనెదము. ఇచ్చట $0^0 \leq \theta \leq 180^0, \theta \neq 90^0$. సరళరేఖ AB, $x-$అక్షమును C వద్ద ఖండించుననుకొనుము.

సరళరేఖ l యొక్క వాలు $m = \tan\theta$ (1)

$x-$అక్షమునకు లంబముగా AD మరియు BE లు గీయుము. A నుండి BE కి లంబముగా AF రేఖను గీయుము.

పటము 5.18

పటమునుండి $AF = DE = OE - OD = x_2 - x_1$

$BF = BE - EF = BE - AD = y_2 - y_1$

అదే విధంగా $\angle DCA = \angle FAB = \theta$

లంబకోణం ΔABF నుండి

$$\tan\theta = \frac{BF}{AF} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ x_1 \neq x_2 \text{ అగునపుడు} \qquad (2)$$

(1) మరియు (2), లనుండి వాలు $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

> (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) బిందువులను కలుపు సరళరేఖ వాలు
>
> $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ఇక్కడ $x_1 \neq x_2$ ఎందుకనగా $\theta \neq 90^\circ$.

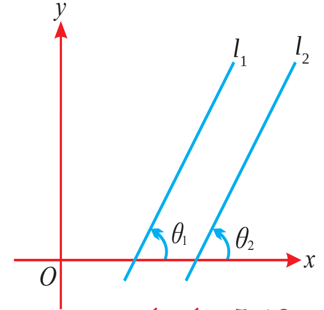
గమనిక

> (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) బిందువులను కలుపు సరళరేఖ వాలును ఈ క్రింది విధంగాను తెలపవచ్చును.
>
> వాలు $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y \text{ నిరూపకములలోని మార్పు}}{x \text{ నిరూపకములలోని మార్పు}}$

5.6.4 వాలుల రీత్యా సమాంతర రేఖలుగా నుండుటకు గల నిబంధన

సమాంతర రేఖలు l_1 మరియు l_2 లు క్షితిజముతో చేయుకోణములు క్రమముగా θ_1 మరియు θ_2, వాలులు క్రమముగా m_1 మరియు m_2 అనుకొనుము.

l_1, మరియు l_2 లు సమాంతరముగా నుండుటచే క్షితిజముతో చేయు కోణములు θ_1 మరియు θ_2 లు సమానము.



పటము 5.19

$$\therefore\ \tan\theta_1 = \tan\theta_2 \implies m_1 = m_2$$

$\therefore$ క్షితిజ లంబముకాని రెండు రేఖలు సమాంతరమైన వాటి వాలులు సమానము. దీని విపర్యము సరియే అగును. అనగా రెండు రేఖల వాలులు సమానమైన, ఆ రేఖలు సమాంతరముగా నుండును.

5.6.5 వాలుల రీత్యా లంబరేఖలుగా నుండుటకు గల నిబంధన

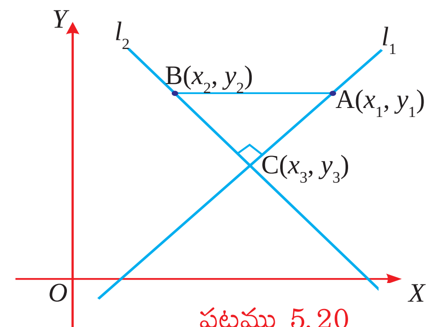
l_1 మరియు l_2 అను రెండు లంబ సరళరేఖలు క్రమముగా $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ బిందువుల ద్వారా పోవుచున్నదనుకొనుము.

వాటి వాలులు m_1 మరియు m_2 అనుకొనుము

వాటి ఖండన బిందువు $C(x_3, y_3)$ అనుకొనుము

సరళరేఖ l_1 యొక్క వాలు $m_1 = \dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$

సరళరేఖ l_2 యొక్క వాలు $m_2 = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$



పటము 5.20

లంబకోణ $\triangle ABC$ నుండి $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$\Longrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$\Longrightarrow (x_2 - x_3 + x_3 - x_1)^2 + (y_2 - y_3 + y_3 - y_1)^2$$
$$= (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$\Longrightarrow \left(x_2 - x_3\right)^2 + (x_3 - x_1\Big)^2 + 2(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_3)^2 + (y_3 - y_1)^2 + 2(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)$$
$$= (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$\Longrightarrow 2(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) + 2(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) = 0$$

$$\Longrightarrow (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) = -(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$$

$$\left(\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}\right)\left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\right) = -1.$$

$$\Longrightarrow m_1 m_2 = -1 \text{ or } m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

m_1 మరియు m_2 వాలులుగా గల రెండు క్షితిజ లంబము కాని సరళరేఖలు ఒకదానికోకటి లంబముగా నుండిన $m_1m_2 = -1$.

మరొక్క విధముగా $m_1m_2 = -1$ అయిన, ఆ రెండు సరళరేఖలు ఒకదానికొకటి లంబముగా నుండును.

గమనిక

సరళరేఖలైన x–అక్షము మరియు y–అక్షము ఒకదానికొకటి లంబముగా నుండును. కాని, $m_1 m_2 = -1$ అను నిబంధన వర్తించదు. ఎందుకనగా x–అక్షము వాలు సున్న మరియు y–అక్షము వాలు అనిర్వచితము.

ఉదాహరణ 5.13

వాలు $\frac{1}{\sqrt{3}}$ గా నుండు సరళరేఖ క్షితిజముతో చేయు కోణమును కనుగొనుము.

సాధన రేఖ క్షితిజముతో చేయు కోణము θ అయిన రేఖ యొక్క వాలు

$$m = \tan\theta \qquad 0^0 \le \theta \le 180^0,\ \theta \ne 90^0$$

$$\therefore\ \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad \theta = 30^0$$

ఉదాహరణ 5.14

క్షితిజముతో చేయు కోణము 45^0 గా కలిగిన సరళరేఖ వాలును కనుగొనుము.

సాధన రేఖ క్షితిజముతో చేయు కోణము θ అయిన

రేఖ యొక్క వాలు $m = \tan\theta$.

$m = \tan 45^0$ అని ఇవ్వబడినది. $\Longrightarrow$ $m = 1$.

ఉదాహరణ 5.15

$(3,\ -2)$ మరియు $(-1,\ 4)$ బిందువుల ద్వారా పోవు సరళరేఖ వాలును కనుగొనుము.

సాధన (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) బిందువుల ద్వారా పోవు సరళరేఖ వాలు $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$(3\ ,\ -2)$ మరియు $(-1\ ,\ 4)$ బిందువుల ద్వారా పోవు సరళరేఖ వాలు

$$m = \frac{4+2}{-1-3} = -\frac{3}{2}.$$

ఉదాహరణ 5.16

వాలు భావమునుపయోగించి బిందువులు $A(5,\ -2)$, $B(4,\ -1)$ మరియు $C(1,\ 2)$ ఏకరేఖీయ బిందువులని చూపుము.

సాధన (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) బిందువులను కలుపు రేఖ వాలు $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$A(5, -2)$ మరియు $B(4, -1)$ బిందువులను కలుపు రేఖ AB వాలు $m_1 = \dfrac{-1+2}{4-5} = -1$

$B(4,\ -1)$ మరియు $C(1,\ 2)$ బిందువులను కలుపు రేఖ BC వాలు $m_2 = \dfrac{2+1}{1-4} = -1$

కనుక AB వాలు $= BC$ వాలు మరియు B ఉమ్మడి బిందువు

కావున బిందువు A, B మరియు C ఏకరేఖీయ బిందువులగును.

ఉదాహరణ 5.17

వాలు భావమునుపయోగించి, క్రమముగా తీసుకొనబడిన $(-2,-1)$, $(4,\ 0)$ $(3,\ 0)$ మరియు $(-3,\ 2)$ అను బిందవులు ఒక సమాంతరచతుర్భుజమును ఏర్పరుచునని చూపుము.

సాధన క్రమముగా తీసుకొనబడిన బిందువులు $A(-2\ ,\ -1)$, $B(4,\ 0)$, $C(3,\ 3)$ మరియు $D(-3,\ 2)$ అనుకొనుము.

AB వాలు $= \dfrac{0+1}{4+2} = \dfrac{1}{6}$

CD వాలు $= \dfrac{2-3}{-3-3} = \dfrac{1}{6}$

$\therefore$ AB వాలు $=$ CD వాలు

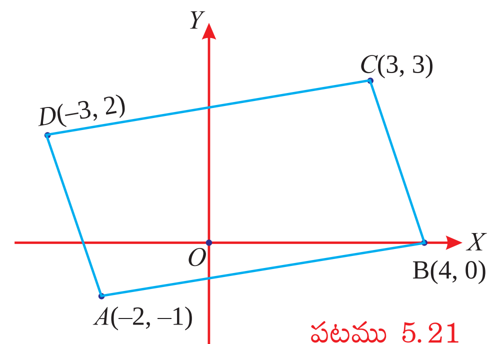
కావున AB కి CD సమాంతరముగానున్నది. (1)

BC వాలు $= \dfrac{3-0}{3-4} = -3$

AD వాలు $= \dfrac{2+1}{-3+2} = -3$

$\therefore$ BC వాలు $=$ AD వాలు

కావున BC కి AD సమాంతరముగానున్నది. (2)



పటము 5.21

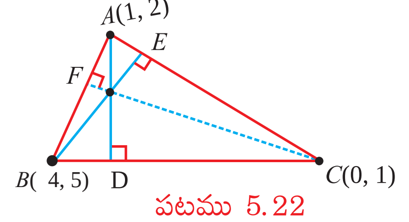
(1) మరియు (2) ల నుండి $ABCD$ యొక్క ఎదురెదురు భుజములు సమాంతరముగా నున్నది

$\therefore$ $ABCD$ ఒక సమాంతరచతుర్భుజమగును.

ఉదాహరణ 5.18

$\triangle ABC$ శీర్షములు $A(1\ ,\ 2)$, $B(-4\ ,\ 5)$ మరియు $C(0\ ,\ 1)$ అయిన, ఆ త్రిభుజ ఉన్నతుల వాలులను కనుగొనుము.

సాధన $\triangle ABC$ ఉన్నతులను AD, BE మరియు CF అనుకొనుము



పటము 5.22

BC వాలు $= \dfrac{1-5}{0+4} = -1$

ఉన్నతి AD కి, BC లంబముగా నుండుటచే

AD వాలు $= 1$ $\quad \because m_1 m_2 = -1$

AC వాలు $= \dfrac{1-2}{0-1} = 1$

BE వాలు $= -1$ $\quad \because BE \perp AC$

అటులనే, AB వాలు $= \dfrac{5-2}{-4-1} = -\dfrac{3}{5}$

$\therefore$ CF వాలు $= \dfrac{5}{3}$ $\quad \because CF \perp AB$

అభ్యాసము 5.3

1. క్రింది వాలు గల సరళరేఖ క్షితిజముతో చేయుకోణమును కనుగొనుము.

   (i) 1 (ii) $\sqrt{3}$ (iii) 0

2. క్రింది క్షితిజ కోణము గల సరళరేఖ యొక్క వాలును కనుగొనుము.

   (i) 30^0 (ii) 60^0 (iii) 90^0

3. క్రింది బిందువుల ద్వారా పోవు సరళరేఖ వాలును కనుగొనుము.

   (i) $(3\ ,\ -2)$ మరియు $(7\ ,\ 2)$ (ii) $(2\ ,\ -4)$ మరియు ఆదిబిందువు

   (iii) $(1+\sqrt{3}\ ,2)$ మరియు $(3+\sqrt{3}\ ,4)$

4. క్రింది బిందువుల ద్వారా పోవు సరళరేఖ క్షితిజముతో చేయు కోణమును కనుగొనుము.

   (i) $(1\ ,2)$ మరియు $(2\ ,3)$ (ii) $(3\ ,\sqrt{3})$ మరియు $(0\ ,0)$

   (iii) $(a\ ,\ b)$ మరియు $(-a\ ,\ -b)$

5. $(0,\ -4)$ మరియు $(8,0)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండ మధ్య బిందువు మరియు ఆది బిందువు ద్వారా పోవు రేఖ యొక్క వాలును కనుగొనుము.

6. చతురస్రము $ABCD$ యొక్క భుజము AB, $x-$అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉన్నది. అయిన క్రింది వాటిని కనుగొనుము.

   (i) AB వాలు (ii) BC వాలు (iii) కర్ణము AC వాలు

7. సమబాహు $\triangle ABC$ యొక్క భుజము BC, $x-$అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉన్నది. అయిన AB వాలు మరియు BC వాలును కనుగొనుము.

8. వాలు భావమునుపయోగించి, క్రింది ఒక్కొక్క బిందువుల సమూహము ఏకరేఖీయమని చూపుము.

(i) $(2, 3), (3, -1), (4, -5)$ (ii) $(4, 1), (-2, -3), (-5, -5)$

(iii) $(4, 4), (-2, 6), (1, 5)$

9. బిందువులు $(a, 1), (1, 2)$ మరియు $(0, b+1)$ ఏకరేఖీయములైన, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ అనిచూపుము.

10. $A(-2, 3)$ మరియు $B(a, 5)$ బిందువులను కలుపు సరళరేఖ, $C(0, 5)$ మరియు $D(-2, 1)$. బిందువులను కలుపు సరళరేఖకు సమాంతరముగా నుండిన a విలువను కనుగొనుము.

11. $A(0, 5)$ మరియు $B(4, 2)$ బిందువులనుకలుపు సరళరేఖ, $C(-1, -2)$ మరియు $D(5, b)$. బిందువులను కలుపు సరళరేఖకు లంబంగానుండిన b విలువను కనుగొనుము.

12. $A(1, 8), B(-2, 4), C(8, -5)$ అనునవి $\triangle ABC$ యొక్క శీర్షములు. AB మరియు AC ల మధ్య బిందువులు క్రమముగా M మరియు N అయిన, MN యొక్క వాలును కనుగొనుము. దానిద్వారా MN, BC కి సమాంతరముగా యున్నదియని చూపుము.

13. ఒక త్రిభుజము $(6, 7), (2, -9)$ మరియు$(-4, 1)$ లను శీర్షములుగా కలిగియున్నది. అయిన దాని మధ్యగతరేఖల వాలులను కనుగొనుము.

14. $\triangle ABC$ యొక్క శీర్షములు $A(-5, 7), B(-4, -5)$ మరియు $C(4, 5)$ అయిన, దాని ఉన్నతుల వాలులను కనుగొనుము.

15. వాలు భావమును ఉపయోగించి క్రమపద్ధతిలో తీసుకొనబడిన $(1, 2), (-2, 2), (-4, -3)$ మరియు $(-1, -3)$ శీర్షములు సమాంతర చతుర్భుజమును ఏర్పరుచునని చూపుము.

16. క్రమపద్ధతిలో తీసుకొనబడిన $A(-2, -4)$, $B(5, -1)$, $C(6, 4)$ మరియు $D(-1, 1)$ లను శీర్షములుగా గల చతుర్భుజము యొక్క ఎదుటి భుజములు సమాంతరముగా యున్నదని చూపుము.

5.6.6 సరళ రేఖ సమీకరణము (Equation of a straight line)

సమతలంపై L అనునది ఒక సరళరేఖ అనుకొనుము. x, y చలరాశులతో గల ఏక ఘాత సమీకరణము $px + qy + r = 0$, రేఖ L పై గల ఏదేని బిందువు యొక్క నిరూపకము, y నిరూపకముచే తృప్తిపరచబడును. మరియు ఏదేని x మరియు y విలువలు ఈ సమీకరణమును తృప్తిపరచినచో అవి రేఖ L పై గల బిందు నిరూపకములగును. కావున ఈ సమీకరణమును సరళరేఖ L యొక్క సమీకరణము అందురు. మనమిప్పుడు ఈ రేఖ L ను బీజీయగణితములో వివరించెదము. అనగా L ను బీజీయ సమీకరణము ద్వారా వివరించెదము. ఇప్పుడు L అనునది క్రింది ఏదేని ఒక రూపములో నుండును.

1) క్షితిజ సమాంతర రేఖ 2) క్షితిజ లంబరేఖ 3) క్షితిజ సమాంతరముగానో, లంబముగానో లేని రేఖ

(i) క్షితిజ సమాంతర రేఖ :

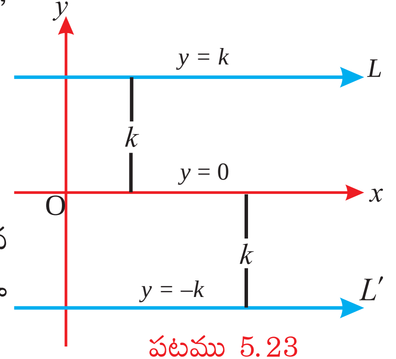
L అనునగి ఒక క్షితిజ సమాంతర రేఖ అనుకొనుము

L అనునది $x-$ అక్షము, లేక $x-$ అక్షము గాని క్షితిజ సమాంతర రేఖగానో ఉండవలెను.

సందర్భము (a) L అనునది $x-$ అక్షము అయిన, $y = 0$ మరియు x అనునది ఏదేని వాస్తవ సంఖ్యగా ఉన్నప్పుడు మాత్రమే, బిందువు (x, y) రేఖ L పై ఉండును.

కావున $y = 0$ అనునది x –అక్షమును తెలియజేయును.

$\therefore$ $x-$ అక్షము యొక్క సమీకరణము $y = 0$



పటము 5.23

సందర్భము (b) L అనునది $x-$అక్షముగాని క్షితిజ సమాంతర రేఖ అయిన అనగా L అనునది $x-$ అక్షమునకు సమాంతరముగా నుండును.

బిందువు (x, y) అనునది L పై ఉండిన, $y-$నిరూపకము ఎల్లప్పుడు స్థిరముగా నుండి $x-$నిరూపకము ఏదేని ఒక వాస్తవ సంఖ్యగా నుండును.

$\therefore$ $x-$ అక్షమునకు సమాంతరముగా నుండు సరళరేఖ సమీకరణము $y = k$, (k అనునది ఒక స్థిరాంకము)

$k > 0$ అయిన L అనునది $x-$అక్షమునకు పైన, $k < 0$ అయిన L అనునది $x-$అక్షమునకు క్రింద ఉండును మరియు $k = 0$ అయిన L అనునది $x-$అక్షము అగును.

(ii) క్షితిజ లంబరేఖ (Vertical line)

L అనునది ఒక క్షితిజ లంబరేఖ అనుకొనుము.

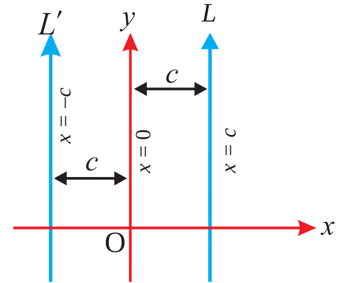
L అనునది $y-$అక్షము లేక $y-$అక్షము గాని క్షితిజ లంబంగా ఉండును.

సందర్భము (a) L అనునది $y-$అక్షము అయిన, $x = 0$ మరియు y అనునది ఏదేని వాస్తవ సంఖ్యగా వున్నప్పుడు మాత్రమే, బిందువు (x, y), L పై వుండును.

కావున $x=0$ అనునది y అక్షమును తెలియజేయును.

$\therefore$ y – అక్షము యొక్క సమీకరణము $x = 0$.

సందర్భము (b) L అనునది $y-$అక్షము గాని క్షితిజ లంబంగా ఉండిన, అనగా L అనునది $y-$అక్షమునకు సమాంతరంగా ఉండును. బిందువు (x, y), L రేఖపై వుండుటకు $x-$నిరూపకము ఎల్లప్పుడు సిర్థంగా వుండి $y-$నిరూపకం ఏదేని ఒక వాస్తవ సంఖ్యగా వుండును.



పటము 5.24

$\therefore$ y – అక్షముకు సమాంతరంగా నుండే సరళరేఖ సమీకరణం $x = c$ (c అనునది ఒక స్థిరాంకం.)

$c > 0$ అయిన L అనునది $y-$అక్షమునకు కుడి వైపున వుండును, $c < 0$ అయిన L అనునది $y-$అక్షమునకు ఎడమవైపున వుండును, $c = 0$ అయిన L అనునది $y-$ అక్షము అగును.

(iii) క్షితిజ సమాంతరంగానో లంబంగానో లేకండుట (Neither vertical nor horizontal)

L అనునది క్షితిజ సమాంతరంగానో, లంబంగానో లేనిది అనుకొనుము. ఈ సందర్భంలో L యొక్క సమీకరణం ఏ విధంగా వివరించవచ్చు? θ అనునది క్షితిజముతో చేయు కోణమును సూచించుననుకొనుము. θ మరియు L పై బిందువు తెలిసినచో మనము L ను సులభంగా వివరించవచ్చును.

క్షితిజలంబం కాని రేఖ L యొక్క వాలు mను క్రింది వాటిని ఉపయోగించి గణన చేయవచ్చును.

(i) క్షితిజముతో చేయు కోణం θ తెలిసిన $m = \tan\theta$

(ii) L పై (x_1, y_1), (x_2, y_2). అను రెండు వేర్వేరు బిందువులు తెలిసిన $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

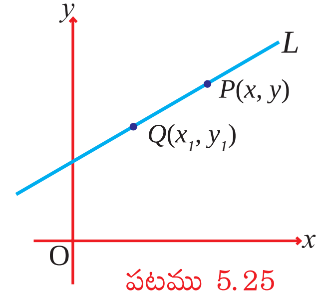
(iii) L క్షితిజ సమాంతరం అయిన $m = 0$ అగును.

L అనునది లంబము కానిదిగా పరిగణించిన క్రింది రూపములో సరళరేఖ సమీకరణమును ఉత్పాదించుము.

(ఎ) వాలు- బిందు రూపము (బి) రెండు బిందువులరూపము

(సి) వాలు-అంతరఖండ రూపము (డి) అంతరఖండ రూపము.

(a) వాలు- బిందు రూపము (Slope−Point form)



పటము 5.25

L యొక్క వాలు m మరియు $Q(x_1, y_1)$ అనునది L పై బిందువు అనుకొనుము.

L పై Q కాని మరొక స్వేచ్ఛా బిందువు $P(x, y)$అనుకొనుము.

ఇప్పుడు $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1} \Leftrightarrow m(x - x_1) = y - y_1$

కావున వాలు m గా కలిగి (x_1, y_1) బిందువుద్వారా పోవు సరళరేఖ సమీకరణం

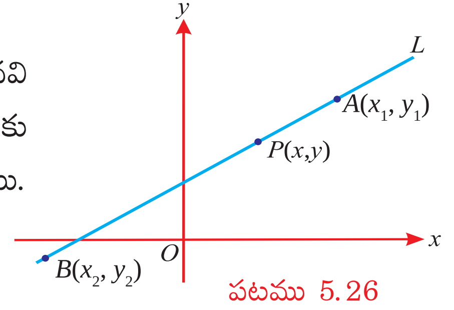
$y - y_1 = m(x - x_1)$, ఇది L పైగల అన్ని (x_1, y_1) బిందువులకు వర్తించును. (1)

సూచన

(i) x, y చలరాశులతో గల ఏకఘాత సమీకరణం (1), రేఖ L పై గల ఏదేని బిందువు యొక్క x మరియు y నిరూపకములచే తృప్తిపరచబడును. ఏదేని x మరియు y విలువలు ఈ సమీకరణంను తృప్తి పరచినచో అవి రేఖ పైగల బిందు నిరూపకములగును. కావున సమీకరణం (1) ని సరళరేఖ యొక్క సమీకరణం అందురు.

(ii) సమీకరణం (1) తెలియజేయడం ఏమనగా L పై గల బిందువుల, y నిరూపకములలోని మార్పు x నిరూపకము లలోని మార్పునకు అనులోమాను పాతంలో వుండును. ఈ అనుపాత స్థిరాకం m అనునది వాలు అగును.

(b) రెండు బిందువుల రూపము (Two–Points form)



పటము 5.26

క్షితిజ లంబముకాని రేఖ L పై (x_1, y_1), (x_2, y_2) అనునవి రెండు వేర్వేరు బిందువులు అయిన L యొక్క సమీకరణం కనుగొనుటకు మొదట L యొక్క వాలును కనుగొని ఆ తర్వాత (1) ని ఉపయోగించెదము.

L యొక్క వాలు

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, ఇక్కడ L అనునది క్షితిజ లంబము కానిరేఖ అగుటచే $x_2 \neq x_1$.

(1) వ సమీకరణం నుండి

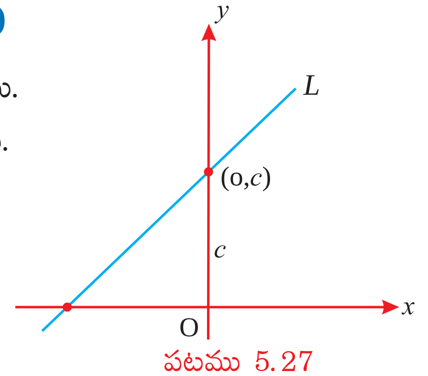
$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

$\Longrightarrow \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \Longrightarrow \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, L పై గల అన్ని (x, y) బిందువులకు (2)

గమనిక

L, యొక్క సమీకరణం పొందుటకు (x_1, y_1) బదులు (x_2, y_2) ను ఉపయోగించవచ్చు.

(c) వాలు– అంతరఖండ రూపము (Slope–Intercept form)



పటము 5.27

రేఖ L యొక్క వాలు m మరియు అంతరఖండము c అనుకొనుము. y–అంతరఖండము c అయినందున, బిందువు $(0, c)$, L పై ఉండును.

$(x_1, y_1) = (0, c)$ ని (1) లో ఉపయోగించగా

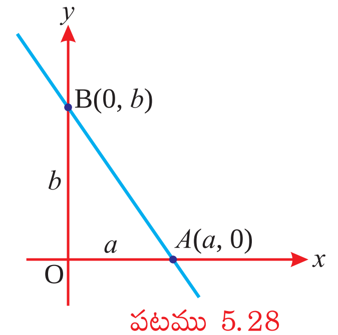
$y \quad c = m(x \quad 0)$ని పొందవచ్చును.

$\Longrightarrow y = mx + c$, L పై అన్ని (x, y) బిందువులకు (3)

కనుక వాలు అంతరఖండరూపములో $y = mx + c$ అనునది సరళరేఖ సమీకరణమగును.

(d) అంతరఖండ రూపము (Intercepts form)

సరళరేఖ L, x–అక్షము మరియు y– అక్షములతో చేయు శూన్యేతర అంతరఖండములు క్రమముగా a మరియు b అనుకొనుము.



పటము 5.28

$\therefore$ సరళరేఖ x-అక్షమును $A(a, 0)$ వద్ద, y-అక్షమును $B(0, b)$ వద్ద ఖండించును.

AB వాలు $m = -\dfrac{b}{a}$.

(1) నుండి $\quad y - 0 = -\dfrac{b}{a}(x - a)$

$\Longrightarrow \quad ay = -bx + ab$

$$bx + ay = ab$$

ab చే భాగించగా $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$\therefore$ $x-$ అంతరఖండము a, $y-$అంతరఖండము b గా గల సరళరేఖ సమీకరణము

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, L పై గల అన్ని (x, y) బిందువులకు (4)

గమనిక

(i) వాలు m, $x-$అంతరఖండము d గా గల రేఖ L యొక్క సమీకరణము $y = m(x - d)$.

(ii) $y = mx$ అను సరళరేఖ ఆది బిందువు ద్వారా పోవును. ($m \neq 0$ కి, x మరియు y అంతరఖండములు రెండునూ సున్న అగును)

(iii) (3) వ సమీకరణంలో ఉన్నట్లు సమీకరణము (1), (2), (4) లను వాలు-అంతరఖండ రూపంలోకి సూక్ష్మీకరించవచ్చును.

(iv) (1), (2), (3), (4) లలోని ప్రతి సమీకరణమును L పై గల అన్ని (x, y) బిందువులకు $px + qy + r = 0$ రూపంలో వ్రాయవచ్చును. దీనినే సరళరేఖ యొక్క సామాన్య సమీకరణ రూపము అందురు.

ఉదాహరణ 5.19

నిరూపకాక్షములకు సమాంతరముగా, $(3, -4)$. బిందువు ద్వారా పోవు సరళరేఖల సమీకరణములను కనుగొనుము.

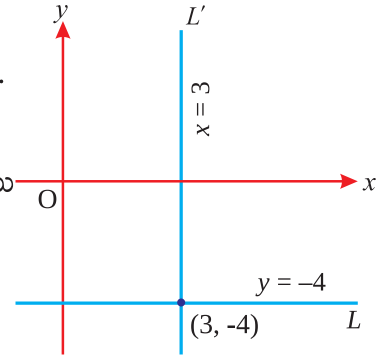
సాధన $(3, -4)$ బిందువు ద్వారా పోవుచూ, $x-$అక్షము మరియు $y-$అక్షములకు సమాంతరముగా గల సరళరేఖలను క్రమముగా L మరియు L^1 అనుకొనుము.

రేఖ L పై గల ప్రతి బిందువు యొక్క y- నిరూపకము -4 అగును.

కావున రేఖ L యొక్క సమీకరణము $y = -4$

అదేవిధంగా, రేఖ L^1 పై గల ప్రతి బిందువు యొక్క $x-$ నిరూపకము 3 అగును.

కావున రేఖ L^1 యొక్క సమీకరణము $x = 3$



పటము 5.29

ఉదాహరణ 5.20

క్షితిజముతో చేయు కోణము 45^0 మరియు $y-$అంతరఖండము $\frac{2}{5}$, గా గల సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన రేఖ యొక్క వాలు $m = \tan\theta = \tan 45^0 = 1$

$y -$ అంతరఖండము $c = \frac{2}{5}$

అంతరఖండ రూపంలో సరళరేఖ సమీకరణం $y = mx + c$

$$y = x + \frac{2}{5} \implies y = \frac{5x + 2}{5}$$

$\therefore$ సరళరేఖ సమీకరణం $5x - 5y + 2 = 0$

ఉదాహరణ 5.21

వాలు $\frac{1}{3}$. మరియు (-2 , 3) బిందువు ద్వారా పోవు సరళరేఖ సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడినది వాలు $m = \frac{1}{3}$ మరియు బిందువు $(x_1, y_1) = (-2, 3)$

వాలు-బిందు రూపములో సరళరేఖ సమీకరణము $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$\implies \quad y - 3 = \frac{1}{3}(x + 2)$$

$\therefore$ కావలసిన సమీకరణము $x - 3y + 11 = 0$ అగును.

ఉదాహరణ 5.22

(-1 , 1) మరియు (2 , -4) బిందువుల ద్వారా పోవు సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన బిందువులను $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ అనుకొనుము.

ఇక్కడ $x_1 = -1$, $y_1 = 1$ మరియు $x_2 = 2$, $y_2 = -4$.

రెండు బిందువుల సూత్రంనుపయోగించి, సరళరేఖ సమీకరణము

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\implies \frac{y - 1}{-4 - 1} = \frac{x + 1}{2 + 1}$$

$$\implies 3y - 3 = -5x - 5$$

$5x + 3y + 2 = 0$ అనునది కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణము.

ఉదాహరణ 5.23

$\triangle ABC$ యొక్క శీర్షములు $A(2, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(4, 5)$. శీర్షము A ద్వారా గీయబడు మధ్యగత రేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన త్రిభుజము యొక్క ఒక శీర్షమునుండి దానికెదుటి భుజము యొక్క మధ్య బిందువునకు గీయబడు సరళరేఖను మధ్యగత రేఖ అని అందురు. BC యొక్క మధ్య బిందవును D అనుకొనుము.

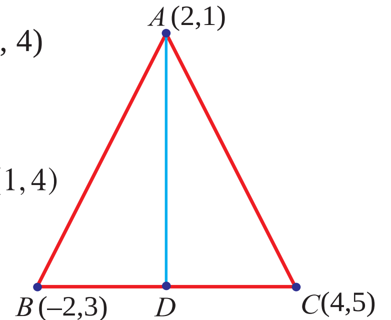
$\therefore$ BC యొక్క మధ్య బిందువు $D\left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{3 + 5}{2}\right) = D(1, 4)$

మధ్య గత రేఖ AD యొక్క సమీకరణము

$\frac{y - 1}{4 - 1} = \frac{x - 2}{1 - 2}$ $\quad \because (x_1, y_1) = (2, 1)$ మరియు $(x_2, y_2) = (1, 4)$

$\frac{y - 1}{3} = \frac{x - 2}{-1}$

$\therefore$ $3x + y - 7 = 0$ అనునది కావలసిన సమీకరణము.



పటము 5.30

ఉదాహరణ 5.24

ఒక సరళరేఖ యొక్క x-అంతరఖండము మరియు y-అంతరఖండములు క్రమముగా $\frac{2}{3}$ మరియు $\frac{3}{4}$ అయిన ఆ సరళరేఖ సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడినది, సరళరేఖ $x-$ అంతరఖండము $a = \frac{2}{3}$, $y-$ అంతరఖండము $b = \frac{3}{4}$.

అంతరఖండ రూపములో సరళరేఖ సమీకరణము

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \implies \frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{\frac{3}{4}} = 1$$

$$\implies \frac{3x}{2} + \frac{4y}{3} = 1$$

కావున, $9x + 8y - 6 = 0$ అనునది కావలసిన సమీకరణము.

ఉదాహరణ 5.25

$(6, -2)$ బిందువు ద్వారా పోవుచూ, అంతరఖండముల మొత్తము 5 గా గల సరళరేఖల సమీకరణములను కనుగొనుము.

సాధన కావలసిన సరళరేఖల $x-$అంతరఖండము మరియు $y-$అంతరఖండములు క్రమముగా a మరియు b అనుకొనుము.

అంతరఖండముల మొత్తము $a + b = 5 \implies b = 5 - a$

అంతరఖండ రూపములో సరళరేఖ సమీకరణము

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \implies \frac{x}{a} + \frac{y}{5-a} = 1$$

$$\implies \frac{(5-a)x + ay}{a(5-a)} = 1$$

కావున $$(5-a)x + ay = a(5-a) \quad (1)$$

(1) వ సమీకరణము $(6, -2)$ ద్వారా పోవుటచే

$$(5-a)6 + a(-2) = a(5-a)$$

$$\implies a^2 - 13a + 30 = 0.$$

$$(a-3)(a-10) = 0$$

$$\therefore \quad a = 3 \text{ or } a = 10$$

$a = 3$, అయిన (1) $\implies (5-3)x + 3y = 3(5-3)$

$$\implies 2x + 3y = 6 \quad (2)$$

$a = 10$,అయిన (1) $\implies (5-10)x + 10y = 10(5-10)$

$$\implies -5x + 10y = -50$$

అవి $$x - 2y - 10 = 0. \quad (3)$$

కాబట్టి $2x + 3y = 6$ మరియు $x - 2y - 10 = 0$ అనునవి కావలసిన సరళరేఖల సమీకరణములు

అభ్యాసము 5.4

1. x−అక్షమునకు సమాంతరముగా, x−అక్షము నుండి 5 ప్రమాణముల దూరములో గల సరళరేఖ సమీకరణములను వ్రాయుము.

2. నిరూపకాక్షములకు సమాంతరముగా, $(-5,\ -2)$ బిందువు ద్వారా పోవు సరళరేఖల సమీకరణములను కనుగొనుము.

3. క్రింది సమాచారము గల సరళరేఖల సమీకరణమును కనుగొనుము.

   (i) వాలు -3, y−అంతరఖండము 4.

   (ii) క్షితిజముతో చేయు కోణము 60^0, y−అంతరఖండము 3

4. ఆది బిందవుకు పైన 3 ప్రమాణముల దూరములో y-అక్షమును ఖండించుచూ మరియు $\tan\theta = \frac{1}{2}$ గా నుండు సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము. (θ అనునది క్షితిజముతో చేయు కోణము).

5. క్రింది వాటిని సమీకరణములుగా గల సరళరేఖల వాలు మరియు y−అంతరఖండమును కనుగొనుము.

   (i) $y = x + 1$ (ii) $5x = 3y$ (iii) $4x - 2y + 1 = 0$ (iv) $10x + 15y + 6 = 0$

6. క్రింది సమాచారము గల సరళరేఖల సమీకరణము కనుగొనుము.

   (i) వాలు -4 మరియు $(1\ ,\ 2)$ బిందువు ద్వారా పోవును.

   (ii) వాలు $\frac{2}{3}$ మరియు $(5, -4)$ బిందువు ద్వారా పోవును.

7. $(4,\ 2)$, $(3,\ 1)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండము యొక్క మధ్య బిందువు ద్వారా పోవుచూ మరియు క్షితిజముతో చేయు కోణము 30^0 గా గల సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

8. క్రింది బిందువుల ద్వారా పోవు సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

   (i) (-2, 5), (3, 6) (ii) (0, -6), (-8, 2)

9. $P(1, -3)$, $Q(-2, 5)$, $R(-3, 4)$ లను శీర్షములుగా గల $\triangle PQR$ లో శీర్షము R నుండి గీయబడు మధ్య గత రేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

10. సరళరేఖ సమీకరణ భావననుపయోగించి, క్రింది బిందువులు ఏకరేఖీయమని చూపుము.

    (i) (4, 2), (7, 5), (9, 7) (ii) $(1, 4), (3, -2), (-3, 16)$

11. క్రింది x మరియు y అంతరఖండములు చేయు సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

    (i) 2, 3 (ii) $-\frac{1}{3},\ \frac{3}{2}$ (iii) $\frac{2}{5},\ -\frac{3}{4}$

12. క్రింది సరళరేఖల x మరియు y అంతరఖండములను కనుగొనుము.

    (i) $5x + 3y - 15 = 0$ (ii) $2x - y + 16 = 0$ (iii) $3x + 10y + 4 = 0$

13. $(3,\ 4)$ బిందువు ద్వారా పోవుచూ, అంతరఖండముల నిష్పత్తి 3:2 గా గల సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

14. $(2,\ 2)$ బిందువు ద్వారా పోవుచూ, అంతరఖండముల మొత్తము 9 గా నుండు సరళరేఖల సమీకరణమును కనుగొనుము.

15. (5, −3) బిందువు ద్వారా పోవుచూ, అక్షములపై సమాన పరిమాణము కలిగి వ్యతిరేఖ గుర్తులతో నుండు అంతరఖండములు కలిగియున్న సరళరేఖ సమీకరణము కనుగొనుము.

16. (9, −1) బిందువు ద్వారా పోవుచూ x−అంతరఖండము y−అంతరఖండమునకు మూడు రెట్లుగా నుండు సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

17. ఒక సరళరేఖ నిరూపకాక్షములను A మరియు B వద్ద ఖండించును. AB మధ్య బిందువు (3, 2) అయిన AB యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము.

18. (22, −6) బిందువు ద్వారా పోవుచూ, x−అంతరఖండము y−అంతరఖండముకన్నా 5 ఎక్కువగా నుండు సరళరేఖ సమీకరణము కనుగొనుము.

19. సమలంబ చతుర్భుజము (రాంబస్) $ABCD$ యొక్క రెండు శీర్షములు $A(3, 6)$ మరియు $C(-1, 2)$ అయిన కర్ణము BD వైపు గల సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

20. $A(-2, 6)$, $B(3, -4)$ లను కలుపు రేఖాఖండమును **P** అంతరముగా 2 : 3 నిష్పత్తితో విభజించును. వాలు $\frac{3}{2}$ మరియు **P** ద్వారా పోవు సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

5.7 సరళరేఖ యొక్క సామాన్య సమీకరణ రూపము (General Form of Eqn. of a straight line)

సరళరేఖ సమీకరణమును వివిధ రూపములలో తెలిజయేసినను, దానిని $ax + by + c = 0$ అను ప్రామాణిక రూపంలో మార్చుదుము. ఇక్కడ a, b, c అనునవి వాస్తవ స్థిరాంకములు మరియు $a \neq 0$ లేక $b \neq 0$.

ఇప్పుడు క్రింది వాటిని కనుగొనెదము.

(i) $ax + by + c = 0$ యొక్క వాలు,

(ii) $ax + by + c = 0$ కి సమాంతరముగా నుండు సరళరేఖ సమీకరణము

(iii) $ax + by + c = 0$ కి లంబముగా నుండు సరళరేఖ సమీకరణము

(iv) రెండు ఖండన రేఖల ఖండన బిందువు.

(i) సరళరేఖ సామాన్య సమీకరణము $ax + by + c = 0$ రూపములో నుండును.

పై సమీకరణము $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, $b \neq 0$ గా వ్రాయవచ్చును. (1)

(1) ని వాలు అంతరఖండ రూపమైన $y = mx + k$ తో పోల్చగా

వాలు $m = -\frac{a}{b}$ మరియు $y-$ అంతరఖండము $= -\frac{c}{b}$

$\therefore$ $ax + by + c = 0$, అను సమీకరణమునకు

వాలు $m = -\frac{x \text{ గుణకము}}{y \text{ గుణకము}}$, $y-$ అంతరఖండము $= -\frac{\text{స్థిరపదము}}{y \text{ గుణకము}}$.

(ii) $ax + by + c = 0$ రేఖకు సమాంతరముగా నుండు సరళరేఖ సమీకరణము.

రెండు సరళరేఖలు సమాంతరమైనచో వాటి వాలులు సమానమని మనకు తెలుసు, కావున $ax + by + c = 0$ రేఖకు సమాంతరముగా నుండు అన్ని సరళరేఖల సమీకరణములు $ax + by + k = 0$, రూపములోనుండును. k కి విభిన్న విలువలు ఉండును.

(iii) $ax + by + c = 0$ రేఖకు లంబముగా నుండు సరళరేఖ సమీకరణము.

రెండు క్షితిజ లంబముగాని రేఖలు లంబముగా ఉన్నట్లయితే వాటి లబ్ధము -1 అగునని మనకు తెలుసు.

కావున $ax + by + c = 0$ కి లంబముగా నుండు అన్ని సరళరేఖల సమీకరణము $bx - ay + k = 0$, అగును. (k. యొక్క వివిధ విలువలకు)

గమనిక

శూన్యేతర గుణకములు గల $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ అను రెండు సరళరేఖలు,

(i) సమాంతరమైనచో $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

(ii) లంబమైనచో $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ అగును.

(iv) రెండు సరళరేఖల ఖండన బిందువు

రెండు సరళరేఖలు సమాంతరముగా లేనియెడల అవి ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకొనును. ఈ బిందువు రెండు రేఖలపై ఉండును. కావున రెండు సరళరేఖల సమీకరణములను సాధించిన ఖండన బిందువును పొందవచ్చును.

ఉదాహరణ 5.26

సరళరేఖలు $3x + 2y - 12 = 0$ మరియు $6x + 4y + 8 = 0$ లు సమాంతరముగా ఉన్నవని చూపుము.

సాధన సరళరేఖ $3x + 2y - 12 = 0$ యొక్క వాలు $m_1 = -\frac{x \text{ గుణకము}}{y \text{ గుణకము}} = -\frac{3}{2}$

అదేవిధంగా, $6x + 4y + 8 = 0$ యొక్క వాలు $m_2 = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

$\therefore$ $m_1 = m_2$. కావున రెండు సరళరేఖలు సమాంతరముగా నుండును.

ఉదాహరణ 5.27

సరళరేఖలు $x + 2y + 1 = 0$ మరియు $2x - y + 5 = 0$ ఒకదానికొకటి లంబముగా ఉన్నవని నిరూపించుము.

సాధన సరళరేఖ $x + 2y + 1 = 0$ వాలు $m_1 = -\frac{x \text{ గుణకము}}{y \text{ గుణకము}} = -\frac{1}{2}$

సరళరేఖ $2x - y + 5 = 0$ వాలు $m_2 = -\frac{x \text{ గుణకము}}{y \text{ గుణకము}} = \frac{-2}{-1} = 2$

వాలుల లబ్ధము $m_1m_2 = -\frac{1}{2} \times 2 = -1$

$\therefore$ రెండు రేఖలు లంబముగా ఉన్నవి.

ఉదాహరణ 5.28

$(2, 5)$ బిందువు ద్వారా పోవుచూ $x - 8y + 13 = 0$ అనురేఖకు సమాంతరముగా నుండు సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన $x - 8y + 13 = 0$ కి సమాంతరముగా నుండు సరళరేఖ సమీకరణము $x - 8y + k = 0$

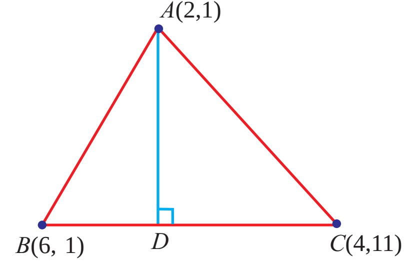
ఇది $(2, 5)$ బిందువు ద్వారా పోవుటచే

$$2 - 8(5) + k = 0 \implies k = 38$$

$\therefore$ కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణము $x - 8y + 38 = 0$

ఉదాహరణ 5.29

$A(2, 1), B(6, -1), C(4, 11)$ అనునవి $\triangle ABC$ యొక్క శీర్షములు శీర్షము A ద్వారా పోవు ఉన్నతి యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము.



పటము 5.31

సాధన BC యొక్క వాలు $= \dfrac{11+1}{4-6} = -6$

AD రేఖ BC కి లంబముగా నుండుటచే, AD వాలు $= \dfrac{1}{6}$

$\therefore$ AD యొక్క సమీకరణము $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 1 = \frac{1}{6}(x-2) \implies 6y - 6 = x - 2$$

$\therefore$ కావలసిన రేఖ సమీకరణము $x - 6y + 4 = 0$

అభ్యాసము 5.5

1. క్రింది సరళరేఖల వాలులు కనుగొనుము.

   (i) $3x + 4y - 6 = 0$ (ii) $y = 7x + 6$ (iii) $4x = 5y + 3$.

2. సరళరేఖలు $x + 2y + 1 = 0$ మరియు $3x + 6y + 2 = 0$ సమాంతరముగా ఉన్నవని చూపుము.

3. సరళరేఖలు $3x - 5y + 7 = 0$ మరియు $15x + 9y + 4 = 0$ లంబముగా ఉన్నవని చూపుము.

4. $\dfrac{y}{2} = x - p$ మరియు $ax + 5 = 3y$ అనునవి సమాంతరమైన a విలువను కనుగొనుము.

5. సరళరేఖలు $5x - 2y - 9 = 0$ మరియు $ay + 2x - 11 = 0$ ఒక దానికొకటి లంబముగా నుండిన a విలువలను కనుగొనుము.

6. సరళరేఖలు $8px + (2 - 3p)y + 1 = 0$ మరియు $px + 8y - 7 = 0$ ఒకదానికొకటి లంబముగా ఉండిన P విలువను కనుగొనుము.

7. ఒక సరళరేఖ $(h, 3), (4, 1)$ బిందువుల ద్వారా పోవుచూ $7x - 9y - 19 = 0$ రేఖను లంబముగా ఖండించిన h విలువను కనుగొనుము.

8. $(1, -2)$. బిందువు ద్వారా పోవుచూ, $3x - y + 7 = 0$ కి సమాంతరముగా గల సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

9. $(1, -2)$. బిందువు ద్వారా పోవుచూ, $x - 2y + 3 = 0$ కి లంబముగా గల సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

10. $(3, 4), (-1, 2)$ లను కలుపు సరళరేఖను లంబ సమద్విఖండన చేయు రేఖ యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము.

11. $2x + y - 3 = 0$, $5x + y - 6 = 0$ అను రేఖల ఖండన బిందువు ద్వారా పోవుచూ, $(1, 2)$ $(2, 1)$ లను కలుపు రేఖకు సమాంతరముగానుండు సరళరేఖ యొక్క సమీకరణం కనుగొనుము.

12. $5x - 6y = 1, 3x + 2y + 5 = 0$ అను రేఖల ఖండనబిందువు ద్వారా పోవుచూ, $3x - 5y + 11 = 0$ రేఖకి లంబముగా నుండు సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

13. $3x - y + 9 = 0$, $x + 2y = 4$ రేఖల ఖండన బిందువును, $2x + y - 4 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$ రేఖల ఖండన బిందువును కలుపు సరళరేఖ యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము.

14. $A(2, -4)$, $B(3, 3)$, $C(-1, 5)$ అనునవి $\triangle ABC$ యొక్క శీర్షములు. శీర్షము B గుండా పోవు ఉన్నతి యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము.

15. $A(-4,4)$, $B(8,4)$, $C(8,10)$ అనునవి $\triangle ABC$ యొక్క శీర్షములైన, శీర్షము A ద్వారా గీయబడు మధ్యగత రేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

16. ఆదిబిందువు నుండి $3x + 2y = 13$ రేఖకు గీయబడు లంబపాదము యొక్క నిరూపకములను కనుగొనుము.

17. $x + 2y = 7$ మరియు $2x + y = 8$ అనునవి ఒక వృత్తము యొక్క రెండు వ్యాసముల సమీకరణములు $(0, -2)$ అనునది వృత్తముపై ఒక బిందువైన ఆ వృత్త వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము.

18. $2x - 3y + 4 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$ సరళరేఖల ఖండన బిందువు మరియు $(3, -2)$, $(-5, 8)$ బిందువులను కలుపు రేఖ యొక్క మధ్య బిందువును అంత్య బిందవులుగా గలిగిన సరళరేఖా ఖండము యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము.

19. ఒక సమద్విబాహు $\triangle PQR$ లో, $PQ = PR$. ఆధారము QR, $x-$అక్షముపై ఉన్నది, శీర్షము $y-$అక్షముపై యున్నది. మరియు $2x - 3y + 9 = 0$ అనునది PQ యొక్క సమీకరణము అయిన PR వైపుగల సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

అభ్యాసము 5.6

సరైన సమాధానమును ఎన్నుకొనుము.

1. $(a, -b)$, $(3a, 5b)$ బిందువులను కలుపు రేఖ యొక్క మధ్య బిందువు.

   (A) $(-a, 2b)$ (B) $(2a, 4b)$ (C) $(2a, 2b)$ (D) $(-a, -3b)$

2. $A(1, -3)$, $B(-3, 9)$ లను కలుపు రేఖాఖండమును అంతరముగా $1:3$ నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువు P

   (A) $(2, 1)$ (B) $(0, 0)$ (C) $\left(\frac{5}{3}, 2\right)$ (D) $(1, -2)$

3. $A(3, 4)$, $B(14, -3)$ లను కలుపు రేఖాఖండము $x-$అక్షమును P వద్ద సంధించును. అయిన రేఖాఖండము AB ని P విభజించు నిష్పత్తి ?

   (A) $4:3$ (B) $3:4$ (C) $2:3$ (D) $4:1$

4. $(-2, -5)$, $(-2, 12)$, $(10, -1)$ లను శీర్షములుగా గల త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రము.

   (A) $(6, 6)$ (B) $(4, 4)$ (C) $(3, 3)$ (D) $(2, 2)$

5. $(1, 2)$, $(4, 6)$, $(x, 6)$, $(3, 2)$ అనునవి ఒక క్రమముగా తీసుకొనబడిన సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క శీర్షములైన, x విలువ.

   (A) 6 (B) 2 (C) 1 (D) 3

6. (0,0), $(2,0)$, $(0,2)$ బిందువులతో ఏర్పడు త్రిభుజవైశాల్యం

(A) 1 చ.ప్ర. (B) 2 చ.ప్ర. (C) 4 చ.ప్ర. (D) 8 చ.ప్ర.

7. $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, $(1,0)$ బిందువులతో ఏర్పడు చతుర్భుజ వైశాల్యం

(A) 3 చ.ప్ర. (B) 2 చ.ప్ర. (C) 4 చ.ప్ర. (D) 1 చ.ప్ర.

8. $x-$ అక్షమునకు సమాంతరముగా నుండు సరళరేఖ క్షితిజముతో చేయు కోణము.

(A) 0^0 (B) 60^0 (C) 45^0 (D) 90^0

9. $(3,-2)$, $(-1,a)$ లను కలుపు రేఖ వాలు $-\frac{3}{2}$, అయిన a విలుకు సమానమైనది.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

10. $(-2,6)$, $(4,8)$ బిందువులను కలుపు సరళరేఖకు లంబముగా నుండు సరళరేఖ వాలు.

(A) $\frac{1}{3}$ (B) 3 (C) -3 (D) $-\frac{1}{3}$

11. $9x-y-2=0$, $2x+y-9=0$ అను సరళరేఖల ఖండన బిందువు.

(A) $(-1,7)$ (B) $(7,1)$ (C) $(1,7)$ (D) $(-1,-7)$

12. $4x+3y-12=0$ అను సరళరేఖ $y-$అక్షమును ఖండించు బిందువు.

(A) $(3,0)$ (B) $(0,4)$ (C) $(3,4)$ (D) $(0,-4)$

13. $7y-2x=11$ అను సరళరేఖ యొక్క వాలుకు సమానమైనది.

(A) $-\frac{7}{2}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $-\frac{2}{7}$

14. x-అక్షమునకు సమాంతరముగా మరియు (2 , -7) బిందువు ద్వారా పోవు సరళరేఖా సమీకరణము.

(A) $x=2$ (B) $x=-7$ (C) $y=-7$ (D) $y=2$

15. $2x-3y+6=0$, అను రేఖ యొక్క x, y అంతరఖండములు క్రమముగా

(A) 2, 3 (B) 3, 2 (C) -3, 2 (D) 3, -2

16. $(-6, 4)$ అనునది వృత్త కేంద్రము. ఆ వృత్త వ్యాసము యొక్క ఒక అంత్యబిందువు $(-12, 8)$ అయిన మరొక్క అంత్య బిందువు

(A) $(-18, 12)$ (B) $(-9, 6)$ (C) $(-3, 2)$ (D) $(0, 0)$

17. $2x+3y-7=0$అనురేఖకు లంబముగా, ఆది బిందువు ద్వారా పోవు సరళరేఖ సమీకరణము

(A) $2x+3y=0$ (B) $3x-2y=0$ (C) $y+5=0$ (D) $y-5=0$

18. బిందువు $(-2,5)$ ద్వారా పోవుచూ $y-$అక్షమునకు సమాంతరముగా నుండు రేఖ సమీకరణము

(A) $x-2=0$ (B) $x+2=0$ (C) $y+5=0$ (D) $y-5=0$

19. (2, 5), (4, 6), (a,a) బిందువులు ఏకరేఖీయములైన a విలువకు సమానమైనది

(A) -8 (B) 4 (C) -4 (D) 8

20. $y = 2x + k$ అను సరళరేఖ $(1, 2)$ బిందువు ద్వారా పోయిన k విలువకు సమానమైనది

(A) 0 (B) 4 (C) 5 (D) -3

21. వాలు 3 గాను మరియు y–అంతరఖండము -4 గాను కలిగిన సరళరేఖసమీకరణము.

(A) $3x - y - 4 = 0$ (B) $3x + y - 4 = 0$

(C) $3x - y + 4 = 0$ (D) $3x + y + 4 = 0$

22. $y = 0$ మరియు $x = -4$ అను సరళరేఖల ఖండన బిందువు.

(A) $(0, -4)$ (B) $(-4, 0)$ (C) $(0, 4)$ (D) $(4, 0)$

23. $3x + 6y + 7 = 0$ మరియు $2x + ky = 5$ అను సరళరేఖలు ఒకదానికొకటి లంబముగా నుండిన k విలువ

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

ముఖ్యాంశములు

- $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ల మధ్య దూరం $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండమును అంతరముగా $l : m$ నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువు P యొక్క నిరూపకములు $\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \frac{ly_2 + my_1}{l + m}\right)$.
- $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ బిందువులను కలుపు రేఖా ఖండమును బాహ్యముగా $l : m$ నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువు Q యొక్క నిరూపకములు $\left(\frac{lx_2 - mx_1}{l - m}, \frac{ly_2 - my_1}{l - m}\right)$.
- (x_1, y_1), (x_2, y_2) లను కలుపు రేఖాఖండము యొక్క మధ్య బిందువు $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
- (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) బిందువులతో ఏర్పడు త్రిభుజవైశాల్యం

$$\frac{1}{2}\sum x_1(y_2 - y_3) = \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\}.$$

- $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ అను మూడు బిందువులు ఏకరేఖీయమైనచో

(i) $x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3$ (ii) AB వాలు $=$ BC వాలు (లేక) AC వాలు

- ఒక రేఖ x అక్షముతో ధనాత్మక దిశలో θ కోణము చేసిన, వాలు $m = \tan\theta$
- (x_1, y_1), (x_2, y_2) బిందువుల ద్వారా పోవు క్షితిజ లంబముగాని రేఖ యొక్క

వాలు $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

- $ax + by + c = 0$ అను రేఖ యొక్క వాలు $m = -\dfrac{x \text{ గుణకము}}{y \text{ గుణకము}} = -\dfrac{a}{b}, \ b \neq 0$
- క్షితిజ సమాంతర రేఖ వాలు 0, క్షితిజ లంబరేఖ వాలు అనిర్వచతము.
- రెండు రేఖల సమాంతరమైనచో వాటి వాలులు సమానము
- క్షితిజ లంబముగాని రెండు రేఖలు లంబముగా నుండినచో వాటి వాలులు లబ్ధము -1

  అనగా $m_1 m_2 = -1$.

సరళరేఖ సమీకరణములు

వ.సం	సరళరేఖ	సమీకరణము
1.	x-అక్షము	$y = 0$
2.	y-అక్షము	$x = 0$
3.	x-అక్షము నకు సమాంతరముగా నుండు	$y = k$
4.	y-అక్షము నకు సమాంతరముగా నుండు	$x = k$
5.	$ax+by+c=0$ నకు సమాంతరముగా నుండు	$ax+by+k = 0$
6.	$ax+by+c=0$ నకు లంబముగా నుండు	$bx-ay+k = 0$
	ఇవ్వబడినది	సమీకరణము
1.	ఆదిబిందువు ద్వారా పోవునది	$y = mx$
2.	వాలు m, y-అంతరఖండము c	$y = mx + c$
3.	వాలు m, బిందువు (x_1, y_1)	$y - y_1 = m(x-x_1)$
4.	$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ అను రెండు బిందువుల ద్వారా పోవు	$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$
5.	x-అంతరఖండము a, y-అంతరఖండము b	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

6

రేఖా గణితము

"There is geometry in the humming of the strings, there is music in the spacing of spheres" - Pythagoras

- పరిచయం
- ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము
- కోణ సమద్విఖండన సిద్ధాంతము
- సరూప త్రిభుజములు
- స్పర్శరేఖా జ్యా సిద్ధాంతము
- పైథాగరస్ సిద్ధాంతము



యూక్లిడ్

(300 BC)

గ్రీస్

గణిత శాస్త్ర చరిత్రలో యూక్లిడ్ యొక్క "Elements" అను గ్రంథము చాలా ప్రభావము చూపినది మరియు గణితశాస్త్ర బోధనకు ముఖ్యంగా రేఖాగణితమునకు ఒక పాఠ్యపుస్తకమువలె దోహదపడెను.

గరిష్ఠ సామాన్య భాజకము కనుగొనుటలో యూక్లిడ్ యొక్క విశేష విధి ఒక సమర్థమైన పద్ధతిగా చెప్పవచ్చు.

6.1 పరిచయం

రేఖాగణితం, గణితశాస్త్రములో ఒక శాఖ. ఇది వివిధ జామితీయ ఆకారముల ధర్మములను గూర్చి తెలియజేయును. ఖచ్చితమైన కొలతలు లేకుండానే వివిధ జ్యామితీయ ఆకారముల ధర్మములు మరియు లక్షణములను తెలుపు సత్యప్రవచనములు లేక సిద్ధాంతములను వివరణాత్మక రేఖాగణితం అందురు. రేఖా గణితమును అధ్యయనము చేయుటద్వారా తర్కరీత్యా ఆలోచించునట్లు చేయును.

క్రీ.పూ 300 ప్రాంతములో నివసించిన యూక్లిడ్‌ను రేఖాగణిత పిత అని చెప్పవచ్చును. యూక్లిడ్ జ్యామితీయ ఫలితముల ను నవీన పద్ధతిలో ఆలోచించునట్లు చేసెను. ఇతను మునుపటి ఫలితముల నిరూపణలు మరియు కొన్ని స్వయం సిద్ధ సూత్రములైన సత్యప్రవచనములు లేక విధులను హేతుబద్ధముగా నిరూపించెను.

రేఖాగణితం, ఇంజనీరింగ్ మరియు శిల్పశాస్త్ర రంగంలో ముఖ్యత్వం వహించుచున్నది. ఉదాహరణకు మన జీవితములో ముఖ్యపాత్ర వహించుచున్న అనేక వంతెనల నిర్మాణములో సర్వసమాన మరియు సరూప త్రిభుజముల ఉపయోగములు ఎంతో ఉన్నది. ఈ త్రిభుజములు వంతెనలను పటిష్ఠంగా ఎక్కువ కాలము మన్నిక వచ్చునట్లు మరియు ఒత్తిడిని తట్టుకొనునట్లు నిర్మించుటకు సహాయపడును. భవనముల నిర్మాణంలో ఈ రేఖాగణితం రెండు రకములుగా పనిచేయుచున్నది. ఒకటి భవనమును పటిష్ఠంగా నిర్మించుటకు మరొకటి అందమును పెంపొందించుటకు. ఈ అద్భుతమైన రేఖాగణిత ఆకారములు ఉపయోగించుట వలన, భవనములు మరియు తాజ్‌మహల్ వంటి నిర్మాణములు అందరిచే ఆకర్షింపబడుచున్నవి. జ్యామితీయ నిరూపణలు గణితశాస్త్రములోని అనేక శాఖల విస్తరణకు మరియు అర్థము చేసుకొనుటకు దోహదపడుచున్నవి.

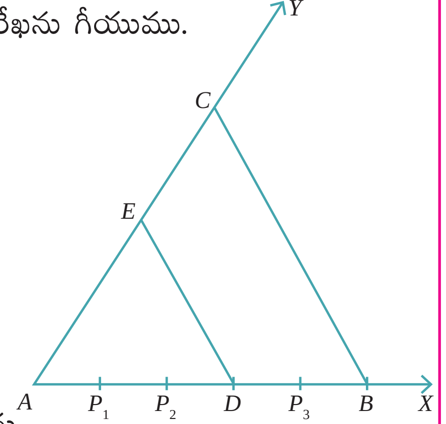
గ్రీకు దేశమునకు చెందిన 'థేల్స్' అను గొప్ప గణితశాస్త్రవేత్త ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతమును ప్రతిపాదించెను. ఈ సిద్ధాంతమును థేల్స్ సిద్ధాంతము అందురు.

ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతమును అర్థముచేసుకొనుటకు ఈ క్రింది కృత్యమును చేసెదము.

కృత్యము

ఏదేని కోణము XAY ని గీచి, భుజము AX పై P_1, P_2, D, P_3 మరియు B అను ఐదు బిందువులు $AP_1 = P_1P_2 = P_2D = DP_3 = P_3B = 1$ ప్రమాణము ఉండునట్లు గుర్తించుము.

B ద్వారా AY కిరణము C వద్ద ఖండించినట్లు ఏదేని ఒక రేఖను గీయుము. మరల BC కి సమాంతరముగా D ద్వారా AC ని E వద్ద ఖండించినట్లు ఒక రేఖను గీయుము.



పటము 6.1

ఇప్పుడు $AD = AP_1 + P_1P_2 + P_2D = 3$ ప్రమాణములు

మరియు $DB = DP_3 + P_3B = 2$ ప్రమాణములు

$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$

AE మరియు EC లను కొలువుము.

$\frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$ అని పరిశీలించుము.

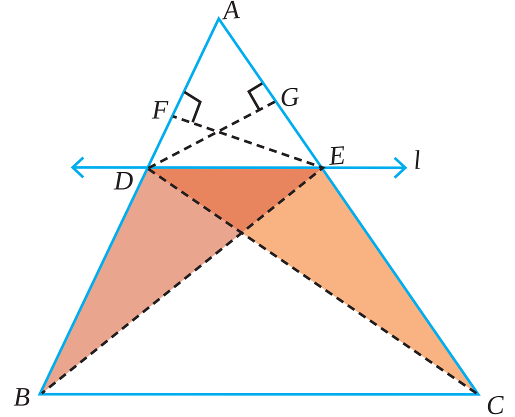
కావున ΔABC లో $DE||BC$ అయిన, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ అగును.

ఈ ఫలితమును ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము లేక థేల్స్ సిద్ధాంతము అని అందురు. ఈ సిద్ధాంతమును ఈ క్రింది విధముగా నిరూపించెదము

6.2 ప్రాథమిక అనుపాత మరియు కోణ సమద్విఖండన సిద్ధాంతము.

సిద్ధాంతము 6.1 ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము లేక థేల్స్ సిద్ధాంతము.
(Basic Proportionality Theorem or Thales Theorem)

ఒక త్రిభుజములోని ఏదేని ఒక భుజమునకు సమాంతరముగా, మిగిలిన రెండు భుజములను ఖండించినట్లు ఒక రేఖను గీచిన, అది ఆ మిగిలిన రెండు భుజములను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించును.



పటము 6.2

ఇవ్వబడినది: త్రిభుజము ABC లో l అను సరళరేఖ BC కి సమాంతరముగా, AB ని D వద్ద మరియు AC ని E వద్ద ఖండించుచున్నది.

నిరూపించవలసినది: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

నిర్మాణము: BE, CD లను కలుపుము. $EF \perp AB$ మరియు $DG \perp CA$ గా ఉండునట్లు గీయుము.

నిరూపణ

$EF \perp AB$ గా ఉండుటచే, త్రిభుజములు ADE మరియు DBE ల ఎత్తు EF అగును.

(ΔADE) వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times$ భూమి $\times$ ఎత్తు $= \frac{1}{2} AD \times EF$ మరియు

(ΔDBE) వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times$ భూమి $\times$ ఎత్తు $= \frac{1}{2} DB \times EF$

$$\therefore \quad \frac{\Delta ADE \text{ వైశాల్యము}}{\Delta DBE \text{ వైశాల్యము}} = \frac{\frac{1}{2} AD \times EF}{\frac{1}{2} DB \times EF} = \frac{AD}{DB} \qquad (1)$$

అదేవిధంగా

$$\frac{\Delta ADE \text{ వైశాల్యము}}{\Delta DCE \text{ వైశాల్యము}} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DG}{\frac{1}{2} \times EC \times DG} = \frac{AE}{EC} \qquad (2)$$

కానీ ΔDBE మరియు ΔDCE లు DE అను ఒకే ఆధారముపై మరియు BC మరియు DE అను సమాంతరరేఖల మధ్య ఉన్నది

$$\therefore \quad (\Delta DBE) \text{ వైశాల్యము} = (\Delta DCE) \text{ వైశాల్యము} \qquad (3)$$

(1), (2) మరియు (3) ల నుంచి మనకు లభించినది $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. ఇదియే మనకు కావలసిన సిద్ధాంతము.

ఉపసిద్ధాంతము

త్రిభుజము ABC లో BC కి సమాంతరముగా నుండు సరళరేఖ DE, AB ని D వద్ద మరియు AC ని E వద్ద ఖండించిన (i) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (ii) $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$ అగును.

నిరూపణ

(i) థేల్స్ సిద్ధాంతము నుండి

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

$$\Longrightarrow \quad 1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$$

కావున $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ అగును

(ii) అదేవిధంగా $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$ అని నిరూపించవచ్చును.

మీకు తెలుసా?

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ అయిన $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.
దీనినే కాంపొనెన్డో అని అందురు.

ఇక్కడ $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

$\Rightarrow \frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$ అగును

కాంపొనెన్డో ప్రకారం

ఈ సిద్ధాంతము విపర్యము సరియేనా? దీనిని పరీక్షించుటకు క్రింది కృత్యమును చేయుదుము.

కృత్యము

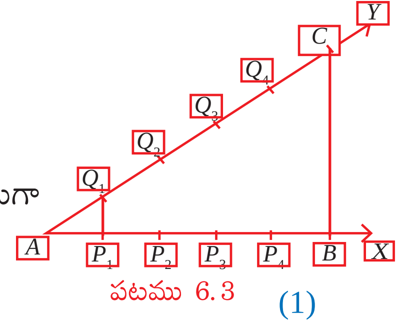
$\angle XAY$ అను ఏదేని కోణమును గీచి, కిరణము AX పై P_1, P_2, P_3, P_4 మరియు B అను బిందువులను $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4B = 1$ ప్రమాణము ఉండునట్లు గుర్తించుము.

అదేవిధంగా కిరణము AY పై Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 మరియు C అను బిందువులను $AQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4C = 2$ ప్రమాణములు ఉండునట్లు గుర్తించుము.

P_1Q_1 మరియు BC లను కలుపుము.

ఇప్పుడు $\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{1}{4}$ మరియు $\frac{AQ_1}{Q_1C} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

కావున $\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{AQ_1}{Q_1C}$



పటము 6.3

రేఖలు P_1Q_1 మరియు BC లు ఒకదానికొకటి సమాంతరముగా ఉన్నవని పరిశీలించగలము

i.e., $P_1Q_1 \parallel BC$ (1)

అదేవిధంగా P_2Q_2, P_3Q_3 మరియు P_4Q_4లను కలపగా

$\frac{AP_2}{P_2B} = \frac{AQ_2}{Q_2C} = \frac{2}{3}$ మరియు $P_2Q_2 \parallel BC$ (2)

$\frac{AP_3}{P_3B} = \frac{AQ_3}{Q_3C} = \frac{3}{2}$ మరియు $P_3Q_3 \parallel BC$ (3)

$\frac{AP_4}{P_4B} = \frac{AQ_4}{Q_4C} = \frac{4}{1}$ మరియు $P_4Q_4 \parallel BC$ (4)

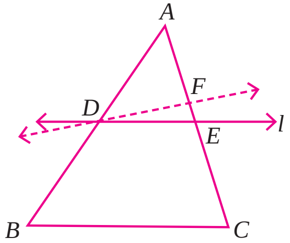
(1), (2), (3) మరియు (4) ల నుండి మనము పరిశీలించినది ఏమనగా, ఏదేని రేఖ త్రిభుజములోని రెండు భుజములను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించిన అది మూడవ భుజమునకు సమాంతరముగా ఉండును.

ఈ దిశలోనే థేల్స్ సిద్ధాంత విపర్యమును నిర్వచించి నిరూపించెదము.

సిద్ధాంతము 6.2 ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంత విపర్యము (థేల్స్ సిద్ధాంత విపర్యము)

(Converse of Basic Proportionality Theorem or Converse of Thales Theorem)

ఒక త్రిభుజములోని రెండు భుజాలను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించు సరళరేఖ, మూడవ భుజానికి సమాంతరముగా ఉండును.



పటము 6.4

ఇవ్వబడినది: ΔABC లో l రేఖ AB ని D వద్ద, AC ని E వద్ద $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ అగునట్లు ఖండించుచున్నది. (1)

నిరూపించవలసినది : $DE \parallel BC$

నిర్మాణము: DE , BC కి సమాంతరముగా లేకున్నచో, $DF \parallel BC$ అగునట్లు DF అను మరియొక రేఖను గీయుము.

నిరూపణ $DF \parallel BC$ అగుటచే థేల్స్ సిద్ధాంతమునసరించి

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC} \quad (2)$$

(1), (2) ల నుండి $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EC} \implies \frac{AF+FC}{FC} = \frac{AE+EC}{EC}$

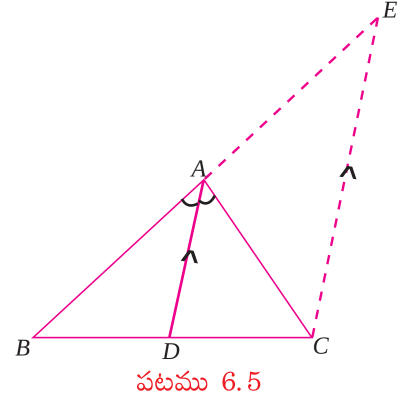
$$\frac{AC}{FC} = \frac{AC}{EC} \quad \therefore\ FC = EC$$

ఇది F మరియు E ఏకీభవించినపుడు మాత్రమే సంభవించును $\therefore\ DE \parallel BC$

సిద్ధాంతము 6.3 కోణ సమద్విఖండన సిద్ధాంతము (Angle Bisector Theorem)

ఒక త్రిభుజములోని కోణమును అంతరముగా (బాహ్యంగా) సమద్విఖండన చేయు రేఖ, ఆ కోణము యొక్క ఎదుటి భుజాన్ని అంతరముగా (బాహ్యంగా), మిగిలిన రెండు భుజాల నిష్పత్తిలో విభజించును.

సందర్భము *(i)* అంతరముగా



పటము 6.5

ఇవ్వబడినది : $\triangle ABC$ లో $\angle BAC$ ని అంతరముగా సమద్విఖండన చేయు రేఖ AD, BC ని D వద్ద సంధించుచున్నది.

నిరూపించవలసినది : $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$

నిర్మాణము: $CE \parallel DA$ గా ఉండునట్లు గీచి, BA ని పొడిగించగా అది E వద్ద సంధించును.

నిరూపణ $CE \parallel DA$ అగుటచే AC ఒక తిర్యగ్రేఖ

కనుక $\angle DAC = \angle ACE$ (ఏకాంతర కోణములు) (1)

మరియు $\angle BAD = \angle AEC$ (అనురూప కోణములు) (2)

AD అనునది $\angle A$ ను కోణసమద్విఖండన చేయుటచే $\angle BAD = \angle DAC$ అగును. (3)

(1), (2), (3) ల నుండి $\angle ACE = \angle AEC$

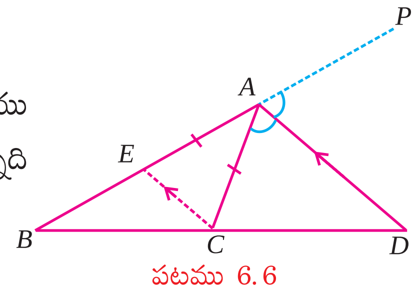
కావున $\triangle ACE$ లో $AE = AC$ అగును (సమాన కోణములకు ఎదురుగా ఉండు భుజములు సమానము) $\triangle BCE$ లో $CE \parallel DA$ కనుక,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \quad \text{(థేల్స్ సిద్ధాంతము)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad (\because \ AE = AC)$$

కనుక సిద్ధాంతము నిరూపించబడినది.

సందర్భము *(ii)* బాహ్యంగా (ఇది పరీక్షకు లేదు)



పటము 6.6

ఇవ్వబడినది: $\triangle ABC$ లో $\angle BAC$ ని బాహ్యంగా సమద్విఖండన చేయు రేఖ AD, BC ని పొడిగించగా అది D వద్ద సంధించుచున్నది

నిరూపించవలసినది: $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$

నిర్మాణము: $CE \parallel DA$ గా ఉండునట్లు గీచిన, AB ని E వద్ద ఖండించును.

నిరూపణ $CE \parallel DA$ అగుటచే AC ఒక తిర్యగ్రేఖ

$\angle ECA = \angle CAD$ (ఏకాంతర కోణములు) (1)

మరియు $CE \parallel DA$ మరియు BP తిర్యగ్రేఖ అగుటచే

$\angle CEA = \angle DAP$ (అనురూప కోణములు) (2)

కానీ AD అనునది $\angle CAP$ యొక్క సమద్విఖండనము అగుటచే

$\angle CAD = \angle DAP$ (3)

(1), (2), (3) ల నుండి

$\angle CEA = \angle ECA$

కావున $\triangle ECA$ లో, $AC = AE$ అగును (సమాన కోణములకు ఎదురుగా నుండు భుజములు సమానము)

$\triangle BDA$ లో, $EC \parallel AD$ అగును

$\therefore \quad \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{AE}$ (థేల్స్ సిద్ధాంతము)

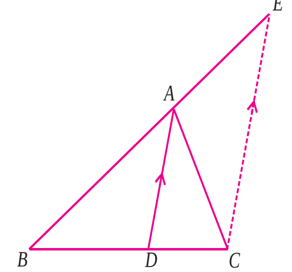
$\Longrightarrow \quad \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{AC}$ $(AE = AC)$

సిద్ధాంతము నిరూపించబడినది.

సిద్ధాంతము 6.4 కోణ సమద్విఖండన సిద్ధాంత విపర్యము (Converse of Angle Bisector Theorem)

ఒక త్రిభుజ శీర్షము గుండా పోవు రేఖ, ఎదుటి భుజమును అంతరముగా (బాహ్యంగా) మిగిలిన రెండు భుజముల నిష్పత్తిలో విభజించిన, ఆ రేఖ శీర్షకోణమును అంతరంగా (బాహ్యంగా) సమద్విఖండన చేయును.

సందర్భము *(i)* అంతరముగా



పటము 6.7

ఇవ్వబడినది : $\triangle ABC$ లో రేఖ AD ఎదుటి భుజం BC ని అంతరముగా

$\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ (1)

అగునట్లు విభజించుచున్నది.

నిరూపించవలసినది : AD అనునది $\angle BAC$ యొక్క అంతర సమద్విఖండనము.

i.e., $\angle BAD = \angle DAC$ అని నిరూపించవలెను.

నిర్మాణము : C గుండా $CE \parallel AD$ గా ఉండునట్లు BA ని E వరకు పొడిగించుము.

నిరూపణ $CE \parallel AD$ అగుటచే థేల్స్ సిద్ధాంతము నుండి $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{AE}$ అగును (2)

కావున (1), (2) ల నుండి $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AB}{AC}$ అగును

$\therefore \quad AE = AC$

ఇక్కడ $\triangle ACE$ లో $\angle ACE = \angle AEC$ $(AE = AC)$ (3)

AD మరియు CE అను సమాంతరరేఖలకు AC తిర్యగ్రేఖ అగుటచే

$\angle DAC = \angle ACE$ (ఏకాంతర కోణములు సమానము) (4)

AD మరియు CE అను సమాంతరరేఖలకు BE తిర్యగ్రేఖ అగుటచే

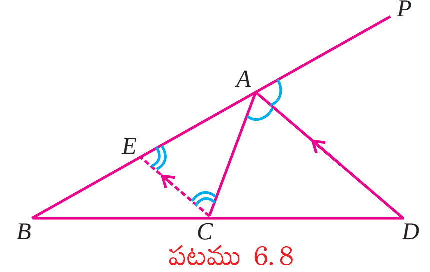
$\angle BAD = \angle AEC$ (అనురూప కోణములు సమానము) (5)

(3), (4), (5) ల నుండి $\angle BAD = \angle DAC$

$\therefore$ AD అనునది $\angle BAC$ యొక్క సమద్విఖండనము.

కావున సిద్ధాంతము నిరూపించబడినది.

సందర్భము *(ii)* బాహ్యంగా (ఇది పరీక్షకు లేదు)



పటము 6.8

ఇవ్వబడినది: $\triangle ABC$ లో, A కి ఎదుటి భుజము BC ని D వరకు పొడిగించగా ఏర్పడిన రేఖను AD అను రేఖ బాహ్యముగా $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ అగునట్లు విభజించుచున్నది. (1)

నిరూపించవలసినది : AD అనునది $\angle PAC$ యొక్క సమద్విఖండనము.

i.e., $\angle PAD = \angle DAC$ అని నిరూపించవలెను.

నిర్మాణము : C గుండా $CE \parallel AD$ గా ఉండునట్లు గీచిన అది BA ని E వద్ద సంధించును.

నిరూపణ $CE \parallel AD$ అగుటచే థేల్స్ సిద్ధాంతము నుండి $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{EA}$ (2)

(1), (2) ల నుండి, $\frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC}$ $\therefore$ $AE = AC$

$\triangle ACE$ లో $\angle ACE = \angle AEC$ $(AE = AC)$ (3)

AD మరియు CE అను సమాంతర రేఖలకు AC తిర్యగ్రేఖ అగుటచే

$\angle ACE = \angle DAC$ (ఏకాంతర కోణములు) (4)

AD మరియు CE అను సమాంతర రేఖలకు BA తిర్యగ్రేఖ అగుటచే

$\angle PAD = \angle AEC$ (అనురూప కోణములు) (5)

(3), (4), (5) ల నుండి

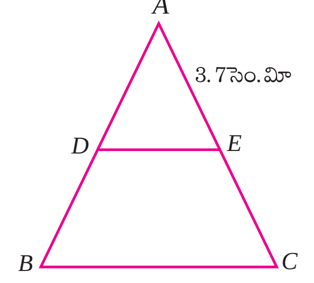
$\angle PAD = \angle DAC$

$\therefore$ AD అనునది $\angle PAC$ యొక్క సమద్విఖండనము. కావున $\angle BAC$ యొక్క బాహ్య సమద్విఖండనము AD అగును.

కావున సిద్ధాంతము నిరూపించబడినది.

ఉదాహరణ 6.1

$\triangle ABC$ లో $DE \parallel BC$ మరియు $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$, $AE = 3.7$ సెం.మీ అయిన EC ని కనుగొనుము.



పటము 6.9

సాధన $\triangle ABC$ లో $DE \parallel BC$

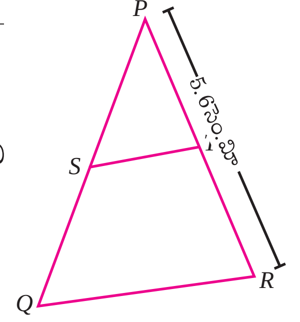
$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (థేల్స్ సిద్ధాంతము)

$\Longrightarrow \quad EC = \frac{AE \times DB}{AD}$

కావున $EC = \frac{3.7 \times 3}{2} = 5.55$ సెం.మీ

ఉదాహరణ 6.2

$\triangle PQR$ లో PQ పై S అనునది ఒక బిందువు. $ST \parallel QR$, $\frac{PS}{SQ} = \frac{3}{5}$ మరియు $PR = 5.6$ సెం.మీ అయిన PT ని కనుగొనుము



పటము 6.10

సాధన $\triangle PQR$ లో $ST \parallel QR$ అని ఇవ్వబడినది. కావున థేల్స్ సిద్ధాంతమునుసరించి

$$\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR} \qquad (1)$$

$PT = x$ అనుకొనుము. కావున $TR = PR - PT = 5.6 - x$

(1) నుండి $PT = TR\left(\frac{PS}{SQ}\right)$

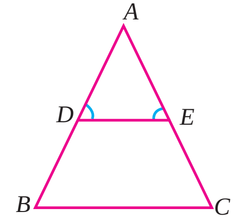
$$x = (5.6 - x)\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$5x = 16.8 - 3x$$

కావున $x = \frac{16.8}{8} = 2.1$ i.e., PT = 2.1 సెం.మీ

ఉదాహరణ 6.3

$\triangle ABC$ లో D మరియు E అనునవి క్రమముగా AB మరియు AC లపై నుండు బిందువులు మరియు $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, $\angle ADE = \angle DEA$ అయిన $\triangle ABC$ ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజమగునని నిరూపించుము.



పటము 6.11

సాధన $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ అగుటచే థేల్స్ సిద్ధాంతము విపర్యయము నుండి $DE \parallel BC$ అగును

$\therefore \quad \angle ADE = \angle ABC \qquad (1)$

మరియు $\angle DEA = \angle BCA \qquad (2)$

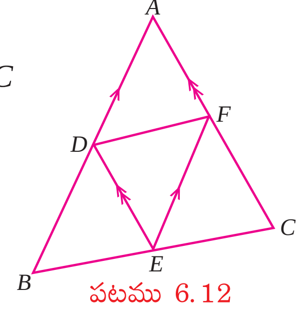
కానీ $\angle ADE = \angle DEA$ అని ఇవ్వబడినది. $\qquad (3)$

(1), (2) మరియు (3) ల నుండి $\angle ABC = \angle BCA$ అగును.

$\therefore \quad AC = AB$ (ఎదుటి కోణములు సమానమైన ఎదుటి భుజములు సమానమగును)

కావున $\triangle ABC$ ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము.

ఉదాహరణ 6.4



పటము 6.12

$\triangle ABC$ లో, బిందువులు D, E మరియు F అనునవి క్రమముగా AB, BC మరియు CA భుజములపై తీసికొనబడినది. $DE \parallel AC$ మరియు $EF \parallel AB$ అయిన $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{FC}$ అని నిరూపింపుము.

సాధన $\triangle ABC$ లో $DE \parallel AC$ అని ఇవ్వబడినది

$$\therefore \quad \frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC} \quad \text{(థేల్స్ సిద్ధాంతము)} \qquad (1)$$

మరియు $EF \parallel AB$ అని ఇవ్వబడినది.

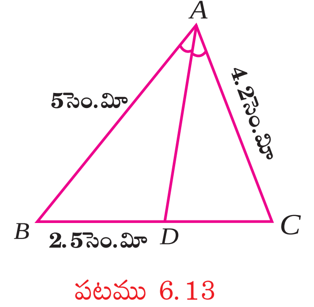
$$\therefore \quad \frac{BE}{EC} = \frac{AF}{FC} \quad \text{(థేల్స్ సిద్ధాంతము)} \qquad (2)$$

(1), (2) ల నుండి, $\frac{BD}{AD} = \frac{AF}{FC}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{BD + AD}{AD} = \frac{AF + FC}{FC} \quad \text{(కాంపొనెన్డో నియమము ప్రకారం)}$$

కావున $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{FC}$.

ఉదాహరణ 6.5



పటము 6.13

$\triangle ABC$ లో AD అనునది $\angle A$ ను అంతరముగా సమద్విఖండన చేసి భుజము BC ని D వద్ద సంధించును. $BD = 2.5$ సెం.మీ, $AB = 5$ సెం.మీ మరియు $AC = 4.2$ సెం.మీ అయిన DC ని కనుగొనుము.

సాధన $\triangle ABC$ లో $\angle A$ యొక్క అంతర సమద్విఖండనము AD .

$$\therefore \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad \text{(కోణ సమద్విఖండన సిద్ధాంతము)}$$

$$\Longrightarrow \quad DC = \frac{BD \times AC}{AB}$$

కావున $DC = \frac{2.5 \times 4.2}{5} = 2.1$సెం.మీ.

ఉదాహరణ 6.6

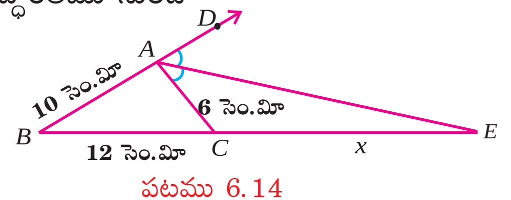
$\triangle ABC$ లో, AE అనునది $\angle A$ ని బాహ్య సమద్విఖండనము చేసి, BC ని పొడిగించగా ఏర్పడిన రేఖను E వద్ద సంధించును. $AB = 10$సెం.మీ, $AC = 6$సెం.మీ మరియు $BC = 12$సెం.మీ, అయిన CE ని కనుగొనుము.

సాధన $\triangle ABC$ లో, AE అనునది $\angle A$ ని బాహ్య సమద్విఖమడనము చేసి, BC ని పొడిగించగా E వద్ద సంధించును. $CE = x$ సెం.మీ అనుకొనుము. కోణసమద్విఖండన సిద్ధాంతము నుండి

$$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC} \Longrightarrow \frac{12 + x}{x} = \frac{10}{6}$$

$3(12 + x) = 5x$. కావున $x = 18$.

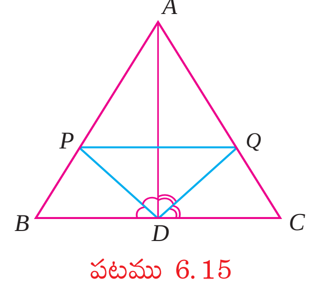
కాబట్టి $CE = 18$సెం.మీ.



పటము 6.14

ఉదాహరణ 6.7

$\triangle ABC$ లో, భుజము BC మధ్య బిందువు D. బిందువులు P, Q అనునవి క్రమముగా AB, AC పై ఉన్నవి. మరియు $\angle BDA$ ని DP సమద్విఖండన చేయును, $\angle ADC$ ని DQ సమద్విఖండన చేయుచున్న, $PQ \parallel BC$ అని నిరూపించుము



పటము 6.15

సాధన $\triangle ABC$ లో $\angle BDA$ ని DP సమద్విఖండన చేయును.

$\therefore \quad \frac{AP}{PB} = \frac{AD}{BD}$ (కోణ సమద్విఖండన సిద్ధాంతము) (1)

$\triangle ADC$ లో $\angle ADC$ ని DQ సమద్విఖండన చేయును.

$\therefore \quad \frac{AQ}{QC} = \frac{AD}{DC}$ (కోణ సమద్విఖండన సిద్ధాంతము) (2)

కానీ $\quad BD = DC$ $\quad$ (BC మధ్య బిందువు D)

ఇప్పుడు (2)$\Longrightarrow \quad \frac{AQ}{QC} = \frac{AD}{BD}$ (3)

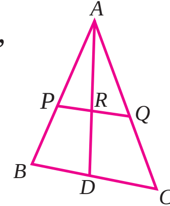
(1) మరియు (3) ల నుండి, $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

కావున $\quad PQ \parallel BC$. $\quad$ (థేల్స్ సిద్ధాంత విపర్యయము)

అభ్యాసము 6.1

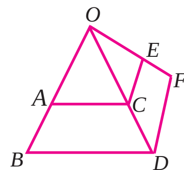
1. ΔABC లో బిందువులు D మరియు E లు క్రమముగా భుజములు AB మరియు AC లపై ఉన్నవి, మరియు $DE \parallel BC$ అయిన
   (i) $AD = 6$ సెం.మీ, $DB = 9$ సెం.మీ మరియు $AE = 8$ సెం.మీ, అయిన AC ని కనుగొనుము.
   (ii) $AD = 8$ సెం.మీ, $AB = 12$ సెం.మీ మరియు $AE = 12$ సెం.మీ,అయిన CE ని కనుగొనుము.
   (iii) $AD = 4x–3$, $BD = 3x–1$, $AE = 8x–7$ మరియు $EC = 5x–3$ అయిన x విలువను కనుగొనుము.

2. పటములో $AP = 3$ సెం.మీ, $AR = 4.5$ సెం.మీ, $AQ = 6$ సెం.మీ, $AB = 5$ సెం.మీ మరియు $AC = 10$ సెం.మీ. అయిన AD పొడవును కనుగొనుము.



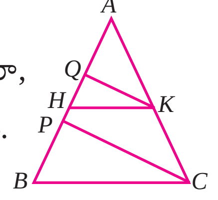
3. $\triangle PQR$ లో బిందువులు E మరియు F లు క్రమముగా భుజములు PQ మరియు PR లపై ఉన్నవి. క్రింది వాటికి $EF \parallel QR$ అగునని సరి చూడుము.
   (i) $PE = 3.9$ సెం.మీ, $EQ = 3$ సెం.మీ, $PF = 3.6$ సెం.మీ మరియు $FR = 2.4$ సెం.మీ.
   (ii) $PE = 4$ సెం.మీ, $QE = 4.5$ సెం.మీ, $PF = 8$ సెం.మీ మరియు $RF = 9$ సెం.మీ.

4. పటములో $AC \parallel BD$ మరియు $CE \parallel DF$. $OA = 12$ సెం.మీ, $AB = 9$ సెం.మీ, $OC = 8$ సెం.మీ మరియు $EF = 4.5$ సెం.మీ అయిన FO ని కనుగొనుము.

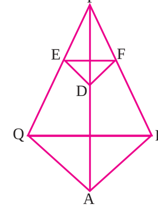


5. చతుర్భుజము $ABCD$ లో, AB కి సమాంతరముగా CD ఉన్నది. AB కి సమాంతరముగా నుండునట్లు AD ని P వద్ద మరియు BC ని Q వద్ద సంధించునట్లు ఒక రేఖ గీయబడిన, $\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC}$ అని నిరూపించుము.

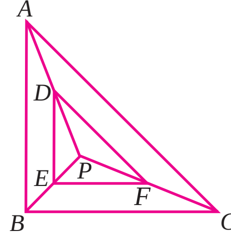
6. పటములో, $PC \parallel QK$ మరియు $BC \parallel HK$. $AQ = 6$ సెం.మీ, $QH = 4$ సెం.మీ, $HP = 5$ సెం.మీ, $KC = 18$ సెం.మీ అయిన AK మరియు PB లను కనుగొనుము.



7. పటములో $DE \parallel AQ$ మరియు $DF \parallel AR$ అయిన $EF \parallel QR$ అని నిరూపించుము



8. పటములో $DE \parallel AB$ మరియు $DF \parallel AC$ అయిన $EF \parallel BC$ అని నిరూపించుము.



9. $\triangle ABC$ లో, AD అనునది $\angle A$ యొక్క అంతరసమద్విఖండనము మరియు BC ని D వద్ద సంధించును.

 (i) $BD = 2$ సెం.మీ, $AB = 5$ సెం.మీ మరియు $DC = 3$ సెం.మీ అయిన AC ని కనుగొనుము.

 (ii) $AB = 5.6$ సెం.మీ, $AC = 6$ సెం.మీ మరియు $DC = 3$ సెం.మీ అయిన BC ని కనుగొనుము..

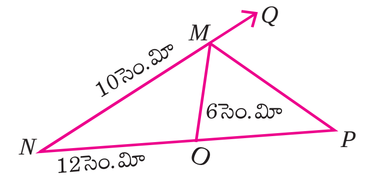
 (iii) $AB = x$, $AC = x-2$, $BD = x+2$ మరియు $DC = x-1$ అయిన x విలువను కనుగొనుము.

10. $\triangle ABC$ లో, ఈ క్రింది వాటికి AD అనునది $\angle A$ యొక్క సమద్విఖండనము అగునాయని పరీక్షింపుము.

 (i) $AB = 4$ సెం.మీ, $AC = 6$ సెం.మీ, $BD = 1.6$ సెం.మీ మరియు $CD = 2.4$ సెం.మీ.

 (ii) $AB = 6$ సెం.మీ, $AC = 8$ సెం.మీ, $BD = 1.5$ సెం.మీ మరియు $CD = 3$ సెం.మీ.

11. $\triangle MNO$ లో MP అనునది $\angle M$ యొక్క బాహ్యసమద్విఖండనము మరియు NO ను పొడిగించగా ఏర్పడిన రేఖపై P వద్ద సంధించును. $MN = 10$ సెం.మీ, $MO = 6$ సెం.మీ, $NO = 12$ సెం.మీ అయిన OP ని కనుగొనుము.



12. చతుర్భుజము $ABCD$ లో $\angle B$ మరియు $\angle D$ ల ద్విఖండనములు AC పై E వద్ద ఖండించుకొనిన $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ అని నిరూపించుము.

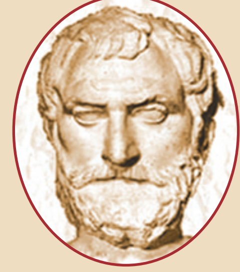
13. ΔABC లో $\angle A$ యొక్క అంతర ద్విఖండనము BC ని D వద్ద సంధించును. మరియు $\angle A$ యొక్క బాహ్య ద్విఖండనము BC ని పొడిగించగా ఏర్పడిన రేఖపై E వద్ద సంధించును. అయిన $\frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE}$ అని నిరూపించుము.

14. $ABCD$ చతుర్భుజములో $AB = AD$. AE మరియు AF లు అనునవి క్రమముగా $\angle BAC$ మరియు $\angle DAC$ అంతరద్విఖండనములైన, $EF \parallel BD$ అని నిరూపించుము.

6.3 సరూప త్రిభుజములు Similar triangles

మనము త్రిభుజముల సర్వసమానత్వం గూర్చి 8 వ తరగతిలో అధ్యయనము చేసితిమి. రెండు జ్యామితీయ ఆకారములు, ఆకారము మరియు పరిమాణములో ఒకే విధంగా ఉండిన అవి సర్వసమానము అని నేర్చుకొంటిమి. ఈ భాగములో జ్యామితీయ పటములు ఒకే ఆకారములోనుండి పరిమాణములో ఒకే రకంగా నుండనవసరములేని వాటిని గూర్చి అధ్యయనము చేయుదుము. ఇటువంటి వాటిని సరూపములు అందురు.

మన చుట్టూఉండు అనేక వస్తువులు ఆకారములో ఒకే రకముగాను మరియు పరిమాణములో ఒకే రకముగా లేకుండా వివిధ రకములుగా నుండుటను చూస్తున్నాము. ఉదాహరణకు ఒక వృక్షములోని ఆకులు ఆకారములో ఒకే రకముగా నుండి పరిమాణములో ఒకే రకముగా లేకుండా వివధ రకములుగా నుండును. అదేవిధముగా ఒకే నెగటివ్ నుంచి తీసిన చిత్రపటములు ఆకారములో ఒకే రకముగాను పరిమాణములో వేర్వేరుగా నుండును. ఈ వస్తువులన్ని ఆకారములో ఒకే రకముగాను పరిమాణములో వివధ రకములుగా నుండుటనే సరూప వస్తువులు అని అందురు.



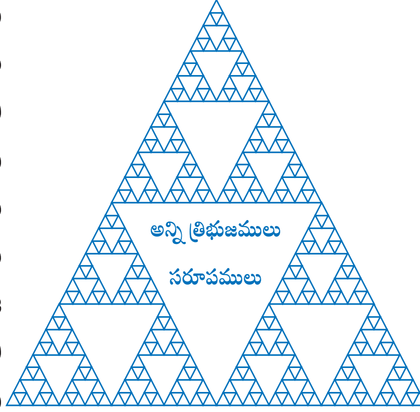
థేల్స్ ఆఫ్ మిలిటస్

(క్రీ.పూ 624-546)

గ్రీసు

థేల్స్‌ను మొట్టమొదటి తత్వవేత్త, విజ్ఞాన శాస్త్రవేత్త మరియు గణిత శాస్త్రవేత్త అని చెప్పవచ్చును. రేఖాగణితమును హేతుబద్ధముగా అన్వయించిన ఘనత ఇతనికే చెల్లును. ఇతను రేఖాగణితములో అనేక సంబంధములను కనుగొనెను. అతను సమస్యల ను సాధించిన పద్ధతి అనేక గణితశాస్త్రవేత్తల ను మేల్కొలిపినది. అతను క్రీ.పూ 585 లో సూర్యగ్రహణము కనుగొనెను.

థేల్స్ అనునతడు రేఖాగణితమును గ్రీసులో ప్రవేశపెట్టెను. అతను ఈజిప్టులో గల పిరమిడ్ ఎత్తులను వాటి నీడలు మరియు సరూప త్రిభుజముల సూత్రములనుపయోగించి కనుగొనెనని చెప్పబడుచున్నది. కావున సరూప త్రిభుజములనుపయోగించి ఎత్తులు మరియు దూరములను కొలుచుటకు వీలైనది. అతను సమద్విబాహు త్రిభుజ ఆధార కోణములు సమానమని పరిశీలించెను. అతను సరూప త్రిభుజములు మరియు లంబకోణ త్రిభుజముల ధర్మములను ప్రయోగాత్మక రేఖాగణితంలో ఉపయోగించెను.



సర్వసమాన పటములు సరూపము. కానీ దీని విపర్యము సత్యముగా ఉండనవసరము లేదు. ఈ భాగములో సరూప త్రిభుజముల జ్ఞానమునుపయోగించి సమస్యలను సాధించెదము. ఈ క్రింది కృత్యము సరూప త్రిభుజములను గూర్చి బాగుగా తెలుసుకొనుటకు ఉపయోగపడును.

కృత్యము

- ఒక కార్డ్‌బోర్డ్ తీసుకొని అందులో త్రిభుజాకారపు రంధ్రమును చేయుము.
- భూమినుండి ఒక మీటరు ఎత్తులో ఈ కార్డుబోర్డుపై సూర్యకాంతి పడునట్లు చేయుము.
- భూమి వైపు మెల్లగా తీసుకువస్తూ, భూమిపై పడు వివిధరకముల త్రిభుజాకార క్రమములను గమనించుము.
- భూమివైపు వచ్చుకొలది బింబము రాను రాను చిన్నది అగును. భూమినుంచి దూరముగా పోవుకొలది బింబము పెద్దదగును.
- త్రిభుజము యొక్క పరిమాణములు వేర్వేరుగా ఉండినను, త్రిభుజ శీర్షముల వద్ద ఏర్పడు కోణములు ఎల్లప్పుడు ఒకే విధముగా నుండుట గమనింపవచ్చు.

నిర్వచనం

రెండు త్రిభుజములు సరూపములైన

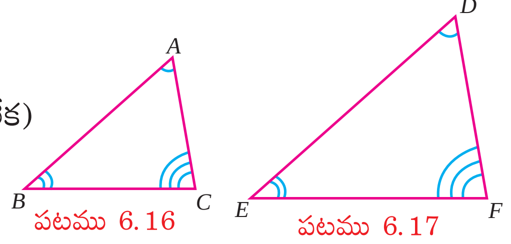
(i) వాటి అనురూప కోణములు సమానము (లేక)

(ii) వాటి అనురూప భుజముల పొడవులు ఒకే నిష్పత్తి (లేక అనుపాతము) లో ఉండును. దీనినే ఒక త్రిభుజమును విస్తరించి చూపబడినదని చెప్పవచ్చును.

$\triangle ABC$ మరియు $\triangle DEF$ లు సరూపమైన

(i) $\angle A = \angle D,\ \angle B = \angle E,\ \angle C = \angle F$ (లేక)

(ii) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$ గా నుండవలెను.



పటము 6.16 పటము 6.17

ఇచట, శీర్షములు A, B మరియు C లకు క్రమముగా D, E, F అను శీర్షములు అనురూపమైనవి. ఈ రెండు త్రిభుజముల సరూపతను సంకేతముగా $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ అని వ్రాయవచ్చును. మరియు దీనిని $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ కు సరూపముగా నున్నదని చదవవలెను. '$\sim$' అను గుర్తు 'సరూపముగా' అని తెలియజేయును.

సూచన

$\triangle ABC$ మరియు $\triangle DEF$ లను సంకేతముగా $\triangle BCA \sim \triangle EFD$ మరియు $\Delta CAB \sim \Delta FDE$ అని వాటి అనురూప శీర్షములనుపయోగించి తెలపవచ్చును.

6.3.1 త్రిభుజముల సరూపతకు ప్రతిపాదనలు

రెండు త్రిభుజములు సరూపములని నిరూపించుటకు ఈ క్రింది మూడు ప్రతిపాదనలు చాలును.

(i) కో.కో (కోణము – కోణము) సారూప్య ప్రతిపాదన

ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణములు క్రమముగా మరొక త్రిభుజములోని రెండు కోణములకు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజములు సరూపములగును..

సూచన: ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణములు క్రమముగా మరొక త్రిభుజములోని రెండు కోణములకు సమానమైన వాటి మూడవ కోణము సమానముగా నుండును. కనుక కో.కో సారూప్య ప్రతిపాదనను కో.కో.కో ప్రతిపాదన అని చెప్పవచ్చు.

(ii) భు.భు.భు. (భుజము – భుజము – భుజము) సారూప్య ప్రతిపాదన

రెండు త్రిభుజములలో, ఒక త్రిభుజములోని భుజములు మరొక త్రిభుజములోని అనురూప భుజములకు అనుపాతము (ఒకే నిష్పత్తి) లో ఉండిన వాటి అనురూపకోణములు సమానము. కనుక ఆ రెండు త్రిభుజములు సరూపములు.

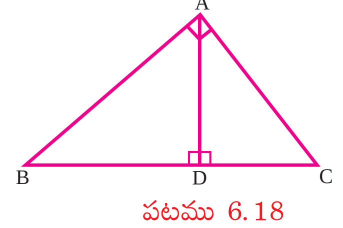
(iii) భు.కో.భు (భుజము – కోణము – భుజము) సారూప్య ప్రతిపాదన

ఒక త్రిభుజములోని ఒక కోణము మరొక త్రిభుజములోని కోణమునకు సమానమైన, ఆ కోణములను కలిగియున్న అనురూప భుజములు ఒకే అనుపాతములో నున్నచో ఆ రెండు త్రిభుజములు సరూపములు.

త్రిభుజముల సారూప్యమును గూర్చి నిరూపణలు లేకుండా కొన్ని ఫలితములను చూసెదము.

(i) రెండు సరూప త్రిభుజముల వైశాల్యముల నిష్పత్తి వాటి అనురూప భుజముల వర్గముల నిష్పత్తికి సమానమగును.

(ii) ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో, లంబకోణము గల శీర్షమునుండి కర్ణమునకు లంబము గీచిన, ఆ లంబమునకు ఇరువైపుల గల త్రిభుజములు ఒకదానికొకటి సరూపముగా నుండును. మరియు ఆ రెండు త్రిభుజములు దత్త త్రిభుజమునకు సరూపముగానుండును.



పటము 6.18

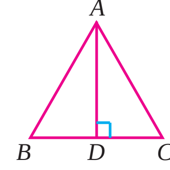
ఇచట, (a) $\Delta\, DBA \sim \Delta\, ABC$

(b) $\Delta\, DAC \sim \Delta\, ABC$

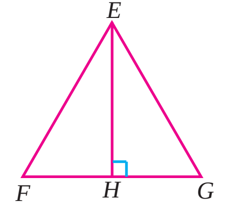
(c) $\Delta\, DBA \sim \Delta\, DAC$

(iii) రెండు త్రిభుజములు సరూపములయిన, వాటి అనురూప భుజముల నిష్పత్తి, వాటి అనురూప ఉన్నతుల నిష్పత్తికి సమానమగును.

i.e., $\Delta ABC \sim \Delta EFG$ అయిన $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{BC}{FG} = \dfrac{CA}{GE} = \dfrac{AD}{EH}$



పటము 6.19



పటము 6.20

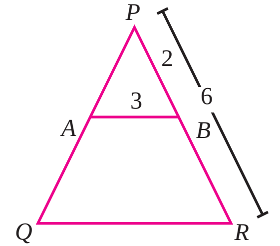
(iv) రెండు త్రిభుజములు సరూపములయిన, వాటి అనురూప భుజముల నిష్పత్తి వాటి అనురూప పరిధిల నిష్పత్తికి సమానమగును.

$\Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF$ అయిన $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD} = \dfrac{AB+BC+CA}{DE+EF+FD}$.

ఉదాహరణ 6.8

ΔPQR లో, $AB \parallel QR$. $AB = 3$ సెం.మీ, $PB = 2$ సెం.మీ మరియు $PR = 6$ సెం.మీ, అయిన QR పొడవును కనుగొనుము.

సాధన $AB = 3$ సెం.మీ, $PB = 2$ సెం.మీ మరియు $PR = 6$ సెం.మీ మరియు $AB \parallel QR$ అని ఇవ్వబడినది.



పటము 6.21

ΔPAB మరియు ΔPQR ల నుండి

$\angle PAB = \angle PQR$ (అనురూప కోణములు)

$\angle P$ ఉమ్మడిగా నున్నది

$\therefore \Delta PAB \sim \Delta PQR$ (కో.కో ప్రతిపాదన)

అనురూప భుజములు అనుపాతములో ఉండుటచే

$$\frac{AB}{QR} = \frac{PB}{PR}$$

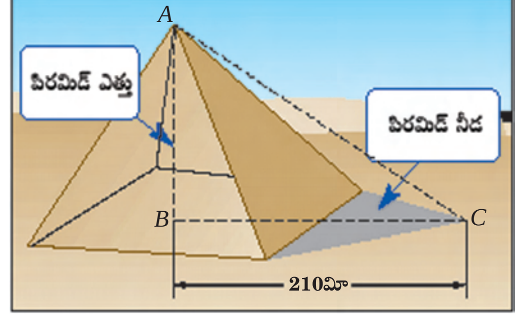
$$QR = \frac{AB \times PR}{PB}$$

$$= \frac{3 \times 6}{2}$$

కనుక $QR = 9$ సెం.మీ.

ఉదాహరణ 6.9

1.8 మీ ఎత్తుగల ఒక మనిషి, ఒక పిరమిడ్ దగ్గర నిలబడియున్నాడు. ఆ సందర్భములో మనిషి నీడ పొడవు 2.7 మీ మరియు పిరమిడ్ నీడ పొడవు 210 మీ అయిన పిరమిడ్ ఎత్తును కనుగొనుము.



పటము 6.22

సాధన పిరమిడ్ మరియు మనిషి ఎత్తును క్రమముగా AB మరియు DE అనుకొనుము.

పిరమిడ్ మరియు మనిషి నీడల పొడవులను క్రమముగా BC మరియు EF అనుకొనుము.

$\triangle ABC$ మరియు $\triangle DEF$ ల నుండి

$\angle ABC = \angle DEF = 90^{o}$

$\angle BCA = \angle EFD$

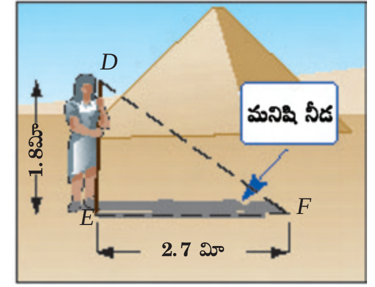
(ఒకే సందర్భములో ఊర్ధ్వకోణములు ఒకే విధముగా నుండును)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEF$ (కో. కో ప్రతిపాదన)

కనుక $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

$\Longrightarrow \frac{AB}{1.8} = \frac{210}{2.7} \Longrightarrow AB = \frac{210}{2.7} \times 1.8 = 140.$

కావున, పిరమిడ్ ఎత్తు = 140 మీ



పటము 6.23

ఉదాహరణ 6.10

ఒక మనిషి ఒక గోపురము యొక్క శిఖరమును, గోపురము నుండి 87.6 మీ దూరములో నుండు అద్దములో చూచెను. అద్దము భూమిపై నున్నది మరియు దాని ముఖము పైవైపునకు తెరవబడియున్నది. ఆ మనిషి అద్దమునుండి 0.4 మీ దూరములో గలడు మరియు అతని కంటి నుండి భూమికి గల దూరము 1.5 మీ అయిన గోపురము ఎత్తును కనుగొనుము. (మనిషి, అద్దము మరియు గోపుర పాదము ఒకే రేఖపై ఉండును)

సాధన మనిషి మరియు గోపురము ఎత్తులను క్రమముగా AB మరియు DE అనుకొనుము. అద్దముపై గోపుర శిఖరము పడుచోటును C అనుకొనుము.

$\triangle ABC$ మరియు $\triangle EDC$ లనుండి

$\angle ABC = \angle EDC = 90^{o}$

$\angle BCA = \angle DCE$

(ఒకే సందర్భములో ఊర్ధ్వకోణములు ఒకే విధముగా నుండును)

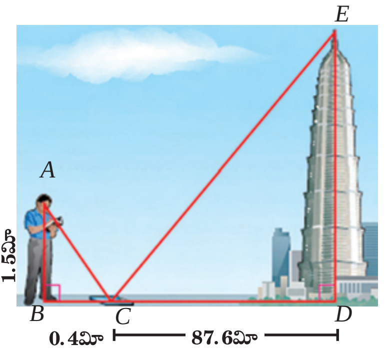
$\therefore$ పతనకోణము మరియు పరావర్తన కోణము ఒకే విధముగా నుండును

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta EDC$ (కో. కో ప్రతిపాదన)

$\therefore \frac{ED}{AB} = \frac{DC}{BC}$ (అనురూప భుజములు అనుపాతములో నుండును)

$ED = \frac{DC}{BC} \times AB = \frac{87.6}{0.4} \times 1.5 = 328.5$

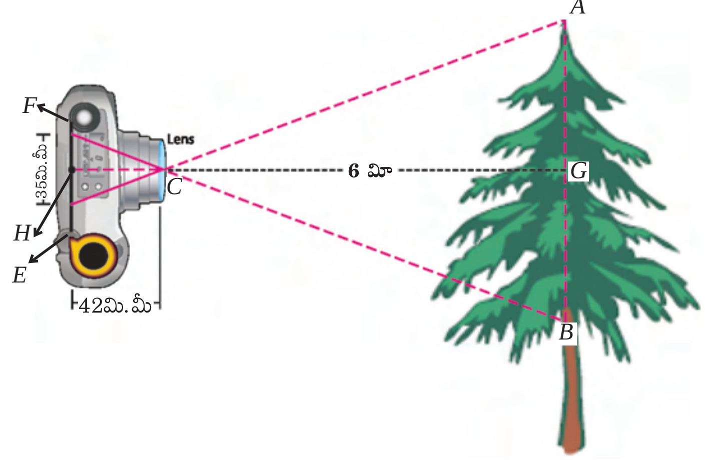
కనుక, గోపురము ఎత్తు = 328.5 మీ.



పటము 6.24

ఉదాహరణ 6.11

కెమరా ఫిల్ముపై పడు వృక్ష ప్రతిబింబ పొడవు 35 మి.మీ, కటకమునకు ఫిల్మునకు మధ్యగల దూరము 42 మి.మీ మరియు కటకమునకు వృక్షమునకు మధ్యగల దూరము 6 మీ అయిన ఫోటో తీయబడిన వృక్షభాగపు పొడవు ఎంత?



పటము 6.25

సాధన వృక్ష భాగపు ఎత్తు మరియు ఫిల్ముపై పడు దాని ప్రతిబింబము ఎత్తులను క్రమముగా AB మరియు EF అనుకొనెదము.

బిందువు C కటకమును తెలియజేయునను కొనుము.

$\triangle ACB$ మరియు $\triangle FEC$ ల ఉన్నతులను CG మరియు CH అనుకొనుము.

అనగా AB || FE.

$\triangle ACB$ మరియు $\triangle FEC$ ల నుండి $\angle BAC = \angle FEC$

$\angle ECF = \angle ACB$ (ఉన్నతుల ఎదుటి కోణములు)

$\therefore \Delta ACB \sim \Delta ECF$ (కో.కో ప్రతిపాదన)

కనుక $\dfrac{BA}{FE} = \dfrac{CG}{CH}$

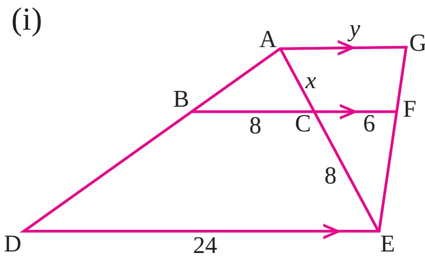
$\Longrightarrow \quad BA = \dfrac{CG}{CH} \times FE = \dfrac{6 \times 0.035}{0.042} = 5$

కావున ఫోటో తీయబడిన వృక్షభాగపు ఎత్తు = 5 మీ.

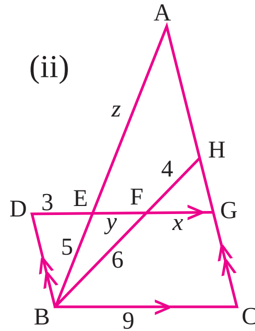
అభ్యాసము 6.2

1. క్రింది వాటిలో తెలియని విలువలను కనుగొనుము. అన్ని పొడవులు సెంటీ మీటర్లలో ఇవ్వబడినది (కొలతలు కొలబద్ద ప్రకారం లేదు)

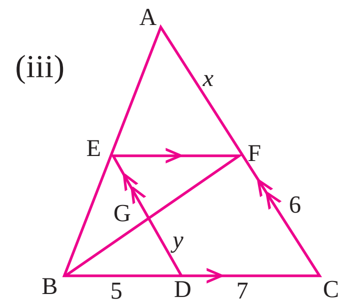
(i)



(ii)



(iii)



2. 1.8 మీ ఎత్తు గల ఒక మనిషి బింబము, కెమరా ఫిల్ముపై 1.5 సెం.మీ పొడవులో ఉన్నది. కెమరాలో కటకము నుండి 3 సెం.మీ దూరములో ఫిల్ముండిన, కెమరా నుండి మనిషి ఎంత దూరములో ఉన్నాడో కనుగొనుము?

3. 120 సెం.మీ ఎత్తు గల ఒక బాలిక, వీధి దీపస్తంభము నుండి 0.6 మీ/సె వేగముతో నడుచుకొని వెళ్ళుచున్నది. దీపము భూమి నుండి 3.6 మీ ఎత్తులో ఉండిన, 4 సెకండ్ల తర్వాత ఆమె నీడ పొడవును కనుగొనుము?

4. ఒక బాలిక తన తండ్రితో సముద్ర తీరమున ఉన్నది. ఒక ఈతగాడు సముద్రములో మునిగిపోవుటను బాలిక గమనించెను. పడమర దిక్కులో 50 మీ దూరములో గల తన తండ్రి వైపు అరిచెను. తండ్రి ఒక పడవకు, బాలిక కన్నా 10 మీ దగ్గరలో గలడు. తండ్రి పడవనుపయోగించి ఈతగాడిని చేరాలంటే 126 మీ దూరము ప్రయాణము చేయవలెను. అదే సమయములో పడవ నుంచి 98 మీ దూరములోని వాటర్ క్రాఫ్ట్‌ను నడుపు మనిషిని గమనించెను. వాటర్ క్రాఫ్ట్‌లో గల మనిషి ఈతగాడికి తూర్పుదిక్కున గలడు. అయిన ఈతగాడిని కాపాడుటకు వాటర్ క్రాఫ్ట్‌లోని మనిషి ఎంత దూరము ప్రయాణము చేయవలెను. (సూచన: పటమును చూడుము).



5. ΔABC లో బిందువులు P మరియు Q లు క్రమముగా భుజములు AB మరియు AC లపై గలదు. AP = 3 సెం.మీ, PB = 6 సెం.మీ, AQ = 5 సెం.మీ మరియు QC = 10 సెం.మీ, అయిన $BC = 3\,PQ$ అని చూపుము.

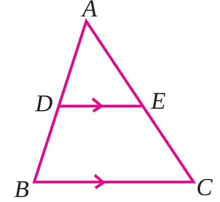
6. ΔABC లో $AB = AC$ మరియు BC = 6 సెం.మీ., AD = 5 సెం.మీ CD = 4 సెం.మీ అగునట్లు భుజముAC పై D అను బిందువు గలదు. $\Delta BCD \sim \Delta ACB$ అని చూపి, దాని గుండా BD ని కనుగొనుము.

7. ΔABC లో $DE \parallel BC$ అగునట్లు బిందువులు D మరియు E లు క్రమముగా AB మరియు AC లపై ఉన్నవి. $AB = 3\,AD$ మరియు ΔABC వైశాల్యము 72 చ.సెం.మీ అయిన చతుర్భుజము $DBCE$ వైశాల్యమును కనుగొనుము.

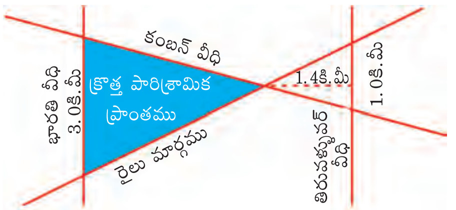
8. ΔABC భుజముల పొడవులు 6 సెం.మీ, 4 సెం.మీ మరియు 9 సెం.మీ. $\triangle PQR \sim \triangle ABC$ అగును. $\triangle PQR$ లో ఒకానొక భుజము పొడవు 35 సెం.మీ అయిన $\triangle PQR$ పొందు గరిష్ఠ పరిధి ఎంత?

9. పటములో $DE \parallel BC$ మరియు $\frac{AD}{BD} = \frac{3}{5}$ అయిన, క్రింది వానిని గణించుము.

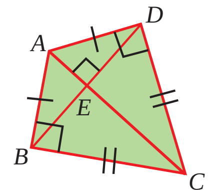
(i) $\dfrac{\triangle ADE \text{ వైశాల్యము}}{\triangle ABC \text{ వైశాల్యము}}$, (ii) $\dfrac{\text{ట్రెపీజియం BCED వైశాల్యము}}{\triangle ABC \text{ వైశాల్యము}}$



10. ఒక పట్టణములో నిరుపయోగముగా నున్న భూభాగములో ఒక క్రొత్త పారిశ్రామిక ప్రాంతమును అభివృద్ధి పరచవలెనని ప్రభుత్వము ప్రణాళిక చేసెను. పటములో చాయ వేయబడిన భాగము క్రొత్తగా నెలకొల్పవలసిన పారిశ్రామిక ప్రాంతమును తెలియజేయును. అయిన ఆ క్రొత్తగా ఏర్పడు పారిశ్రామిక ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము?



11. పటములో చూపబడినట్లు ఒక బాలుడు డైమండ్ ఆకారములో గాలి పటమును చేయుచున్నాడు. ఇందులో AE = 16 సెం.మీ, EC = 81 సెం.మీ. అతను BD అను అడ్డుపుల్లను ఉపయోగింపవలెనన్న దాని పొడవు ఎంతవుండవలెను?

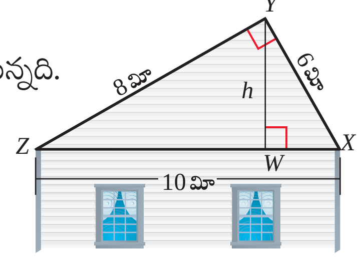


12. ఒక విద్యార్థి జెండా స్తంభము ఎత్తును నిర్ధారింప తలచెను. అతను చిన్న అద్దమును తీసుకొని జెండా స్తంభపు శిఖరము దానిపై పరావర్తనము చెందునట్లు భూమిపై ఉంచెను. అతనికి, అద్దమునకు మధ్య గల దూరము 0.5 మీ మరియు అద్దమునకు జెండా స్తంభమునకు మధ్య గల దూరము 3 మీ. అతని కనులు భూభాగమునుండి 1.5 మీ పైన ఉన్న యెడల జెండా స్తంభపు ఎత్తును కనుగొనుము? (బాలుడు, అద్దము మరియు జెండాస్తంభము ఒకే సరళరేఖలో ఉండును)

13. ఒక పైకప్పు పటములో చూపబడినట్లు అడ్డ భాగమును కలిగియున్నది. ఇందులో

(i) సరూప త్రిభుజములను గుర్తించుము

(ii) పై కప్పు ఎత్తు h ను కనుగొనుము.



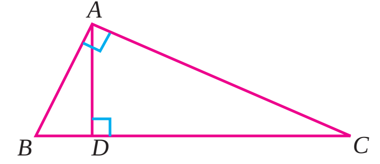
సిద్ధాంతము 6.5 పైథాగరస్ సిద్ధాంతము (బంధాయన్ సిద్ధాంతము)

ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణము యొక్క వర్గము తక్కిన రెండు భుజముల వర్గముల మొత్తమునకు సమానము.

ఇవ్వబడినది : లంబకోణ $\triangle ABC$ లో $\angle A = 90^\circ$.

నిరూపించవలసినది : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

నిర్మాణము : $AD \perp BC$ ఉండునట్లు గీయుము



పటము 6.26

నిరూపణ

త్రిభుజములు ABC మరియు DBA లలో $\angle B$ ఉమ్మడి కోణము. మరియు $\angle BAC = \angle ADB = 90^\circ$.

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DBA$ (కో.కో ప్రతిపాదన)

కనుక, వాటి అనురూప భుజములు అనుపాతములో నుండును.

కనుక, $\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{BC}{BA}$

$\therefore \quad AB^2 = DB \times BC$ (1)

అదేవిధంగా, $\triangle ABC \sim \triangle DAC$.

కనుక, $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{AC}{DC}$

$\therefore \quad AC^2 = BC \times DC$ (2)

(1) మరియు (2) లను కూడగా,

$$AB^2 + AC^2 = BD \times BC + BC \times DC$$

$$= BC(BD + DC)$$

$$= BC \times BC = BC^2$$

కనుక $BC^2 = AB^2 + AC^2$. పైథాగరస్ సిద్ధాంతము నిరూపించబడినది.

సూచన

పైథాగరస్ సిద్ధాంతము రెండు మౌళిక ఉద్దేశ్యములను కలిగియున్నది. ఒకటి వైశాల్యముల ను గురించి, మరొక్కటి పొడవులు గురించి. కనుక గుర్తింపదగిన ఈ సిద్ధాంతము రేఖాగణితము మరియు బీజగణితమును కలుపుచున్నది. పైథాగరస్ సిద్ధాంత విపర్యయము సత్యమేయగును. దీనిని మొట్ట మొదట తెలిపి, నిరూపించినవారు యూక్లిడ్ అగును.

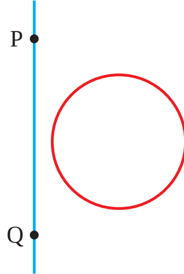
సత్య ప్రవచనము క్రింద ఇవ్వబడినది.(నిరూపణ అభ్యసనమునకు వదిలివేయబడినది.)

సిద్ధాంతము 6.6 **పైథాగరస్ సిద్ధాంత విపర్యము**

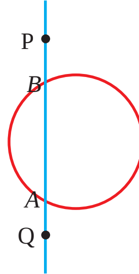
ఒక త్రిభుజమునందు ఒక భుజము యొక్క వర్గము తక్కిన రెండు భుజముల వర్గముల మొత్తమునకు సమానమైన, మొదటి భుజమునకు అభిముఖముగా నున్న కోణము లంబకోణమగును.

6.4 వృత్తములు మరియు స్పర్శరేఖలు

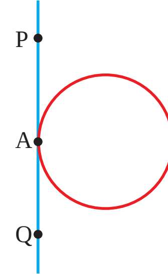
వృత్తముతో సంబంధముగల ఒక సరళరేఖ వృత్తమునకు ఒకే ఒక బిందువు వద్ద మాత్రము స్పృశించిన ఆ రేఖను స్పర్శరేఖ అందురు. రేఖాగణితంలో వృత్తములకు గీయబడు స్పర్శరేఖలు, అనేక జ్యామితీయ నిర్మాణములు మరియు నిరూపణలకు ముఖ్యపాత్ర వహించుచున్నది. ఈ భాగములో వృత్తములు మరియు స్పర్శరేఖలకు సంబంధించిన కొన్ని ఫలితములను తెలిపెదము. మరియు ముఖ్య సిద్ధాంతమైన స్పర్శరేఖ – జ్యా సిద్ధాంతమును నిరూపించెదము. ఒక తలములో ఒక సరళరేఖ మరియు ఒక వృత్తము ఉన్నట్లు తలచిన, అవి మూడు రకములుగా నుండుటకు వీలగును. అవి ఎక్కడా ఖండించుకొనవు, అవి రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించుకొనవచ్చు లేక అవి ఖచ్చితముగా ఒకే ఒక బిందువు వద్ద మాత్రము స్పృశించవచ్చును. ఇప్పుడు క్రింది పటములను చూసెదము.



పటము 6.27



పటము 6.28



పటము 6.29

పటము 6.27 లో వృత్తమునకు మరియు సరళరేఖ PQ కు ఉమ్మడిగా ఏ బిందువు లేదు.

పటము 6.28 లో సరళరేఖ PQ, వృత్తమును A మరియు B అను రెండు వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఖండించుచున్నది. ఇచ్చట PQ ని వృత్తమునకు ఖండన రేఖ అని అందురు.

పటము 6.29 లో సరళరేఖ PQ కు మరియు వృత్తమునకు ఉమ్మడిగా ఒకే ఒక బిందువు గలదు. తుల్యముగా సరళరేఖ, వృత్తమును ఒకే ఒక బిందువు వద్ద మాత్రము స్పృశించుచున్నది. సరళరేఖ PQ ని వృత్తమునకు A వద్ద గీయబడిన స్పర్శరేఖ అని అందురు.

నిర్వచనం

ఒక సరళరేఖ వృత్తమును ఒకే ఒక బిందువు వద్ద మాత్రము స్పృశించిన ఆ రేఖను వృత్తమునకు స్పర్శరేఖ అని అందురు. మరియు ఆ బిందువును స్పర్శబిందువు అని అందురు.

వృత్తములు స్పర్శరేఖల ఆధారముగా గల సిద్ధాంతములు (నిరూపణలు లేకుండా)

1. వృత్తముపై ఏ బిందువు వద్దనైనను గల స్పర్శరేఖ, ఆ స్పర్శబిందు ద్వారా పోవు వ్యాసార్ధమునకు లంబముగా నుండును.
2. వృత్తముపై ఏదేని ఒక బిందువు వద్ద ఒకే ఒక స్పర్శరేఖను మాత్రము గీయవచ్చును. ఏదేని ఒక బాహ్య బిందువు నుండి వృత్తమునకు రెండు స్పర్శరేఖలను గీయవచ్చును.
3. బాహ్యబిందువు నుండి వృత్తమునకు గీయబడు స్పర్శరేఖల పొడవులు సమానము.
4. రెండు వృత్తములు స్పృశించుకొనుచుండిన, వృత్తముల స్పర్శబిందువు ఆ రెండు వృత్తముల కేంద్రములను కలుపు రేఖపై ఉండును.
5. రెండు వృత్తములు బాహ్యముగా స్పృశించుకొనుచుండిన, వాటి కేంద్రముల మధ్య దూరము వాటి వ్యాసార్ధముల మొత్తమునకు సమానము.
6. రెండు వృత్తములు అంతరముగా స్పృశించుకొనుచుండిన, వాటి కేంద్రముల మధ్యదూరము వాటి వ్యాసార్ధముల భేదమునకు సమానము.

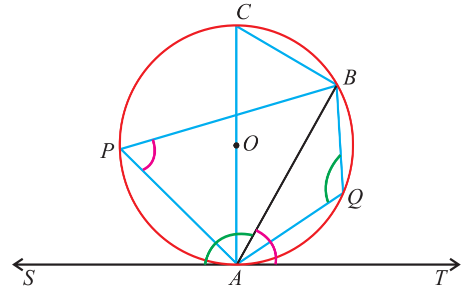
సిద్ధాంతము 6.7 స్పర్శరేఖా-జ్యా సిద్ధాంతము

స్పర్శరేఖా స్పర్శబిందువు వద్ద (వృత్తమునకు) ఒక జ్యాను గీచునచో, ఆ జ్యా స్పర్శరేఖలో చేయు కోణములు క్రమముగా ఏకాంతర వృత్త ఖండములోని కోణమునకు సమానము.

ఇవ్వబడినది : O ను కేంద్రముగా గల వృత్తము, A వద్ద గల స్పర్శరేఖ ST, AB అను జ్యా మరియు జ్యా AB కి అభిముఖముగా వృత్తముపై P, Q అనునవి రెండు బిందువులు.

నిరూపించవలసినది : (i) $\angle BAT = \angle BPA$ (ii) $\angle BAS = \angle AQB$

నిర్మాణము: AC అను వృత్త వ్యాసమును గీచి, B మరియు C లను కలుపుము



పటము 6.30

నిరూపణ

ప్రవచనం	కారణం	
$\angle ABC = 90^\circ$	అర్ధవృత్తములోని కోణము 90°	
$\angle CAB + \angle BCA = 90^\circ$	లంబకోణ $\triangle ABC$ లో రెండు లఘుకోణముల మొత్తం .	(1)
$\angle CAT = 90^\circ$	స్పర్శబిందువు వద్ద, వ్యాసము స్పర్శరేఖకు లంబముగానుండును.	
$\Longrightarrow \angle CAB + \angle BAT = 90^\circ$		(2)
$\angle CAB + \angle BCA = \angle CAB + \angle BAT$	(1) మరియు (2) ల నుంచి	
$\Longrightarrow \angle BCA = \angle BAT$		(3)

$\angle BCA = \angle BPA$ ఒకే వృత్త ఖండములోని కోణములు (4)

$\angle BAT = \angle BPA$. (3) మరియు (4) ల నుంచి (5)

కనుక (i) నిరూపించబడినది.

ఇప్పుడు $\angle BPA + \angle AQB = 180^\circ$ చక్రీయ చతుర్భుజములోని అభిముఖ కోణములు

$\Longrightarrow \angle BAT + \angle AQB = 180^\circ$ (5) నుండి (6)

మరియు $\angle BAT + \angle BAS = 180^\circ$ సంపూరక కోణములు (7)

$\angle BAT + \angle AQB = \angle BAT + \angle BAS$ (6) మరియు (7) ల నుంచి

$\angle BAS = \angle AQB$. కనుక (ii) నిరూపించబడినది.

కావున సిద్ధాంతము నిరూపించబడినది.

సిద్ధాంతము 6.8 స్పర్శరేఖా–జ్యా విపర్య సిద్ధాంతము

ఒక వృత్తములో జ్యా యొక్క ఒక అంత్యబిందువు ద్వారా ఏకాంతర వృత్త ఖండములో సమాన కోణము చేయునట్లు ఒక రేఖను గీచిన, ఆ రేఖ వృత్తమునకు స్పర్శరేఖ అగును.

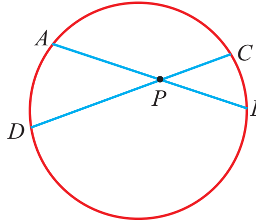
నిర్వచనం

AB రేఖా ఖండముపై P అనునది ఒక బిందువు లబ్ధము $PA \times PB$ అనునది PA మరియు PB లను భుజములుగా గల దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యమును తెలియజేయును. ఈ లబ్ధమును రేఖాఖండము AB భాగములైన PA మరియు PB కలిగియున్న దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము అని అందురు.

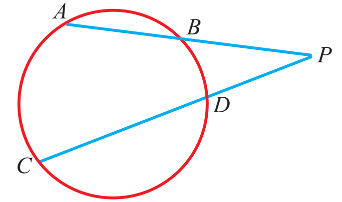


సిద్ధాంతము 6.9

వృత్తము యొక్క రెండు జ్యాలు అంతరముగా లేక బాహ్యముగా ఖండించుకొనిన ఒక జ్యా రేఖాఖండములను కలిగియున్న దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యమునకు మరొక జ్యా రేఖాఖండములను కలిగియున్న దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యమునకు సమానము.



పటము 6.31



పటము 6.32

పటము 6.31 లో 'O' కేంద్రముగా గల వృత్తమునకు AB మరియు CD అను జ్యాలు అంతరముగా P వద్ద ఖండించుకొనుచున్నవి. అయిన $PA \times PB = PC \times PD$ అగును. పటము 6.32 లో 'O' కేంద్రముగా గల వృత్తమునందు AB మరియు CD అను జ్యాలు బాహ్యముగా P వద్ద ఖండించుకొనుచున్నవి. అయిన $PA . PB = PC . PD$ అగును.

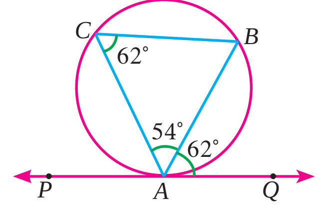
ఉదాహరణ 6.12

PQ అనునది వృత్తమునకు A వద్ద గీయబడిన స్పర్శరేఖ మరియు AB అనునది జ్యా అనుకొనుము. $\angle BAC = 54^\circ$ మరియు $\angle BAQ = 62^\circ$ అగునట్లు C అను బిందువు వృత్తముపై ఉండిన, $\angle BAC$ ని కనుగొనుము.

సాధన PQ అనునది A వద్ద గీయబడిన స్పర్శరేఖ మరియు AB అనునది జ్యా అగుటచే

$\angle BAQ = \angle ACB = 62^\circ$ అగును. (స్పర్శరేఖ – జ్యా సిద్ధాంతము)

మరియు $\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ$.



పటము 6.33

(త్రిభుజములోని కోణముల మొత్తం 180°)

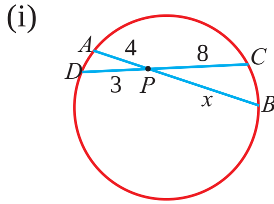
కనుక $\angle ABC = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ACB)$

$= 180^\circ - (54^\circ + 62^\circ) = 64^\circ$.

ఉదాహరణ 6.13

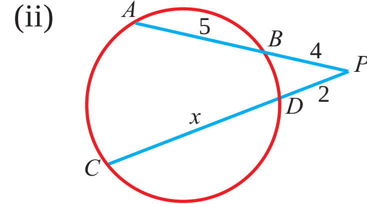
క్రింది పటములో x విలువను కనుగొనుము.

(i)



పటము 6.34

(ii)



పటము 6.35

సాధన (i) $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ అగును

$$PB = \frac{PC.PD}{PA}$$

కనుక $x = \dfrac{8 \times 3}{4} = 6$.

(ii) $PC \cdot PD = PA \cdot PB$ అగును

$$(2+x)\, 2 = 9 \times 4$$

$x + 2 = 18$ కనుక $x = 16$.

ఉదాహరణ 6.14

పటములో 'O' కేంద్రముగా గల వృత్తమునకు బాహ్యబిందువు P నుండి PA మరియు PB అను స్పర్శరేఖలు గీయబడినవి. CD అనునది వృత్తమునకు E వద్ద గల స్పర్శరేఖ మరియు $AP = 15$ సెం.మీ అయిన ΔPCD పరిధిని కనుగొనుము?

సాధన బాహ్య బిందువు నుండి వృత్తమునకు గీయబడు స్పర్శరేఖల పొడవులు సమానమని మనకు తెలుసు.

$\therefore CA = CE, \quad DB = DE$ మరియు $PA = PB$.

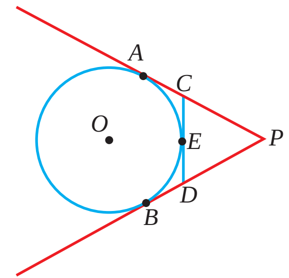
$\therefore \quad \Delta\, PCD$ పరిధి $= PC + CD + DP$

$= PC + CE + ED + DP$

$= PC + CA + DB + DP$

$= PA + PB = 2\, PA \qquad (PB = PA)$

$= 2 \times 15 = 30$ సెం.మీ.



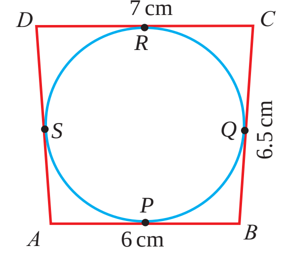
పటము 6.36

ఉదాహరణ 6.15

$ABCD$ చతుర్భుజము లో అన్ని భుజములు ఒక వృత్తమును స్పృశించును. $AB = 6$ సెం.మీ, $BC = 6.5$ సెం.మీ మరియు $CD = 7$ సెం.మీ అయిన AD పొడవును కనుగొనుము?

సాధన వృత్తము, చతుర్భుజమును P, Q, R మరియు S బిందువుల వద్ద స్పృశించుచున్నదనుకొనుము. బాహ్యబిందువు నుండి వృత్తమునకు గీయబడు స్పర్శరేఖల పొడవులు సమానమని మనకు తెలుసు.

$\therefore$ $AP = AS$ (1), $BP = BQ$ (2), $CR = CQ$ (3), $DR = DS$ (4).



పటము 6.37

(1), (2), (3) మరియు (4) లను సంకలనము చేయగా,

$AP + BP + CR + DR = AS + BQ + CQ + DS$

$AB + CD = AD + BC$.

$AD = AB + CD - BC = 6 + 7 - 6.5 = 6.5$

కనుక $AD = 6.5$ సెం.మీ.

అభ్యాసము 6.3

1. పటములో TP అనునది వృత్తమునకు గీయబడిన స్పర్శరేఖ. A మరియు B అను రెండు బిందువులు వృత్తముపై గలవు. $\angle BTP = 72^\circ$ మరియు $\angle ATB = 43^\circ$ అయిన $\angle ABT$ ని కనుగొనుము.

2. AB మరియు CD అనునది వృత్తమునకు అంతరముగా P వద్ద ఖండించుకొను జ్యాలు
   (i) $CP = 4$ సెం.మీ, $AP = 8$ సెం.మీ, $PB = 2$ సెం.మీ అయిన PD ని కనుగొనుము.
   (ii) $AP = 12$ సెం.మీ, $AB = 15$ సెం.మీ, $CP = PD$, అయిన CD ని కనుగొనుము

3. AB మరియు CD అను జ్యాలు వృత్తమునకు బాహ్యముగా P వద్ద ఖండించుకొనుచున్నవి.
   (i) $AB = 4$ సెం.మీ $BP = 5$ సెం.మీ మరియు $PD = 3$ సెం.మీ, అయిన CD ని కనుగొనుము.
   (ii) $BP = 3$ సెం.మీ, $CP = 6$ సెం.మీ మరియు $CD = 2$ సెం.మీ, అయిన AB ని కనుగొనుము.

4. ΔABC లో భుజము BC వృత్తమును P వద్ద స్పృశించును. AB మరియు AC లను క్రమముగా Q మరియు R వరకు పొడిగించబడినది. అయిన $AQ = AR = \frac{1}{2}$ (ΔABC పరిధి) అని నిరూపించుము.

5. సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క అన్ని భుజములు వృత్తమును స్పృశించిన, ఆ సమాంతర చతుర్భుజము ఒక రాంబస్ అగునని నిరూపించుము.

6. ఒక కొలనులో నీటి ఉపరితలమునకు 20 సెం.మీ పైన ఒక తామర పుష్పము ఉన్నది మరియు దాని కాండపు భాగము పాక్షికముగా నీటి ఉపరితలమునకు లోపల గలదు. గాలి వీచినపుడు పుష్పము ముందు స్థానముకన్నా 40 సెం.మీ దూరముగా ఉండునట్లు కాండము నెట్టబడినది. అయిన నీటి ఉపరితలమునకు లోపల గల కాండము పొడవు ఎంత ఉండును?

7. దీర్ఘ చతురస్రము $ABCD$ లో అంతరముగా నుండు బిందువు 'O' నుండి A, B, C మరియు D అను అన్ని శీర్షములకు కలుపబడినది. అయిన $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$ అని నిరూపించుము.

అభ్యాసము 6.4

సరైన సమాధానమును ఎన్నుకొనుము.

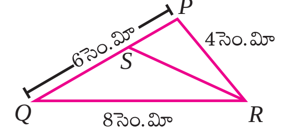
1. $\triangle ABC$ లో భుజములు AB మరియు AC లను క్రమముగా D మరియు E వద్ద ఒక సరళరేఖ ఖండించును మరియు అది BC కి సమాంతరముగా నుండిన $\frac{AE}{AC} =$

   (A) $\frac{AD}{DB}$ (B) $\frac{AD}{AB}$ (C) $\frac{DE}{BC}$ (D) $\frac{AD}{EC}$

2. $\triangle ABC$ లో $DE \parallel BC$ అగునట్లు బిందువులు D మరియు E లు క్రమముగా AB మరియు AC పై ఉన్నది. $AD = 3$ సెం.మీ, $DB = 2$ సెం.మీ మరియు $AE = 2.7$ సెం.మీ అయిన AC కి సమానమగునది.

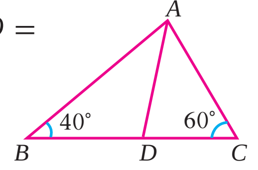
(A) 6.5 సెం.మీ (B) 4.5 సెం.మీ (C) 3.5 సెం.మీ (D) 5.5 సెం.మీ

3. $\triangle PQR$ లో RS అనునది $\angle R$ యొక్క సమద్విఖండనము. $PQ = 6$ సెం.మీ, $QR = 8$ సెం.మీ, $RP = 4$ సెం.మీ అయిన PS కు సమానమగునది.



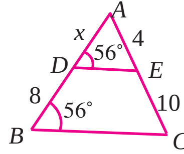
(A) 2 సెం.మీ (B) 4 సెం.మీ (C) 3 సెం.మీ (D) 6 సెం.మీ

4. పటములో $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$, $\angle B = 40^0$ మరియు $\angle C = 60^0$ అయిన $\angle BAD =$



(A) 30^0 (B) 50^0 (C) 80^0 (D) 40^0

5. పటములో x విలువకు సమానమైనది



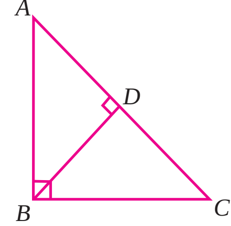
(A) $4 \cdot 2$ (B) $3 \cdot 2$

(C) $0 \cdot 8$ (D) $0 \cdot 4$

6. త్రిభుజములు ABC మరియు DEF లలో $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ అయిన

(A) $\frac{AB}{DE} = \frac{CA}{EF}$ (B) $\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{FD}$ (C) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ (D) $\frac{CA}{FD} = \frac{AB}{EF}$

7. ఇవ్వబడిన పటమునుండి తప్పుగా నుండు ప్రవచనమును గుర్తించుము



(A) $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (B) $\Delta ABD \sim \Delta ABC$

(C) $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (D) $\Delta ADB \sim \Delta BDC$

8. 12 మీ పొడవు గల నిలువు కర్ర 8 మీ పొడవు నీడను ఏర్పరచును. అదే సమయమున నేలపై ఒక గోపురము యొక్క నీడ 40 మీ పొడవును చూపిన గోపురము ఎత్తు.

(A) 40 మీ (B) 50 మీ (C) 75 మీ (D) 60 మీ

9. రెండు సరూప త్రిభుజముల భుజముల నిష్పత్తి 2:3 అయిన వాటి వైశాల్యముల నిష్పత్తి

(A) 9:4 (B) 4:9 (C) 2:3 (D) 3:2

10. త్రిభుజములు ABC మరియు DEF లు సరూపములు. వాటి వైశాల్యాములు క్రమముగా 100 చ.సెం.మీ మరియు 49 చ.సెం.మీ మరియు $BC = 8.2$ సెం.మీ అయిన $EF =$

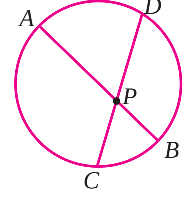
(A) 5.47 సెం.మీ (B) 5.74 సెం.మీ (C) 6.47 సెం.మీ (D) 6.74 సెం.మీ

11. రెండు సరూప త్రిభుజముల పరిధిలు క్రమముగా 24 సెం.మీ మరియు 18 సెం.మీ. మొదటి త్రిభుజము యొక్క ఒక భుజము 8 సెం.మీ అయిన దానికి అనురూపములో ఉండు మరొక త్రిభుజ భుజము.

(A) 4 సెం.మీ (B) 3 సెం.మీ (C) 9 సెం.మీ (D) 6 సెం.మీ

12. వృత్తములో AB మరియు CD అను రెండు జ్యాలను పొడిగించగా అవి P వద్ద సంధించెను. $AB = 5$, $AP = 8$ మరియు $CD = 2$ అయిన $PD =$

(A) 12 (B) 5 (C) 6 (D) 4



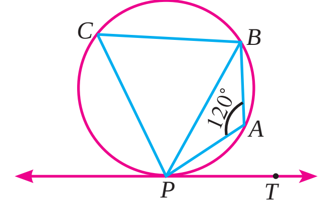
13. ప్రక్కపటములో AB మరియు CD అను జ్యాలు P వద్ద ఖండించుకొనుచున్నవి. AB =16 సెం.మీ, PD = 8 సెం.మీ, PC = 6 సెం.మీ మరియు AP >PB అయిన AP =

(A) 8 సెం.మీ (B) 4 సెం.మీ (C) 12 సెం.మీ (D) 6 సెం.మీ

14. ఒక వృత్తము యొక్క వృత్త కేంద్రము 'O' నుండి 26 సెం.మీ దూరములో బిందువు P గలదు. P నుండి 10 సెం.మీ గల PT అను స్పర్శరేఖను వృత్తమునకు గీచిన OT కి సమానమగునది

(A) 36 సెం.మీ (B) 20 సెం.మీ (C) 18 సెం.మీ (D) 24 సెం.మీ

15. పటములో $\angle PAB = 120^\circ$ అయిన $\angle BPT =$



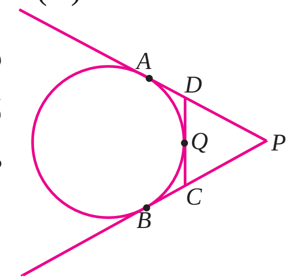
(A) 120^o (B) 30^o

(C) 40^o (D) 60^o

16. 'O' కేంద్రముగా గల వృత్తమునకు బాహ్య బిందువు P నుండి గీయబడిన స్పర్శరేఖలు PA మరియు PB అనునవి ఒకదానికొకటి 40^o కోణము చేసుకొనిన $\angle POA$ =

(A) 70^o (B) 80^o (C) 50^o (D) 60^o

17. పటములో PA మరియు PB అనునవి బాహ్యబిందువు P నుండి వృత్తమునకు గీయబడిన స్పర్శరేఖలగును మరియు CD అనునది వృత్తమునకు Q వద్ద గీయబడిన స్పర్శరేఖ. PA = 8 సెం.మీ మరియు CQ = 3 సెం.మీ అయిన PC కి సమానమగునది.



A) 11 సెం.మీ (B) 5 సెం.మీ (C) 24 సెం.మీ (D) 38 సెం.మీ

18. ΔABC ఒక లంబకోణ త్రిభుజము, అందులో $\angle B = 90^\circ$ మరియు $BD \perp AC$. BD = 8 సెం.మీ, AD = 4 సెం.మీ అయిన CD =

(A) 24 సెం.మీ (B) 16 సెం.మీ (C) 32 సెం.మీ (D) 8 సెం.మీ

19. రెండు సరూప త్రిభుజముల వైశాల్యములు క్రమముగా 16 చ.సెం.మీ మరియు 36 చ.సెం.మీ. మొదటి త్రిభుజము యొక్క ఉన్నతి 3 సెం.మీ అయిన దానికి అనురూపమైన మరొక త్రిభుజము యొక్క ఉన్నతి

(A) 6.5 సెం.మీ (B) 6 సెం.మీ (C) 4 సెం.మీ (D) 4.5 సెం.మీ

20. ΔABC మరియు ΔDEF అను రెండు సరూప త్రిభుజముల పరిధిలు క్రమముగా 36 సెం.మీ మరియు 24 సెం.మీ. DE = 10 సెం.మీ అయిన AB =

(A) 12 సెం.మీ (B) 20 సెం.మీ (C) 15 సెం.మీ (D) 18 సెం.మీ

7 త్రికోణమితి

- పరిచయం
- సర్వసమీకరణములు
- ఎత్తులు మరియు దూరములు



హిప్పార్కస్

(క్రీ.పూ 190 –120)

గ్రీస్

ఇతను త్రికోణమితి అభివృద్ధిని, త్రికోణమితి పట్టికల నిర్మాణము మరియు కొన్ని గోళీయ త్రికోణమితి సమస్యలను సాధించుట యందు కృషిచేసెను. సూర్య గ్రహణములను ముందుగా తెలుపు ఒక నమ్మకమైన పద్ధతిని, తన సూర్య చంద్ర సిద్ధాంతములు మరియు తన త్రికోణమితి ద్వారా అభివృద్ధి పరిచినటువంటి మొదటి వ్యక్తి అగును.

సాధారణ కళ్ళ (Naked Eye) తో చాలా సమయము పరిశీలించుటకు ఉపయోగించు ఖగోళ సాధనములు కనిపెట్టిన లేక అభివృద్ధి పరిచిన ఘనత హిప్పార్కస్‌కు దక్కినది.

"There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as trigonometry" – J.F. Herbart

7.1 పరిచయం

వృత్తచాపముల పరిమాణము మరియు ఆ చాపములను నిర్ణయించు జ్యాల మధ్యగల సంబంధమును తెలుపుట ద్వారా త్రికోణమితి అభివృద్ధి చెందెను. 15వ శతాబ్దము తరువాత త్రిభుజములోని కోణముల కొలతకు, భుజముల పొడవులకు సంబంధపరచుటలో ఇవి ఉపయోగింపబడినది. క్రీ.పూ. రెండవ శతాబ్దమున గ్రీకు దేశస్థుడైన హిప్పార్కస్ (Hipparchus) ను త్రికోణమితి సృష్టికర్త అని పిలువబడెను. త్రికోణమితి అను పదమునకు త్రిభుజము కొలత అని అర్థము చెప్పిన ఘనత బార్‌తోలమస్ పిటిస్కస్ (Bartholomous Pitiscus, 1561-1613) కు చెందును.

సమస్యను సాధించుటలో వివిధ త్రికోణమితి నిష్పత్తులు, వాటి మధ్యగల సంబంధమును మరియు త్రికోణమితి పట్టికలను ఎట్లు ఉపయోగించవలయునో IX తరగతిలో నేర్చుకొంటిమి.

ఈ అధ్యాయమునందు త్రికోణమితి సర్వ సమీకరణములు, కొండలు, భవంతుల ఎత్తు మరియు దూరములు కనుగొనుట (ఖచ్చితముగా కొలవకపోయినను)లో త్రికోణమితి నిష్పత్తుల అనువర్తనములు గూర్చి నేర్చుకొనెదము.

7.2 త్రికోణమితి సర్వసమీకరణములు (Trigonometric Identities)

ఒక సమీకరణము అర్థవంతముగాను, వాటి చలరాశి(శుల) అన్ని విలువలకు సత్యమైనప్పుడు ఆ సమీకరణమును సర్వసమీకరణము అంటారు. ఉదాహరణకు $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ సర్వసమీకరణమునకు a మరియు b అన్నీ వాస్తవ విలువలకు సత్యమగును.

అదేవిధముగా, కోణముల త్రికోణమితి నిష్పత్తి కలిగిన సమీకరణమును త్రికోణమితి సర్వసమీకరణము అందురు. ఆ సమీకరణములోని అన్ని కోణము(లు) విలువల తృప్తి చెందినచో ఇది సత్యమగును. ఉదాహరణకు $(\sin\theta + \cos\theta)^2 - (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 4\sin\theta\cos\theta$. అను సర్వ సమీకరణము θ యొక్క అన్ని విలువలకు సత్యమగును. సత్యమగుటకు, θ యొక్క అన్ని విలువలు తృప్తి చెందవలయును.

అయినప్పటికి $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1$ అను సమీకరణము సర్వసమీకరణము కాదు, $\theta = 0^0$ ఉన్నప్పుడు ఇది సత్యమగును. కానీ, $\theta = 45^0$ ఉన్నప్పుడు ఇది సత్యము కాదు ఎట్లనగా,

$$(\sin 45^0 + \cos 45^0)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 \neq 1.$$

ఈ అధ్యాయములో, అన్ని త్రికోణమితి సర్వసమీకరణములు మరియు సమీకరణములు వాటి చలరాశుల విలువలకు అర్థవంతముగా నిర్వచించినదిగా పరిగణింపబడినది.

మూడు ఉపయోగకరమైన సర్వసమీకరణములను పైథాగోరియన్ సర్వసమీకరణములు అందురు మరియు వాటి ద్వారా మరికొన్ని సర్వసమీకరణములు రాబడదాం.

లంబకోణ $\triangle ABC$ లో,

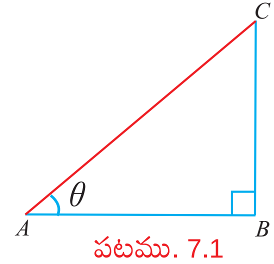
$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \qquad (1)$$

AC^2 చే (1) లోని ప్రతిపదమును భాగించగా,

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} \qquad (AC \neq 0)$$

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = 1$$

కనుక, $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$



పటము. 7.1

$\angle A = \theta$ అనుకొనిన, $0 < \theta < 90^0$ అన్నివిలువలకు,

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1. \qquad (2)$$

సర్వసమీకరణం (2) ను $0^0 \le \theta \le 90^0$ ల మధ్య గల అన్ని θ విలువలు తృప్తిపరచుచున్నవి. కాబట్టి $\cos^2 0^\circ + \sin^2 0^\circ = 1$ మరియు $\cos^2 90^\circ + \sin^2 90^\circ = 1$ అని స్పష్టమగును.

AB^2 చే (1) ని భాగించగా,

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \qquad (\because AB \neq 0)$$

$$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \implies 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta. \qquad (3)$$

$\theta = 90^\circ$ కు $\tan\theta$ మరియు $\sec\theta$ లను నిర్వచించలేము, సర్వసమీకరణం (3) ను $0^0 \le \theta < 90^0$ ల మధ్య గల అన్ని θ విలువలు తృప్తిపరచుచున్నవి.

(1) ని BC^2 చే మరల భాగించగా,

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \qquad (\because \; BC \neq 0)$$

$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \implies \cot^2\theta + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta. \qquad (4)$$

$\theta = 0^0$ కు $\cot\theta$ మరియు $\operatorname{cosec}\theta$ లను నిర్వచించలేము, సర్వసమీకరణం (4) కు $0^0 < \theta \le 90^0$ ల మధ్య గల అన్ని θ విలువలు తృప్తిపరచుచున్నవి.

(2) నుండి (4) వరకు గల పై సర్వసమీకరణముల కొన్ని తుల్య రూపములు క్రిందివ్వబడినవి.

	సర్వసమీకరణము	తుల్యరూపములు
(i)	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ (లేక) $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$
(ii)	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$	$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ (లేక) $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$
(iii)	$1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$	$\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ (లేక) $\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1$

సూచనలు

అల్పకోణము 'θ' కు, పై సర్వసమీకరణములు నిరూపించబడెను. కానీ త్రికోణమితి ప్రమేయముల ఏవేని కోణములు 'θ' కు ఈ సర్వసమీకరణములు సత్యమగును. ఈ పాఠ్యపుస్తకములో కోణము 'θ' కు అల్పకోణ విలువలు మాత్రమే తీసుకొనెదము.

సామాన్యముగా, త్రికోణమితి ప్రమేయములతో కూడిన త్రికోణమితి సర్వసమీకరణములను నిరూపించుటకు ఎటువంటి సామాన్యపద్ధతి లేదు. అయినప్పటికీ, త్రికోణమితి సర్వసమీకరణములు నిరూపించుటకు ఉపయోగపడు కొన్ని మెళుకువలు క్రిందివ్వబడినది.

(i) సర్వసమీకరణమును జాగ్రత్తగా చదివి,ఏమివ్వబడినదో మరియు సాధించుటకు ఏది అవసరమో గమనించవలయును.

(ii) సామాన్యముగా, ఒక సర్వసమీకరణలో సులభ భాగమును తీసుకొని, విస్తరించి సూక్ష్మీకరించుట కన్నా కఠిన భాగమును తీసుకొని సూక్ష్మీకరించడం ఉత్తమం.

(iii) సర్వసమీకరణము ఇరువైపుల కఠినముగా నున్నట్లయితే,అదే సమాసములో ప్రతీ ఒక్కదానిని ప్రత్యేకంగా తీసుకొని స్వతంత్రంగా సూక్ష్మీకరింపుము.

(iv) సమాసముల సంకలనమునకు బీజీయ గణిత మెళుకువలు ఉపయోగించి వాటి భిన్నములను కలుపుము.

(v) అవసరమైతే, ప్రతీ పదమును వాటి sine మరియు cosine తుల్య సమీకరణములుగా మార్చి ఆ తరువాత సూక్ష్మీకరించుటకు ప్రయత్నించుము.

(vi) $\tan^2\theta, \cot^2\theta, \text{cosec}^2\theta, \sec^2\theta$, పదములతో కూడిన ఒక సర్వసమీకరణము ఉన్నట్లయితే, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ మరియు $\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$.అను ఫలితములను ఉపయోగించుట చాలా సహాయకరముగా నుండును.

ఉదాహరణ 7.1

$\dfrac{\sin\theta}{\text{cosec}\,\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sec\theta} = 1$ సర్వసమీకరణమును నిరూపించుము.

సాధన

$$\frac{\sin\theta}{\text{cosec}\,\theta} + \frac{\cos\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin\theta}{\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)} + \frac{\cos\theta}{\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)}$$

$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\,.$$

ఉదాహరణ 7.2

$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$ సర్వసమీకరణమును నిరూపించుము.

సాధన

$$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)} \times \frac{(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{1^2-\cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} \quad (\because 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta)$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta\ .$$

ఉదాహరణ 7.3

$[\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)-\sin(90^\circ-\theta)][\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta][\tan\theta+\cot\theta] = 1$ సర్వసమీకరణమును నిరూపించుము.

సాధన

$$[\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)-\sin(90^\circ-\theta)][\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta][\tan\theta+\cot\theta]$$

$$= (\sec\theta-\cos\theta)(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) \quad (\because Co\sec(90^0-\theta) = Sec\theta)$$

$$= \left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)\left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right) \quad (\because Sin(90^0-\theta) = Cos\theta)$$

$$= \left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right) = 1$$

ఉదాహరణ 7.4

$\frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ అని నిరూపించుము.

సాధన

$$\frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}$$

$$= \frac{\tan\theta+\sec\theta-(\sec^2\theta-\tan^2\theta)}{\tan\theta-\sec\theta+1} \quad (\because \sec^2\theta-\tan^2\theta = 1)$$

$$= \frac{(\tan\theta+\sec\theta)-(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)}{\tan\theta-\sec\theta+1} \quad (\because a^2-b^2 = (a+b)(a-b))$$

$$= \frac{(\tan\theta+\sec\theta)[1-(\sec\theta-\tan\theta)]}{\tan\theta-\sec\theta+1}$$

$$= \frac{(\tan\theta+\sec\theta)(\tan\theta-\sec\theta+1)}{\tan\theta-\sec\theta+1}$$

$$= \tan\theta+\sec\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

ఉదాహరణ 7.5

$$\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\tan\theta+\cot\theta.$$ సర్వసమీకరణమును నిరూపించుము.

సాధన $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$

$$=\frac{\tan\theta}{1-\frac{1}{\tan\theta}}+\frac{\frac{1}{\tan\theta}}{1-\tan\theta}=\frac{\tan\theta}{\frac{\tan\theta-1}{\tan\theta}}+\frac{\frac{1}{\tan\theta}}{1-\tan\theta}$$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}+\frac{1}{\tan\theta(1-\tan\theta)}=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}+\frac{1}{(-\tan\theta)(\tan\theta-1)}$$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}-\frac{1}{(\tan\theta)(\tan\theta-1)}$$

$$=\frac{1}{(\tan\theta-1)}\left(\tan^2\theta-\frac{1}{\tan\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{(\tan\theta-1)}\ \frac{(\tan^3\theta-1)}{\tan\theta}$$

$$=\frac{(\tan\theta-1)(\tan^2\theta+\tan\theta+1^2)}{(\tan\theta-1)\tan\theta} \qquad (\because a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab-b^2))$$

$$=\frac{\tan^2\theta+\tan\theta+1}{\tan\theta}$$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta}+\frac{\tan\theta}{\tan\theta}+\frac{1}{\tan\theta}=\tan\theta+1+\cot\theta$$

$$=1+\tan\theta+\cot\theta.$$

ఉదాహరణ 7.6

$$(\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta)^2+(\cos\theta+\sec\theta)^2=7+\tan^2\theta+\cot^2\theta.$$

సర్వసమీకరణమును నిరూపించుము.

సాధన

$$(\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta)^2+(\cos\theta+\sec\theta)^2$$

$$=\sin^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta+2\sin\theta\operatorname{cosec}\theta+\cos^2\theta+\sec^2\theta+2\cos\theta\sec\theta$$

$$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta+\sec^2\theta+2\sin\theta\frac{1}{\sin\theta}+2\cos\theta\frac{1}{\cos\theta}$$

$$=1+(1+\cot^2\theta)+(1+\tan^2\theta)+2+2$$

$$=7+\tan^2\theta+\cot^2\theta.$$

ఉదాహరణ 7.7

$(\sin^6\theta + \cos^6\theta) = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$. సర్వసమీకరణమును నిరూపించుము.

సాధన

$$\sin^6\theta + \cos^6\theta$$
$$= (\sin^2\theta)^3 + (\cos^2\theta)^3$$
$$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^3 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$
$$(\because a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b))$$
$$= 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta. \qquad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

ఉదాహరణ 7.8

$\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$. సర్వసమీకరణమును నిరూపించుము.

సాధన

$$\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \frac{\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$$
$$= \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta - (\sin^2\theta + \cos^2\theta)}\right) \quad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$
$$= (\tan\theta)\left(\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}\right) = \tan\theta.$$

ఉదాహరణ 7.9

$\dfrac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = 1 - 2\sec\theta\tan\theta + 2\tan^2\theta$. సర్వసమీకరణమును నిరూపించుము.

సాధన

$$\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$$
$$= \left(\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\right) \times \left(\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta - \tan\theta}\right)$$
$$= \frac{(\sec\theta - \tan\theta)^2}{\sec^2\theta - \tan^2\theta}$$
$$= \frac{(\sec\theta - \tan\theta)^2}{1} \qquad (\because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1)$$
$$= (\sec\theta - \tan\theta)^2 = \sec^2\theta + \tan^2\theta - 2\sec\theta\tan\theta$$
$$= (1 + \tan^2\theta) + \tan^2\theta - 2\sec\theta\tan\theta \qquad (\because \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta)$$
$$= 1 - 2\sec\theta\tan\theta + 2\tan^2\theta.$$

ఉదాహరణ 7.10

$\dfrac{1+\sec\theta}{\sec\theta} = \dfrac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$ నిరూపించుము.

సాధన

$$\frac{1+\sec\theta}{\sec\theta} = \frac{1+\dfrac{1}{\cos\theta}}{\dfrac{1}{\cos\theta}} = \frac{(\cos\theta+1)}{\cos\theta}(\cos\theta)$$

$$= 1+\cos\theta$$

$$= (1+\cos\theta)\times\frac{(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{1-\cos^2\theta}{1-\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}.$$

ఉదాహరణ 7.11

$(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta) = \dfrac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$ సర్వసమీకరణమును నిరూపించుము.

సాధన మొదటగా,

$$(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta)$$

$$= \left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)$$

$$= \left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = \sin\theta\cos\theta \qquad (1)$$

$\dfrac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$ తీసుకొనుము

$$= \frac{1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$= \frac{1}{\left(\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)}$$

$$= \sin\theta\cos\theta \qquad (2)$$

గమనిక

$\sin\theta\cos\theta$

$= \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1}$

$= \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$

$= \dfrac{1}{\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}}$

$= \dfrac{1}{\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}}$

$= \dfrac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$

(1) మరియు (2) నుండి, $(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta) = \dfrac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$

ఉదాహరణ 7.12

$\tan\theta + \sin\theta = m$, $\tan\theta - \sin\theta = n$ మరియు $m \neq n$ అయిన, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$. అని చూపుము

సాధన $m = \tan\theta + \sin\theta$ and $n = \tan\theta - \sin\theta$.

$$m^2 - n^2 = (\tan\theta + \sin\theta)^2 - (\tan\theta - \sin\theta)^2$$
$$= \tan^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta\tan\theta - (\tan^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta\tan\theta)$$
$$= 4\sin\theta\tan\theta \qquad (1)$$
$$4\sqrt{mn} = 4\sqrt{(\tan\theta + \sin\theta)(\tan\theta - \sin\theta)}$$
$$= 4\sqrt{\tan^2\theta - \sin^2\theta} = 4\sqrt{\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta\right)}$$
$$= 4\sqrt{\sin^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)}$$
$$= 4\sqrt{\sin^2\theta(\sec^2\theta - 1)} = 4\sqrt{\sin^2\theta\tan^2\theta} \quad (\because \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta)$$
$$= 4\sin\theta\tan\theta. \qquad (2)$$

(1) మరియు (2) నుండి, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$.

ఉదాహరణ 7.13

$\tan^2\alpha = \cos^2\beta - \sin^2\beta$ అయిన $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \tan^2\beta$ అని నిరూపించుము.

సాధన $\cos^2\beta - \sin^2\beta = \tan^2\alpha$ అని ఇవ్వబడినది.

$$\frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{1} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$
$$\frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{\cos^2\beta + \sin^2\beta} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

> కాంపొనెండో మరియు డివిడెండో సూత్రము
> $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ అయిన $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

కాంపొనెండో మరియు డివిడెండో సూత్రము ప్రకారము

$$\frac{(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta)}{(\cos^2\beta - \sin^2\beta) - (\cos^2\beta + \sin^2\beta)} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$$
$$\Longrightarrow \frac{2\cos^2\beta}{-2\sin^2\beta} = \frac{1}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$$
$$\Longrightarrow \frac{-\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$$
$$\Longrightarrow \tan^2\beta = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$ నిరూపించబడినది.

గమనిక: కాంపొనెండో మరియు డివిడెండో సూత్రమును ఉపయోగించకనే పై సమస్యను సాధించవచ్చును.

అభ్యాసము 7.1

1. క్రిందివ్వబడిన వాటిని సర్వసమీకరణమా కాదా నిర్ణయించుము.

(i) $\cos^2\theta + \sec^2\theta = 2+\sin\theta$ (ii) $\cot^2\theta + \cos\theta = \sin^2\theta$

2. క్రింది సర్వసమీకరణములను నిరూపించుము.

(i) $\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta = \sec^2\theta\,\text{cosec}^2\theta$ (ii) $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \text{cosec}\,\theta + \cot\theta$

(iii) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$ (iv) $\dfrac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta} = 1 + \sin\theta$

(v) $\sqrt{\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta} = \tan\theta + \cot\theta$ (vi) $\dfrac{1+\cos\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta\,(1+\cos\theta)} = \cot\theta$

(vii) $\sec\theta\,(1-\sin\theta)(\sec\theta + \tan\theta) = 1$ (viii) $\dfrac{\sin\theta}{\text{cosec}\,\theta + \cot\theta} = 1 - \cos\theta$

3. క్రింది సర్వసమీకరణములు నిరూపించుము.

(i) $\dfrac{\sin(90^\circ - \theta)}{1+\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\cos(90^\circ-\theta)} = 2\sec\theta$

(ii) $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta\,\text{cosec}\,\theta$

(iii) $\dfrac{\sin(90^0-\theta)}{1-\tan\theta} + \dfrac{\cos(90^0-\theta)}{1-\cot\theta} = \cos\theta + \sin\theta$

(iv) $\dfrac{\tan(90^0-\theta)}{\text{cosec}\,\theta + 1} + \dfrac{\text{cosec}\,\theta + 1}{\cot\theta} = 2\sec\theta.$

(v) $\dfrac{\cot\theta + \text{cosec}\,\theta - 1}{\cot\theta - \text{cosec}\,\theta + 1} = \text{cosec}\,\theta + \cot\theta.$

(vi) $(1 + \cot\theta - \text{cosec}\,\theta)(1 + \tan\theta + \sec\theta) = 2$

(vii) $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$

(viii) $\dfrac{\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{\sin\theta\sin(90^0-\theta)}{2\sin^2(90^0-\theta) - 1}$

(ix) $\dfrac{1}{\text{cosec}\,\theta - \cot\theta} - \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\text{cosec}\,\theta + \cot\theta}.$

(x) $\dfrac{\cot^2\theta + \sec^2\theta}{\tan^2\theta + \text{cosec}^2\theta} = (\sin\theta\cos\theta)(\tan\theta + \cot\theta).$

4. $x = a\sec\theta + b\tan\theta$ మరియు $y = a\tan\theta + b\sec\theta$ అయిన, $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ నిరూపించుము.

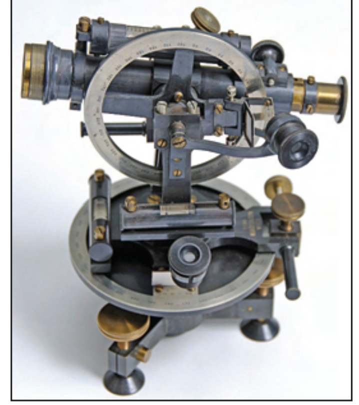
5. $\tan\theta = n\tan\alpha$ మరియు $\sin\theta = m\sin\alpha$ అయిన, $\cos^2\theta = \dfrac{m^2-1}{n^2-1}$, $n \neq \pm 1$, నిరూపించుము.

6. $\sin\theta$, $\cos\theta$ మరియు $\tan\theta$ గుణశ్రేణియందున్నట్లయితే, $\cot^6\theta - \cot^2\theta = 1$ నిరూపించుము.

7.3 ఎత్తులు మరియు దూరములు (Heights and distances)

గ్రహముల మధ్య దూరము, ఎవరెస్టు శిఖరము ఎత్తు, భూమి మరియు సూర్యుడు, అటువంటి అతిదూరములో వున్న రెండు వస్తువుల మధ్య దూరమును ఎట్లు కొలువవచ్చును లేక లెక్కింతురో ఆశ్చర్యముగానున్నది. వీటిని కొలతనాడాతో కొలువగలమా?

ఆవిధముగా కొలుచటకు అసాధ్యము. త్రికోణమితి నిష్పత్తుల ఉద్దేశమును ఉపయోగించి అటువంటి దూరములను లెక్కించుట ఆసక్తికరంగా ఉండెడిది. దేశ పటములు నిర్మించుట, అక్షాంశములు మరియు దీర్ఘాంశముల సంబంధము ద్వారా ఒక ద్వీపము యొక్క స్థానమును నిర్ధారించుట యందు ఈ నిష్పత్తులు ఉపయోగింపబడును.

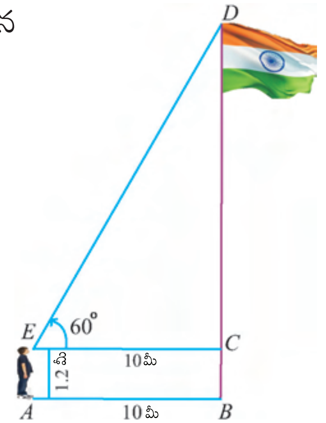


పటము. 7.2

తియోడలైట్ (theodolite) అను పరికరము (పటము 7.2), ఒక వస్తువు మరియు పరిశీలకుని కంటికి మధ్య గల కోణమును కొలుచుటకు ఇది ఉపయోగపడును.తియోడలైట్, ఒక టెలిస్కోపు మరియు ఒకదానికొకటి లంబకోణములో ఉండు రెండు చక్రములు కలిగియుండును. క్షితిజ సమాంతర, లంబ కోణముల కొలతలను కొలుచుటకు ఈ చక్రములు ఉపయోగపడును. నిర్ణయించబడిన బిందువు వద్ద కోణమును కొలుచుటకు, ఆ బిందువు వైపు టెలిస్కోపును వుంచుదురు. టెలిస్కోపు స్కేలుపై ఈ కోణమును తెలుసుకొనవచ్చును (చూడవచ్చును).

ఒక వేళ మన పాఠశాల జెండా స్థంభము యొక్క ఎత్తును కనుగొనదలిచినచో దానిని ప్రత్యక్షంగా కొలువనవసరం లేదు. కొలవకనే వాటి ఎత్తును కనుగొనెదము.

ఒక విద్యార్థి భూమిపై A బిందువు వద్ద నిలబడి వున్నాడని అనుకొనుము, ఆ బిందువు నుండి జెండా స్థంభ పాదము B నకు 10 మీ దూరము కలదు. అతడు జెండా స్థంభము యొక్క పైభాగమును 60^0 కోణముతో చూచెను. నేలమట్టము నుండి అతని కంటి మట్టము E ఎత్తు 1.2 మీ . అనుకొన (7.3 పటమును చూడుము).



పటము. 7.3

లంబకోణ ΔDEC లో, $\angle DEC = 60^\circ$

$$\tan 60^\circ = \frac{CD}{EC}$$

$\Longrightarrow$ $CD = EC \tan 60^\circ$

కావున, $CD = 10\sqrt{3} = 10 \times 1.732$

$= 17.32$ మీ

కనుక జెండా స్థంభము యొక్క ఎత్తు, $BD = BC + CD$

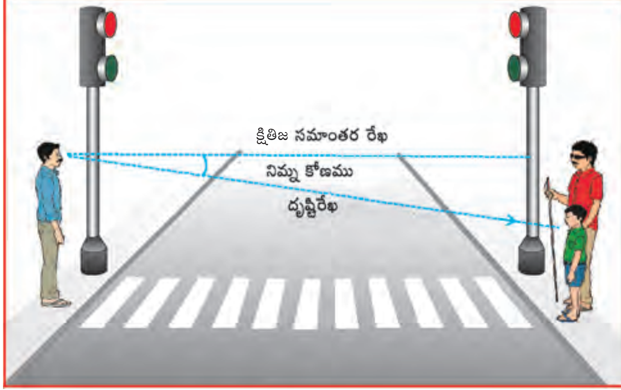
$= 1.2 + 17.32 = 18.52$ మీ

కాబట్టి, మన పాఠశాల జెండా స్థంభము యొక్క ఎత్తును ప్రత్యక్షంగా కొలవకనే వాటి ఎత్తును కనుగొంటిమి. కనుక, ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో ఒక భుజము మరియు ఒక అల్ప కోణము తెలిసినట్లయిన, త్రికోణమితి నిష్పత్తులనుపయోగించి, త్రిభుజము యొక్క మిగిలిన భుజములను కనుగొనవచ్చును. ఎత్తులు మరి యు దూరములు కనుగొనుటలో తరచూ ఉపయోగించు కొన్ని పదములను నిర్వచించెదము.

దృష్టిరేఖ (Line of sight)

మనము ఒక వస్తువును చూస్తున్నప్పుడు, మన కంటి నుండి ఆ వస్తువును చూచు సరళరేఖ ఒక దృష్టి రేఖయగును. ఇందు ఎక్కువ దూరములో వస్తువు ఉన్నప్పుడు, ఆ వస్తువును ఒక బిందువుగా వ్యవహరించెదము.

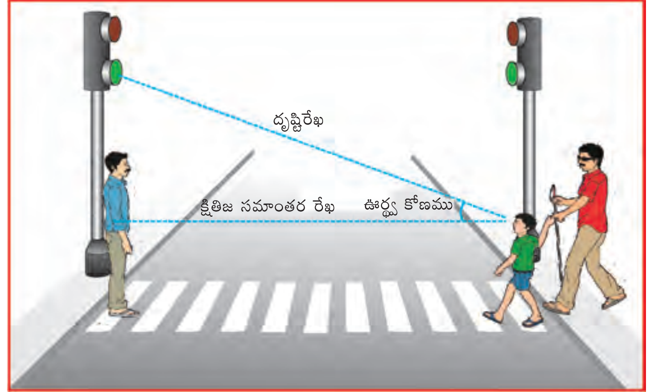
నిమ్నకోణం మరియు ఊర్ధ్వకోణం (Angle of depression and angle of elevation)



పటము. 7.4

కంటి నుండి క్షితిజ సమాంతర రేఖకు క్రింది భాగమున వస్తువు ఉన్నట్లయిన, మన తలను క్రిందికి వంచి వస్తువును చూడవలెను. ఈ పద్ధతిలో మన కళ్ళు కొంత కోణమును చేయును. ఈ కోణమును నిమ్న కోణము అందురు. ఒక వస్తువు క్షితిజ సమాంతరరేఖకు క్రింద నున్నప్పుడు క్షితిజ సమాంతరరేఖతో చూడబడే వస్తువు యొక్క దృష్టి రేఖ చేయుకోణమును "నిమ్నకోణము" అందురు. (పటము 7.4 చూడుము).

కంటి నుండి క్షితిజ సమాంతరరేఖకు పై భాగమున వస్తువు ఉన్నట్లయితే మన తలను పైకెత్తి ఆ వస్తువును చూడవలయును. ఈ పద్ధతిలో మన కళ్ళచే ఏర్పడే దృష్టిరేఖ మరియు క్షితిజ సమాంతర రేఖకు మధ్య ఏర్పడు కోణమును "ఊర్ధ్వకోణము" అందురు. (పటము 7.5 చూడుము)



పటము. 7.5

గమనిక

(i) పరిశీలకుని ఎత్తు ఇవ్వకపోయిన, ఆ పరిశీలకుడిని బిందువుగా తీసుకొనుము.

(ii) పరిశీలకునిచే చూడబడు వస్తువు ఊర్ధ్వకోణము, అదే వస్తువు నుండి చూడబడు పరిశీలకుని నిమ్నకోణము ఒకేవిధముగా (సమానముగా) ఉండును.

ఎత్తులు మరియు దూరముల సమస్యలను సాధించుటకు క్రింది వ్యూహములు ఉపయోగపడును.

(i) ప్రశ్న యందు వివరములను జాగ్రత్తగా చదివి, దానికి తగిన చిత్తుపటమును గీయుము.

(ii) పటమును గీచి మరియు ఇచ్చిన విలువలను గుర్తించుము.

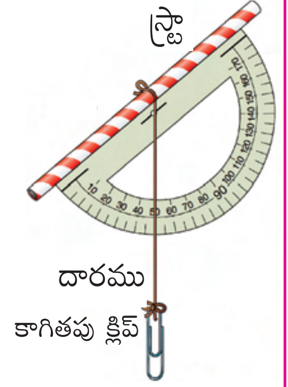
(iii) తెలియని పరిమాణములను గుర్తులచే సూచించుము. ఎత్తును 'h'గాను మరియు దూరమును 'x' గాను సూచించవచ్చును.

(iv) సమస్య సాధనకుపయోగపడు త్రికోణమితి నిష్పత్తులను గుర్తించుము.

(v) ఇచ్చిన విలువలను ప్రతిక్షేపించి మరియు తెలియని వాటిని సాధించుము.

క్రింది కృత్యము ఇతర పద్ధతుల కంటే వస్తువు ఎత్తును సులభ పద్ధతిలో కనుగొనుటకు ఉపయోగపడును.

కృత్యము



పటము. 7.6

- దారము యొక్క ఒక చివరకొనకు స్ట్రా మధ్య భాగమును మరియు మరొక చివర కొనకు కాగిత క్లిప్‌ను కట్టుము.
- కోణమానిని మధ్యభాగముతో స్ట్రా మధ్యభాగము చేరునట్లు కోణమానిని ఆధారమునకు స్ట్రా చేర్చి అంటించుము. దాని దారము స్వేచ్ఛగా వ్రేలాడునపుడు ఒక లంబరేఖను ఏర్పరచునని నిర్ధారించుము.
- బయట గల వస్తువు నొకదాని పొడవును కొలుచుట.

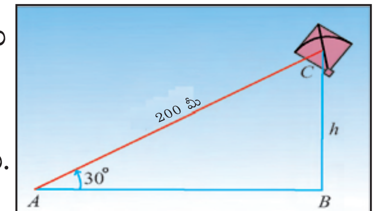
  బాస్కట్‌బాల్ వలయము, జెండాస్తంబము లేక పాఠశాల భవనముల వంటి పొడవైన వస్తువుల కొలతను ప్రత్యక్షముగా కొలవగలమా! అటువంటి వాటిని ఒక దానిని తీసుకొనుము.
- స్ట్రా ద్వారా వస్తువు యొక్క ఎత్తును చూడుము. దారము మరియు కోణమానిని ఖండించు కొన్నభాగంలో ఏర్పడు కోణమును కనుగొనుము. ఊర్ధ్వకోణమును నిర్ణయించుటకు 90° నుండి ఈ కొలతను తీసివేయుము. దానిని θ అనుకొనుము.
- మీ కంటి మట్టము నుండి నేలకు గల దూరమును కొలువుము దానిని x అనుకొనుము. మీ పాదము నుండి వస్తువు ఆధారమునకు గల కొలతను y గా చెప్పవచ్చును.
- మీ కొలతలను గుర్తించుకొనుము.
- వస్తువు యొక్క ఎత్తును (h) కనుగొనుటకు, క్రింది సమీకరణము ఉపయోగించుము.

$$h = x + y\tan\theta.$$

ఉదాహరణ 7.14

ఎగురుచున్న గాలి పటము యొక్క దారము పొడవు 200 మీ. దారము నేలతో చేయు కోణము 30° అయిన, భూ మట్టము నుండి గాలిపటమునకు గల దూరమును కనుగొనుము. (ఇందు, దారము సరళరేఖా మార్గములో నున్నదని అనుకొనుము).

సాధన భూ మట్టము నుండి గాలి పటమునకు గల దూరము h అనుకొనుము పటములో, AC అనునది దారమగును.



పటము. 7.7

ఇవ్వబడినది $\angle CAB = 30^\circ$ మరియు $AC = 200$ మీ.

లంబకోణ $\triangle CAB$ లో, $\sin 30^\circ = \dfrac{h}{200}$

$$\Longrightarrow \quad h = 200\sin 30^\circ$$

$$\therefore \quad h = 200\times\frac{1}{2} = 100 \text{ మీ.}$$

కనుక, భూ మట్టము నుండి గాలిపటమునకు గల దూరము 100 మీ. అగును.

ఉదాహరణ 7.15

ఒక నిచ్చెన నేలతో 60° కోణము చేయునట్లు గోడపై వాలియున్నది. గోడ నుండి 3.5 మీ దూరములో నిచ్చెన పాదము కలదు. నిచ్చెన ఎత్తును కనుగొనుము.

సాధన నిచ్చెన పొడవు AC మరియు గోడ పాదము B అనుకొనుము.

నిచ్చెన పొడవు AC ను x మీటర్లు అనుకొనుము. .

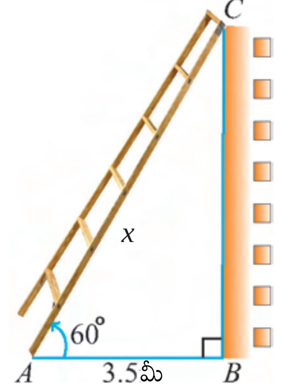
ఇచ్చినవి $\angle CAB = 60^\circ$ మరియు $AB = 3.5$ మీ.

లంబకోణ $\triangle$ CAB లో, $\cos 60^\circ = \dfrac{AB}{AC}$

$\Longrightarrow \quad AC = \dfrac{AB}{\cos 60^\circ}$

$\therefore \quad x = 2 \times 3.5 = 7$ మీ.

కాబట్టి, నిచ్చెన పొడవు 7 మీ. అగును.



పటము. 7.8

ఉదాహరణ 7.16

30 మీ పొడవు గల స్తంభము యొక్క నీడ పొడవు $10\sqrt{3}$ మీ ఉన్నప్పుడు సూర్యునితో చేసే ఊర్ధ్వకోణము (భూమి నుండి ఊర్ధ్వకోణము) కనుగొనుము

సాధన సూర్యుడు S మరియు స్తంభము BC అనుకొనుము.

స్తంభము నీడ పొడవు AB అనుకొనుము.

సూర్యుని యొక్క ఊర్ధ్వకోణము θ అనుకొనుము.

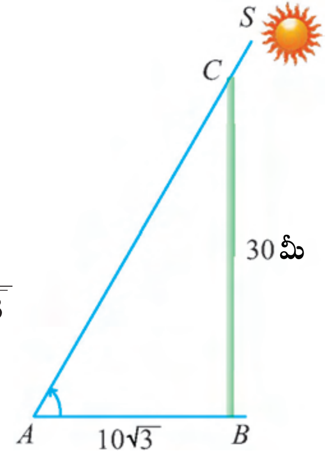
$AB= 10\sqrt{3}$ మీ మరియు $BC = 30$ మీ ఇవ్వబడినది.

లంబకోణ $\triangle$ CAB లో, $\tan\theta = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{30}{10\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}}$

$\Longrightarrow \quad \tan\theta = \sqrt{3}$

$\therefore \quad \theta = 60^\circ$

కావున, భూ మట్టము నుండి సూర్యుని యొక్క ఊర్ధ్వకోణము 60° అగును.



పటము. 7.9

ఉదాహరణ 7.17

ఒక పరిశీలకుడు 30° ఊర్ధ్వకోణములో గోపురము పైభాగమును చూచెను. గోపురము నుండి $30\sqrt{3}$ మీ దూరములో పరిశీలకుడు ఉన్నాడు. భూ మట్టము నుండి పరిశీలకుని కంటి మట్టమునకు 1.5 మీ అయిన గోపురం ఎత్తును కనుగొనుము.

సాధన గోపురము ఎత్తు BD మరియు భూ మట్టము నుండి పరిశీలకుని కంటి మట్టమునకు గల దూరము AE అనుకొనుము.

EC సమాంతరముగాAB ను గీయుము. అవి $AB = EC$.

$AB = EC = 30\sqrt{3}$ మీ. మరియు

$AE = BC = 1.5$ మీ. ఇవ్వబడినది

లంబకోణ $\triangle DEC$ లో,

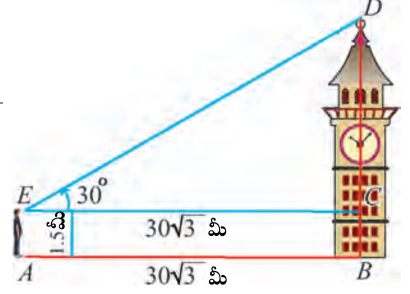
$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{EC}$$

$$\Longrightarrow \quad CD = EC \tan 30^\circ = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad CD = 30 \text{మీ.}$$

కనుక, గోపురం ఎత్తు, $BD = BC + CD$

$= 1.5 + 30 = 31.5$ మీ.



పటము. 7.10

ఉదాహరణ 7.18

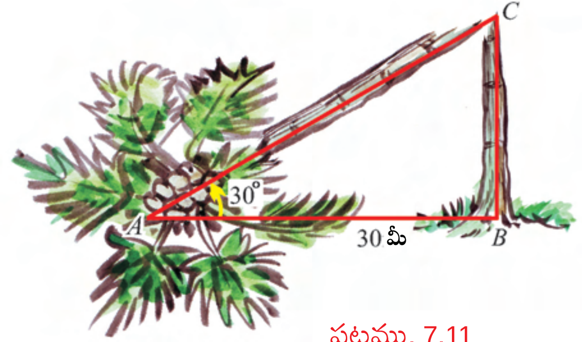
వీచబడిన గాలిచే నిటారుగా నున్న చెట్టు విరిగినది. చెట్టుపై భాగము 30°.కోణముతో భూమిని తాకెను. చెట్టు పాదము నుండి 30 మీ. దూరములో విరిగిన పై భాగము భూమిని తాకినట్లుయిన, చెట్టు యొక్క నిజమైన ఎత్తును కనుగొనుము.

సాధన విరిగిన చెట్టు బిందువు C మరియు చెట్టు పై భాగము భూమిని తాకు బిందువు A అనుకొనుము.

చెట్టు పాదమును B అనుకొనుము.

$AB = 30$ మీ మరియు

$\angle CAB = 30^\circ$ ఇవ్వబడినది.



పటము. 7.11

లంబకోణ $\triangle CAB$ లో,

$$\tan 30^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$\Longrightarrow \quad BC = AB \tan 30^\circ$$

$$\therefore \quad BC = \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$= 10\sqrt{3} \text{ మీ} \qquad (1)$$

ఇప్పుడు, $$\cos 30^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$\Longrightarrow \quad AC = \frac{AB}{\cos 30^\circ}$$

$$AC = \frac{30 \times 2}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} \times 2 = 20\sqrt{3} \text{మీ.} \qquad (2)$$

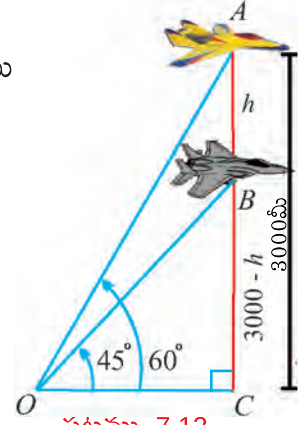
కనుక, చెట్టు ఎత్తు $= BC + AC = 10\sqrt{3} + 20\sqrt{3}$

$= 30\sqrt{3}$ మీ.

ఉదాహరణ 7.19

ఒక యుద్ధవిమానము, నేల నుండి 3000 మీ. ఎత్తులో మరొక యుద్ధవిమానముపై ఎగురుచున్నది. ఈ సందర్భమున పరిశీలన బిందువు నుండి, వాటి ఊర్ధ్వకోణములు క్రమముగా 60° మరియు 45°అయిన, ఆ సమయమమున మొదటి యుద్ధవిమానము నుండి రెండవ యుద్ధవిమానమునకు గల దూరమును కనుగొనుము. ($\sqrt{3} = 1.732$ ఉపయోగించి)

సాధన పరిశీలనా బిందువు O అనుకొనుము.



పటము. 7.12

ఒకదానికి పై మరొకటి గల రెండు యుద్ధ విమానముల స్థితిని A మరియు B అనుకొనుము. భూమిపై గల బిందువును C అనుకొనిన, $AC = 3000$ మీ.

$\angle AOC = 60^\circ$ మరియు. $\angle BOC = 45^\circ$ ఇవ్వబడినది

యుద్ధవిమానముల మధ్య దూరము h అనుకొనుము

లంబకోణ $\triangle BOC$ లో, $\tan 45^\circ = \dfrac{BC}{OC}$

$\implies OC = BC \qquad (\because \tan 45^\circ = 1)$

కనుక, $OC = 3000 - h \qquad (1)$

లంబకోణ $\triangle AOC$ లో, $\tan 60^\circ = \dfrac{AC}{OC} \implies OC = \dfrac{AC}{\tan 60^\circ} = \dfrac{3000}{\sqrt{3}}$

$= \dfrac{3000}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1000\sqrt{3} \qquad (2)$

(1) మరియు (2) నుండి, $3000 - h = 1000\sqrt{3}$

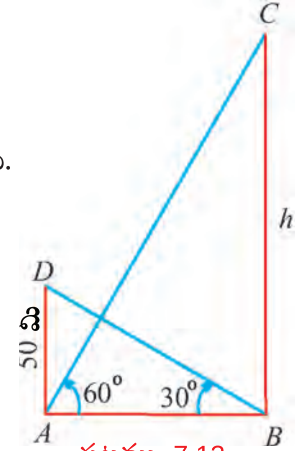
$\implies h = 3000 - 1000 \times 1.732 = 1268$ మీ.

రెండవ యుద్ధవిమానము నుండి మొదటి యుద్ధవిమానమునకు గల దూరము 1268 మీ.

ఉదాహరణ 7.20

ఒక గోపురం పాదము నుండి కొండపై భాగమునకు ఊర్ధ్వకోణము 60° మరియు కొండ పాదము నుండి గోపురంపై భాగమునకు ఊర్ధ్వకోణము 30°తో ఉన్నవి. గోపురం ఎత్తు 50 మీ. అయిన, కొండ ఎత్తును కనుగొనుము.

సాధన గోపురం ఎత్తు AD మరియు కొండ ఎత్తు BC అనుకొనుము.



పటము. 7.13

$\angle CAB = 60^\circ$, $\angle ABD = 30^\circ$ మరియు $AD = 50$ మీ. ఇవ్వబడినది.

$BC = h$ మీ. అనుకొనిన,

లంబకోణ ΔDAB లో, $\tan 30^\circ = \dfrac{AD}{AB}$

$\implies AB = \dfrac{AD}{\tan 30^\circ}$

$\therefore AB = 50\sqrt{3}$ మీ. $\qquad (1)$

మరియు, లంబకోణ $\triangle CAB$ లో, $\tan 60^\circ = \dfrac{BC}{AB}$

$\implies BC = AB \tan 60^\circ$

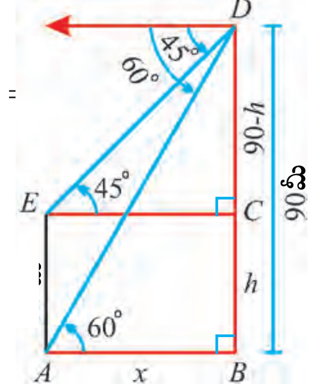
కనుక, (1) ని ఉపయోగించి, $h = BC = (50\sqrt{3})\sqrt{3} = 150$ మీ

కాబట్టి, కొండ ఎత్తు 150 మీ.

ఉదాహరణ 7.21

భూమిపై ఒక నిటారైన గోడ మరియు గోపురం కలదు. గోపురం పైభాగము నుండి గోడపై భాగమును మరియు క్రింది భాగమును క్రమముగా 45° మరియు 60° నిమ్నకోణముతో చూచెను. గోపురం ఎత్తు 90 మీ. అయిన గోడ ఎత్తును కనుగొనుము. ($\sqrt{3} = 1.732$ ఉపయోగించి)

సాధన గోడ AE మరియు గోపురం BD అనుకొనుము.



పటము. 7.14

AB కు సమాంతరముగా EC ను గీయుము. అది $AB=EC$. కనుక, AE =

$AB = x$ మీటర్లు, $AE = h$ మీటర్లు. అనుకొనుము..

$BD = 90$ మీటర్లు, $\angle DAB = 60^\circ$, $\angle DEC = 45^\circ$ ఇవ్వబడినది.

$$AE = BC = h \text{ మీటర్లు.}$$

కనుక, $CD = BD - BC = 90 - h$.

లంబకోణ $\triangle DAB$ లో, $\tan 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{90}{x}$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{90}{\sqrt{3}} = 30\sqrt{3} \qquad (1)$$

లంబకోణ $\triangle DEC$ లో, $\tan 45^\circ = \frac{DC}{EC} = \frac{90-h}{x}$

కనుక, $x = 90 - h \qquad (2)$

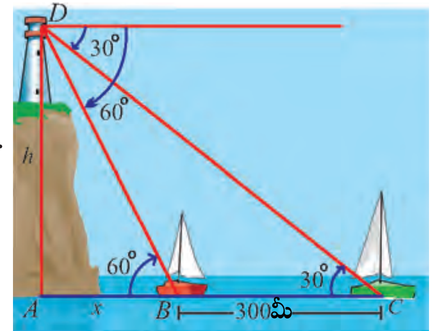
(1) మరియు (2) నుండి, $90 - h = 30\sqrt{3}$

కనుక, గోడ ఎత్తు, $h = 90 - 30\sqrt{3} = 38.04$మీ

ఉదాహరణ 7.22

సముద్రపు ఒడ్డున గల బండరాయిపై కట్టిన దీపగృహము (lighthouse) పై నిలబడి ఒక బాలిక తూర్పు వైపున రెండు పడవలను చూచుచున్నది. ఆ పడవల నిమ్నకోణములు 30° మరియు 60° పడవల మధ్యదూరము 300 మీ. సముద్రమట్టము నుండి దీపగృహము పైభాగమునకు గల దూరమును కనుగొనుము.

సాధన బండరాయి పాదభాగమును మరియు దీపగృహ పైభాగములు క్రమముగా A మరియు D అనుకొనుము. రెండు పడవలు B మరియు C అనుకొనుము. సముద్రమట్టము నుండి దీపగృహము పైభాగమునకు గల దూరము h మీటర్లు అనుకొనుము.



పటము. 7.15

$AB = x$ మీటర్లు.

$\angle ABD = 60^\circ, \angle ACD = 30^\circ$, BC = 300 మీ. ఇవ్వబడినది.

లంబకోణ ΔABD లో $\tan 60^\circ = \frac{AD}{AB}$

$$\Longrightarrow \quad AB = \frac{AD}{\tan 60^\circ}$$

కనుక, $x = \frac{h}{\sqrt{3}} \qquad (1)$

లంబకోణ $\triangle ACD$ లో

$$\tan 30^\circ = \frac{AD}{AC}$$

$$\Longrightarrow \quad AC = \frac{AD}{\tan 30^\circ} \Longrightarrow x + 300 = \frac{h}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

కనుక, $$x + 300 = h\sqrt{3} \qquad (2)$$

(1) ను (2) లో ఉపయోగించగా, $\frac{h}{\sqrt{3}} + 300 = h\sqrt{3}$

$$\Longrightarrow \quad h\sqrt{3} - \frac{h}{\sqrt{3}} = 300$$

$\therefore$ $\quad 2h = 300\sqrt{3}$. కనుక, $h = 150\sqrt{3}$.

కావున, సముద్రమట్టము నుండి దీపగృహ ఎత్తు $150\sqrt{3}$ మీ.

ఉదాహరణ 7.23

ఒక బాలుడు భూ మట్టము నుండి 88.2 మీ. ఎత్తులో క్షితిజ సమాంతరముగా గాలిలో చలించుచున్న బెలూన్‌ను గుర్తించెను. భూమట్టము నుండి కంటి మట్టమునకు 1.2 మీ. గలదు. అతని కంటి నుండి 60° ఊర్ధ్వకోణముతో బెలూన్ చూచెను. కొంత సమయము తరువాత, అదే పరిశీలనా స్థానము నుండి బెలూన్ ఊర్ధ్వకోణము 30° లకు తగ్గెను. ఆ సమయములో బెలూన్ ప్రయాణ దూరమును కనుగొనుము.

సాధన : పరిశీలన బిందువు A అనుకొనుము.

60° మరియు 30° ఊర్ధ్వకోణముతో బెలూన్ స్థానములు క్రమముగా E మరియు D అనుకొనుము..

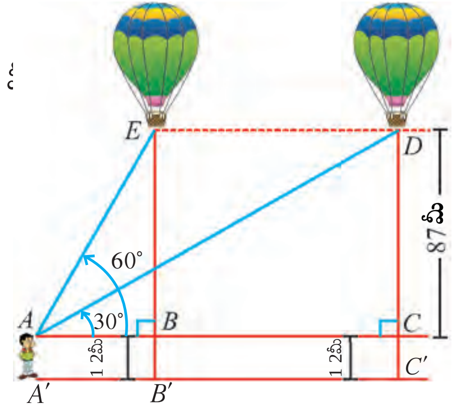
క్షితిజ సమాంతర రేఖపై గల బిందువులు B మరియు C అనుకొనిన

$BE = CD$ భూమిపై గల బిందువులు. A', B' మరియు C' అనుకొనిన, $AA' = BB' = CC' = 1.2$మీ.

$\angle EAB = 60^\circ$, $\angle DAC = 30^\circ$ ఇవ్వబడినది

$BB' = CC' = 1.2$ మీ. మరియు $C'D = 88.2$ మీ

మరియు, $BE = CD = 87$ మీ.



పటము. 7.16

లంబకోణ $\triangle EAB$ లో,

$$\tan 60^\circ = \frac{BE}{AB}$$

కనుక, $$AB = \frac{87}{\tan 60^\circ} = \frac{87}{\sqrt{3}} = 29\sqrt{3}$$

లంబకోణ $\triangle DAC$ లో, $\tan 30^\circ = \frac{DC}{AC}$

కనుక, $$AC = \frac{87}{\tan 30^\circ} = 87\sqrt{3}.$$

కావున, బెలూన్ ప్రయాణదూరము

$$ED = BC = AC - AB$$

$$= 87\sqrt{3} - 29\sqrt{3} = 58\sqrt{3} \text{ మీ.}$$

ఉదాహరణ 7.24

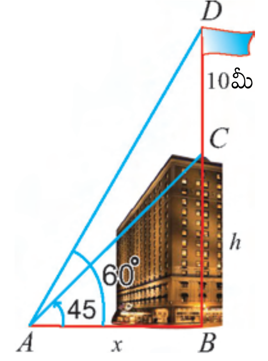
ఒక భవనము పైభాగమున జెండా స్థంభము నిలబడియున్నది. భూమిపై ఒక బిందువు నుండి, జెండా స్థంభము పైభాగము మరియు క్రింది భాగమును చేయు ఊర్ధ్వకోణములు క్రమముగా 60° మరియు 45° జెండాస్థంభము ఎత్తు 10 మీ అయిన, భవనము ఎత్తు కనుగొనుము ($\sqrt{3} = 1.732$ ఉపయోగించి)

సాధన పరిశీలనా బిందువు A మరియు భవనపాదము B అనుకొనుము.

భవన ఎత్తు BC మరియు జెండాస్థంభము ఎత్తు CD గా సూచించును.

$\angle CAB = 45^0$, $\angle DAB = 60^0$ మరియు $CD = 10$మీ. ఇవ్వబడినది.

$BC = h$ మీటర్లు మరియు $AB = x$ మీటర్లు.



పటము. 7.17

లంబకోణ $\triangle CAB$ లో,

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{AB}.$$

కనుక, $AB = BC$ i.e., $x = h$ (1)

మరియు, లంబకోణ $\triangle DAB$ లో,

$$\tan 60^\circ = \frac{BD}{AB}$$

$$\Longrightarrow \quad AB = \frac{h+10}{\tan 60^\circ} \quad \Longrightarrow x = \frac{h+10}{\sqrt{3}} \qquad (2)$$

(1) మరియు (2) నుండి, $h = \dfrac{h+10}{\sqrt{3}}$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{3}\,h - h = 10$$

$$\Longrightarrow \quad h = \left(\frac{10}{\sqrt{3}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\right) = \frac{10(\sqrt{3}+1)}{3-1}$$

$$= 5(2.732) = 13.66 \text{ మీ.}$$

కాబట్టి, భవనము ఎత్తు 13.66 మీ.

ఉదాహరణ 7.25

ఒకడు నీటి మట్టము నుండి 14 మీ. గల ఓడ ఉపరితలభాగముపై నుండి 60° ఊర్ధ్వకోణముతో నిటారుగా నున్న కొండపై భాగమును మరియు 30° నిమ్నకోణముతో కొండ పీఠభాగమును చూచెను. కొండ ఎత్తును కనుగొనుము.

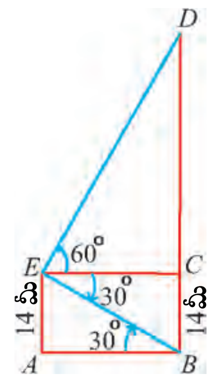
సాధన నిటారుగా నున్న కొండ ఎత్తు BD అనుకొనుము.

ఓడ స్థానమును A మరియు పరిశీలనా బిందువును E అనుకొనుము. $AE = 14$ మీ.

AB కు సమాంతరముగా EC గీయుము. అది $AB = EC$ అగును.

$AE = 14$ మీ, $\angle ABE = 30^\circ, \angle DEC = 60^\circ$ ఇవ్వబడినది.

లంబకోణ $\triangle ABE$ లో, $\tan 30^\circ = \dfrac{AE}{AB}$



పటము. 7.18

$\therefore \quad AB = \frac{AE}{\tan 30^\circ} \implies AB = 14\sqrt{3}$

కనుక, $EC = 14\sqrt{3}$ $(\because AB = EC)$

లంబకోణ $\triangle DEC$ లో, $\tan 60^\circ = \frac{CD}{EC}$

$\therefore \quad CD = EC \tan 60^\circ \implies CD = (14\sqrt{3})\sqrt{3} = 42$ మీ

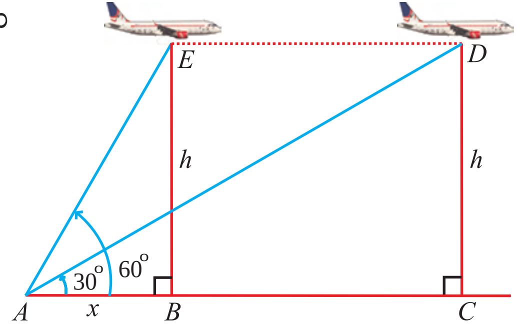
కనుక, కొండ ఎత్తు, $BD = BC + CD = 14 + 42 = 56$మీ.

ఉదాహరణ 7.26

నేలపై ఒక బిందువు నుండి 60° ఊర్ధ్వకోణముతో విమానము కలదు. క్షితిజ సమాంతరముగా 15 సెకండ్లు ఎగిరిన తరువాత ఊర్ధ్వకోణము 30° లకు మారెను. విమానము 200 మీ/సె వేగముతో విమానము ఎగురునపుడు దాని స్థిర ఎత్తును కనుగొనుము.

సాధన పరిశీలనా బిందువు A అనుకొనుము.

విమానము యొక్క ప్రారంభ మరియు 15 సెకండ్ల తరువాత వాటి స్థానములు క్రమముగా E మరియు D అనుకొనుము. ఎగురుచున్న విమానము స్థిర ఎత్తులు BE మరియు CD అనుకొనుము



పటము. 7.19

$\angle DAC = 30^\circ$, $\angle EAB = 60^\circ$ ఇవ్వబడినది..

$BE = CD = h$ మీ

$AB = x$ మీటర్లు అనుకొనిన,

15 సెకండ్లలో చేరిన దూరము,

$ED = 200 \times 15 = 3000$ మీ.

కనుక, $BC = 3000$ మీ.

లంబకోణ $\triangle DAC$ లో,

$\tan 30^\circ = \frac{CD}{AC}$

$\implies \quad CD = AC \tan 30^\circ$

కనుక, $h = (x + 3000)\frac{1}{\sqrt{3}}$. (1)

లంబకోణ $\triangle EAB$ లో,

$\tan 60^\circ = \frac{BE}{AB}$

$\implies \quad BE = AB \tan 60^\circ \implies h = \sqrt{3}\, x$ (2)

(1) మరియు (2) నుండి, $\sqrt{3}x = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + 3000)$

$\implies 3x = x + 3000 \quad \implies \quad x = 1500$మీ.

కనుక, (2) నుండి $h = 1500\sqrt{3}$ మీ.

ఎగురుచున్న విమానము యొక్క స్థిర ఎత్తు $1500\sqrt{3}$ మీ.

అభ్యాసము 7.2

1. ట్రక్కు నుండి సరకులు దించుటకు ఉపయోగించు వాలుతలము ఊర్ధ్వకోణము 30°. భూమి నుండి వాలు తలము పైభాగము 0.9 మీ. అయిన, వాలు తలము పొడవును కనుగొనుము.
2. ఒక దీపస్థంభము ముందర నిలబడియున్న 150 సెం.మీ. ఎత్తుగల బాలిక నీడ పొడవు $150\sqrt{3}$ సెం. మీ. దీపస్థంభము పైభాగపు ఊర్ధ్వకోణమెంత?
3. A మరియు B అను రెండు కీటకములు అవిచేయు శబ్దములను 2 మీ. వరకు వినగలవు. నేలపై గల కీటకము A, 1 మీ దూరములో నున్న గోడపై తన స్నేహితుడు B ను చూచెను. అది సాలెపురుగుచే తినుటకు సిద్ధంగా ఉంది. A నుండి B కు ఊర్ధ్వకోణం 30° తో ఉన్నపుడు A శబ్దం ద్వారా B కు హెచ్చరిక చేసిన, సాలెపురుగుకు ఆహారమగునా! లేదా (A పిలుపు B వినిన, B తప్పించుకొనునని అనుకొనుము.)
4. పరిశీలకుడు, ఒక రాత్రి మేఘావృతమును తెలుసుకొనుటకు మేఘముపై కాంతిని నిటారుగా పంపెను. భూమి నుండి 1.5మీ ఎత్తులో మరియు కాంతిని పంపు పరికరము (Spotlight) నకు 100 మీ దూరములో నున్న తియోడలైట్ (Theodolite) నుపయోగించి 60° ఊర్ధ్వకోణముతో కనుగొనెను. అయిన మేఘావృతము ఎంత ఎత్తులో కలదు?(పటము చూడుము)

   (గమనిక : తక్కువ ఎత్తులో నున్న మేఘావృతమును దట్టమైన మేఘమగును. విమానాశ్రయము నందు విమానము సురక్షితంగా పైకెగురుట మరియు దిగుటకు తగిన ఎత్తులో మేఘములు ఉండవలెను. రాత్రివేళ కాంతిని నిటారుగా పైకి ప్రసరించుట ద్వారా మేఘావృతమును గుర్తించవచ్చును.)

   పటము. 7.20
5. 40 సెం.మీ పొడవుగల లోలకము ఒక పూర్తి డోలనము చేయునప్పుడు, శిఖరము నందు 60° ఏర్పడును. డోలన ప్రారంభ స్థానము మరియు చివరి స్థానముల మధ్య గల కనిష్ట దూరమెంత?
6. A మరియు B అను రెండు కాకులు, 15 మీ మరియు 10 మీ ఎత్తులో ఒకదానికొకటి వ్యతిరేకముగాను నిటారుగా గల రెండు చెట్లపై కూర్చుని యున్నవి. అవి నేలపై గల ఒక వడను క్రమముగా 45° మరియు 60° నిమ్నకోణముతో చూస్తున్నవి. అవి వడను తీసుకొనుటకు కనిష్ట మార్గము వైపు ఒకే సమయమున మరియు ఒకే వేగముతో ఎగురుటకు ప్రారంభించెను. దీనిలో ఏ పక్షి గెలుపొందును? (రెండు చెట్ల ఆధారము, వడ ఒకే సరళరేఖలో వున్నవి.)
7. వృత్తాకార ఉధ్యానవనం (Park) మధ్య భాగమున ఒక దీపస్థంభము కలదు. వాటి సరిహద్దులపై గల బిందువులు P మరియు Q అనుకొనుము. P, Q అనునది దీపస్థంభ పాదభాగమున 90^0 ఏర్పరుచును మరియు P నుండి దీపస్థంభంపై భాగమునకు 30° ఊర్ధ్వకోణము చేయును. $PQ =$ 30 మీ అయిన, దీపస్థంభపు ఎత్తు కనుగొనుము?
8. ఒకడు 700 మీ ఎత్తున ఎగురుచున్న హెలికాప్టర్ నుండి ఒక నది కిరువైపుల ఒకదానికొకటి వ్యతిరేకముగా ఉన్న రెండు వస్తువులను పరిశీలించెను.వస్తువుల నిమ్నకోణములు 30° మరియు 45° నది వెడల్పును కనుగొనుము. ($\sqrt{3} = 1.732$ ఉపయోగించుము)
9. X అనునతడు క్షితిజసమాంతర తలము నందు నిలబడి 100 మీ దూరమున ఎగురుచున్న పక్షిని 30° ఊర్ధ్వకోణముతో పరిశీలించెను. అదేసమయమున Y అను మరొకతను 20 మీ ఎత్తుగల

భవన పైకప్పు నందు నిలబడి పక్షిని 45° ఊర్ధ్వకోణముతో పరిశీలించెను. X మరియు Yలు పక్షికి ఇరువైపుల వ్యతిరేకముగా ఉన్నట్లయిన, Y నుండి పక్షికి గల దూరమును కనుగొనుము.

10. ఒక తరగతి గదిలో కూర్చొని యున్న విద్యార్థి దృష్టి, క్షితిజ సమాంతర మట్టము నుండి 1.5 మీ ఎత్తు వద్ద నల్లబల్లపై ఉన్న బొమ్మను చూచెను. బొమ్మ యొక్క ఊర్ధ్వకోణము 30°, బొమ్మ స్పష్టముగా తెలియనందున, అతను నల్లబల్ల వైపు ఋజుమార్గమున ముందుకు చలించి, 45° ఊర్ధ్వకోణముతో బొమ్మను చూచెను. విద్యార్థి చలించిన దూరమును కనుగొనుము.

11. ఒక బాలుడు 30 మీ ఎత్తైన భవనమునకు కొంతదూరములో నిలబడియున్నాడు మరియు భూమి నుండి అతని కంటి మట్టమునకు 1.5 మీ ఎత్తు గలదు. అతడు భవనము వైపు నడచినందువలన భవనము పైభాగమును చూచుట ద్వారా చేయు ఊర్ధ్వకోణములు 30° నుండి 60° వరకు పెరిగెను. అతను భవనం వైపు నడచిన దూరమును కనుగొనుము.

12. 200 అడుగులు ఎత్తుగల దీపగృహము పై భాగమునుండి దీపగృహ కావలివాడు ఒకే దృష్టిరేఖ వైపు గల ఒక చిన్న నౌక (Yacht) మరియు పెద్ద నౌక (Barge)ను పరిశీలించెను. చిన్న నౌక మరియు పెద్ద నౌకల నిమ్నకోణములు క్రమముగా 45° మరియు 30°. ఆ రెండు సముద్రయానకముల రక్షణ కారణంగా వాటి మధ్య దూరం కనీసం 300 అడుగులు ఉండును. అవి 300 అడుగులు కంటే తక్కువైనట్లయితే, కావలివాడు అపాయసూచన ధ్వని చేయును. కావలివాడు అపాయసూచన ధ్వని చేసియున్నాడా?

13. భూమిపై నిలబడియున్న బాలుడు, క్షితిజ సమాంతరముగా స్థిర ఎత్తు వద్ద గాలిలో చలించున్న బెలూన్‌ను గుర్తించెను. ఆ సమయమున బాలుడు నుండి బెలూన్‌కు చేయు ఊర్ధ్వకోణము 60° అదే పరిశీలనా బిందువు నుండి 2 నిమిషముల తరువాత ఊర్ధ్వకోణము 30° లకు తగ్గెను. గాలి వేగము $29\sqrt{3}$ మీ/ని అయిన, భూమట్టము నుండి బెలూన్ ఎత్తును కనుగొనుము

14. నేరుగా నున్న రహదారి గోపురం పాదభాగమును చేరును. గోపురం పైభాగమున నిలబడియున్న ఒక మనిషి 30° నిమ్నకోణముతో వ్యాను (van) గుర్తించెను. ఆ వ్యాను సమ వేగంతో గోపురంను చేరును. 6 నిమిషముల తరువాత, 60° నిమ్నకోణముతో వ్యానును కనుగొనెను. గోపురంను చేరుటకు ఆ వ్యాను ఇంకా ఎన్ని నిమిషములు తీసుకొనును?

15. రెండు భూస్థావరముల నుండి ఉపగ్రహము యొక్క ఒకే వైపును పరిశీలించు ఊర్ధ్వకోణము 30° మరియు 60° రెండు భూస్థావరములు మరియు ఉపగ్రహము అదే లంబతలములో కలవు. భూస్థావరముల మధ్య దూరము 4000 కి.మీ. అయిన, ఉపగ్రహము మరియు భూమికి గల దూరమును కనుగొనుము. ($\sqrt{3} = 1.732$ ఉపయోగించుము)

16. 60 మీ పొడవైన గోపురం పైభాగము నుండి భవనము పై భాగమును మరియు క్రింది భాగమును చేయు నిమ్నకోణములు వరుసగా 30° మరియు 60°. భవనము ఎత్తును కనుగొనుము.

17. 40 మీ ఎత్తు గల గోపురం పై భాగము మరియు పాదము నుండి దీపగృహ పైభాగమును క్రమముగా 30° మరియు 60° ఊర్ధ్వకోణముతో చూచెను. దీపగృహము ఎత్తును కనుగొనుము. మరియు గోపుర పాదము నుండి దీపగృహ పైభాగమునకు గల దూరమును కనుగొనుము.

18. ఒక సరస్సు ఉపరితలం నుండి 45 మీ ఎత్తున ఒక బిందువు నుండి ఒకే చోట ఎగురుచున్న హెలికాప్టర్‌ను 30° ఊర్ధ్వకోణముతో చూచెను. అదే బిందువు వద్ద నుండి అదే సమయమున సరస్సులో ఏర్పడిన దాని పరావర్తనమును 60° నిమ్నకోణంతో చూచెను. సరస్సు ఉపరితలము నుండి హెలికాప్టర్‌కు గల దూరమును కనుగొనుము

అభ్యాసము 7.3

సరియైన జవాబులు ఎన్నుకొనుము.

1. $(1-\sin^2\theta)\sec^2\theta =$

   (A) 0 (B) 1 (C) $\tan^2\theta$ (D) $\cos^2\theta$

2. $(1+\tan^2\theta)\sin^2\theta =$

   (A) $\sin^2\theta$ (B) $\cos^2\theta$ (C) $\tan^2\theta$ (D) $\cot^2\theta$

3. $(1-\cos^2\theta)(1+\cot^2\theta) =$

   (A) $\sin^2\theta$ (B) 0 (C) 1 (D) $\tan^2\theta$

4. $\sin(90^\circ-\theta)\cos\theta+\cos(90^\circ-\theta)\sin\theta =$

   (A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) -1

5. $1-\dfrac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta} =$

   (A) $\cos\theta$ (B) $\tan\theta$ (C) $\cot\theta$ (D) $\operatorname{cosec}\theta$

6. $\cos^4 x-\sin^4 x =$

   (A) $2\sin^2 x-1$ (B) $2\cos^2 x-1$ (C) $1+2\sin^2 x$ (D) $1-2\cos^2 x$.

7. $\tan\theta = \dfrac{a}{x}$ అయిన, $\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ విలువ $=$

   (A) $\cos\theta$ (B) $\sin\theta$ (C) $\operatorname{cosec}\theta$ (D) $\sec\theta$

8. $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$ అయిన, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$ విలువ $=$

   (A) 1 (B) -1 (C) $\tan^2\theta$ (D) $\operatorname{cosec}^2\theta$

9. $\dfrac{\sec\theta}{\cot\theta+\tan\theta} =$

   (A) $\cot\theta$ (B) $\tan\theta$ (C) $\sin\theta$ (D) $-\cot\theta$

10. $\dfrac{\sin(90^\circ-\theta)\sin\theta}{\tan\theta}+\dfrac{\cos(90^\circ-\theta)\cos\theta}{\cot\theta} =$

    (A) $\tan\theta$ (B) 1 (C) -1 (D) $\sin\theta$

11. ప్రక్కనున్న పటములో $AC =$

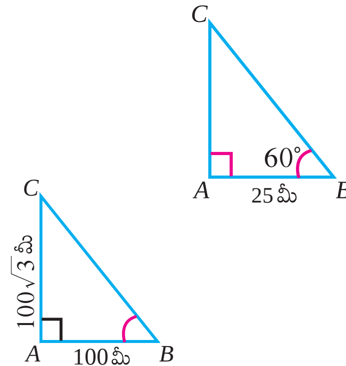
    (A) 25 మీ (B) $25\sqrt{3}$ మీ

    (C) $\dfrac{25}{\sqrt{3}}$ మీ (D) $25\sqrt{2}$ మీ

12. ప్రక్కనున్న పటములో, $\angle ABC =$

    (A) 45° (B) 30°

    (C) 60° (D) 50°



13. గోపురం నుండి ఒకడు 28.5 మీ దూరములో ఉన్నాడు. భూమి నుండి కంటి మట్టమునకు 1.5 మీ కలవు. అతని కంటి నుండి గోపురమునకు ఊర్ధ్వకోణము 45° అయిన గోపురం ఎత్తు

(A) 30 మీ (B) 27.5మీ (C) 28.5మీ (D) 27మీ

14. ప్రకనున్న పటములో $\sin\theta = \frac{15}{17}$. అయిన $BC =$

(A) 85 మీ (B) 65 మీ

(C) 95 మీ (D) 75మీ

15. $(1+\tan^2\theta)(1-\sin\theta)(1+\sin\theta) =$

(A) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ (B) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

(C) $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ (D) 0

16. $(1+\cot^2\theta)(1-\cos\theta)(1+\cos\theta) =$

(A) $\tan^2\theta - \sec^2\theta$ (B) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

(C) $\sec^2\theta - \tan^2\theta$ (D) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$

17. $(\cos^2\theta - 1)(\cot^2\theta + 1) + 1 =$

(A) 1 (B) –1 (C) 2 (D) 0

18. $\dfrac{1+\tan^2\theta}{1+\cot^2\theta} =$

(A) $\cos^2\theta$ (B) $\tan^2\theta$ (C) $\sin^2\theta$ (D) $\cot^2\theta$

19. $\sin^2\theta + \dfrac{1}{1+\tan^2\theta} =$

(A) $\text{cosec}^2\theta + \cot^2\theta$ (B) $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta$

(C) $\cot^2\theta - \text{cosec}^2\theta$ (D) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

20. $9\tan^2\theta - 9\sec^2\theta =$

(A) 1 (B) 0 (C) 9 (D) –9

నీకు తెలుసా?

పాల్ ఎర్డాస్ (26 మార్చి, 1913–20 సెప్టెంబరు, 1996) హంగేరి గణితశాస్త్రజ్ఞుడు. గణితశాస్త్ర చరిత్రలో పరిశోధనల రచనలను అధికముగా చేసిన ప్రచురణకర్తలలో ఒకడైన ఎర్డాస్, లియోన్‌హార్డ్ యూలర్‌తో మాత్రమే పోల్చగలిగినవారు. అతడు తన జీవితకాలంలో సుమారు 1,457 గణిత రచనలను చేసెను. యూలర్ సుమారు 800 రచనలు చేసెను. అతను గణితశాస్త్రముపై బలమైన నమ్మకముంచి మరియు సమాజ సేవగానెంచి సాధన చేసెను, అతని జీవితకాలంలో 511 మందితో కలసి పనిచేసెను.

8

గణనము

"Measure what is measurable, and make measurable what is not so"

-Galileo Galilei

- పరిచయం
- ఉపరితల వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమాణము
  - స్థూపము
  - శంఖువు
  - గోళము
- సంయుక్త పటములు మరియు స్థిర ఘనపరిమాణములు



ఆర్కిమెడిస్

(287 BC - 212 BC)

గ్రీసు

ప్రాచీన శతాబ్దంలో ఆర్కిమెడిస్ గొప్ప గణిత శాస్త్రవేత్తగా గుర్తించబడెను.

రేఖాగణితములో సమతల పటముల వైశాల్యములు అదేవిధంగా వక్రతల (ఉపరితలముల) వైశాల్యములు మరియు ఘనపరిమాణములను ఇతను ముఖ్యముగా రచించెను.

8.1 పరిచయం

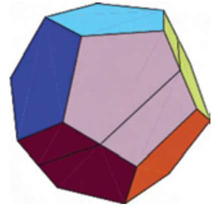
రేఖల పొడవులు, చుట్టుకొలతలు మరియు సమతల పటముల వైశాల్యములు, ఘన వస్తువుల ఉపరితల వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమాణము వంటి కొలతలను గూర్చి తెలుపు రేఖాగణిత భాగమును "గణనము" అని అందురు. వస్తువుల కొలతలు యొక్క అధ్యయనము ముఖ్యమైనది. ఎందుకనగా ఇవి నిత్యజీవితంలో వివిధ రకాలుగా ఉపయోగపడుచున్నవి. ప్రాథమిక రేఖాగణితములో సమతలములు, పలు ముఖముల ఉపరితలములు అదేవిధముగా కొన్ని ఘనముల వక్రతలములు పరిగణింపబడినవి. (ఉదాహరణకు గోళములు)

అతి సూక్ష్మ శాస్త్రము (*Nano Science*) అను ఒక గొప్ప భావనను ఉపరితల వైశాల్యము, ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తి తెలియజేసింది. ఈ నిష్పత్తి అతి సూక్ష్మశాస్త్ర స్కేలు మరియు సాంకేతిక పరిజ్ఞాన గుణముల ను తెలుపుటకు, పరిమాణమునకు సంబంధించిన ధర్మములను అర్థం చేసుకొనుటకు ఇది పునాది అయినది.

ఈ అధ్యాయంలో స్థూపము, శంఖువు, గోళము మరియు మిశ్రమ వస్తువులు వంటి ఘన వస్తువుల ఉపరితల వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమాణముల గురించి నేర్చుకొంటారు.

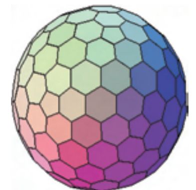
8.2 ఉపరితల వైశాల్యము (Surface Area)

గోళము ఘనపరిమాణం అనునది ఆవృత స్థూపము ఘనపరిమాణంలో 2/3 వ వంతుకు సమానమని సిసిలీ లోని సిరాక్యూస్‌కు చెందిన గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్త ఆర్కిమెడిస్ నిరూపించెను. అతడు దీనిని ముఖ్యమైన సాధనగా అభివర్ణించెను. అతడు పరావలయము యొక్క నిష్కాసనము పద్ధతిని ఉపయోగించి దీని వైశాల్యమును కనుగొనెను.



పటము. 8.1

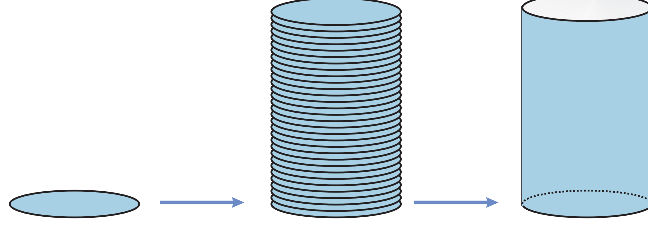
ఒక ఘనవస్తువు యొక్క బాహ్య వైశాల్యము ఉపరితల వైశాల్యము అగును. 3-పరిమాణము వస్తువుల బాహ్య ఉపరితల వైశాల్యము దాని ఉపరితల వైశాల్యమగును. కొన్ని ఘనముల ఉపరితల వైశాల్యముల పటములను ప్రక్క పటములో చూడవచ్చును.



పటము 8.2

8.2.1 క్రమ వృత్తాకార స్థూపము (Right Circular Cylinder)

కొన్ని వృత్తాకార పలకలు, పేపరు లేక అట్టలను ఒకే రూపంలో మరియు ఒకే కొలతతో తీసుకొని నిలువు వరుసలో అమర్చగా ఏర్పడు ఘనరూపమును క్రమ వృత్తాకార స్థూపము అని అందురు. వీటిని ఆధారమునకు లంబకోణములో వుంచబడినవని గమనింపుము. మరియు ఆధారము గుండ్రముగా ఉండును. (పటము 8.3 చూడుము)



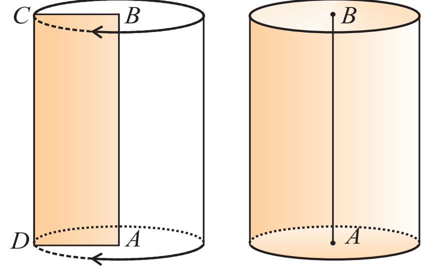
పటము. 8.3

నిర్వచనము

ఒక దీర్ఘచతురస్రము, దాని భుజమును ఆధారముగా చేసుకుని ఒక పూర్తి భ్రమణము చేసిన ఏర్పడు ఘన ఆకారమును క్రమ వృత్తాకార స్థూపము అందురు.

కృత్యము

$ABCD$ ఒక దీర్ఘచతురస్రము అనుకొనుము. దాని భుజము AB ను ఆధారముగా చేసుకొని ఒక సంపూర్ణ భ్రమణము చేసిన ఒక క్రమ వత్తాకార స్థూపము ఏర్పడుటను ప్రక్క పటము సూచించుచున్నది. AB ను స్థూపము అక్షము అందురు. AB పొడవును స్థూపము పొడవు లేక ఎత్తు అందురు. మరియు AD లేక BC ను వ్యాసార్థము అందురు.



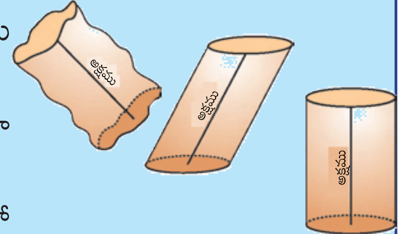
పటము. 8.4

గమనిక

(i) స్థూపము ఆధారము వృత్తాకారముగా లేనిచో దానిని ఏటవాలు స్థూపము అందురు.

(ii) స్థూపము ఆధారము వృత్తాకారముగా వుండి అక్షమునకు లంబంగా లేనిచో దానిని వృత్తీయ స్థూపము అందురు.

(iii) స్థూపము యొక్క అక్షము వృత్త ఆధారమునకు లంబంగా నున్నచో దానిని క్రమ వృత్తాకార స్థూపం అందురు.



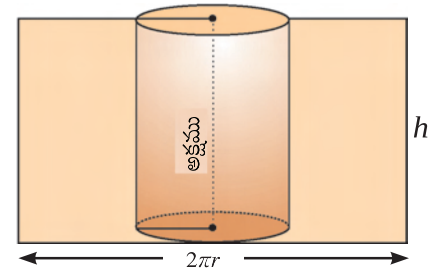
పటము. 8.5

(1) క్రమ వృత్తాకార స్థూపము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము Curved Surface area of a solid right circular cylinder

ప్రక్క పటం నుండి క్రమ వృత్తాకార స్థూపం యొక్క క్రింది మరియు పై ముఖములు వృత్తాకారంగా వుండి అవి ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా నుండును. స్థూపం యొక్క నిలువు ఉపరితలం వక్రతను కలిగివుండును. దీని వైశాల్యమును వక్రతల వైశాల్యం లేక పార్శ్వ తల వైశాల్యం అందురు.

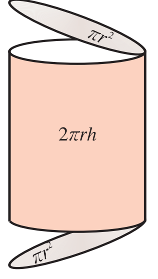
స్థూపము వక్రతల వైశాల్యం CSA = భూపరిధి × ఎత్తు = $2\pi r \times h$

= $2\pi rh$ చ.యూనిట్లు



పటము. 8.6

(ii) ఒక ఘన క్రమ వృత్తాకార స్థూపం యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము (Total Surface Area of a solid right circular cylinder)



పటము. 8.7

సంపూర్ణతల వైశాల్యము, TSA = వక్రతల వైశాల్యము + 2 × భూ వైశాల్యము

$= 2\pi rh + 2\times \pi r^2$

సంపూర్ణతల వైశాల్యము, $= 2\pi r(h+r)$ చ.ప్రమాణములు.

(iii) క్రమ వృత్తాకార బోలు స్థూపము (Right circular hollow cylinder)

ఇనుప పైపు, రబ్బర్ ట్యూబు మొదలగు ఘనముల ఆకారములు బోలు స్థూపములు అగును. బోలు స్థూపం ఎత్తు h అనుకొనిన వాటి బయటి మరియు లోపలి వ్యాసార్ధాలు వరుసగా R మరియు r అగును.

వక్రతల వైశాల్యము CSA = బయటి ఉపరితల వైశాల్యం + లోపలి ఉపరితల వైశాల్యము

$= 2\pi Rh + 2\pi rh$

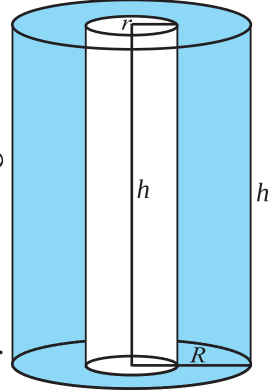
$\therefore$ CSA $= 2\pi h(R+r)$ చ.ప్రమాణములు.

సంపూర్ణతల వైశాల్యము TSA = వక్రతల వైశాల్యం + 2 × భూ వైశాల్యము

$= 2\pi h(R+r) + 2\times[\pi R^2 - \pi r^2]$

$= 2\pi h(R+r) + 2\pi(R+r)(R-r)$

$\therefore$ TSA $= 2\pi(R+r)(R-r+h)$ చ.ప్రమాణములు.



పటము. 8.8

సూచన :

బోలు స్థూపము మందము, w = $R - r$.

గమనిక

ఈ అధ్యాయములో $\pi = \frac{22}{7}$ (రమారమి విలువ)ను కావలసిన చోట ఉపయోగించవచ్చును.

ఉదాహరణ 8.1

ఒక ఘన క్రమ వృత్తాకార స్థూపము వ్యాసార్థము 7 సెం.మీ మరియు ఎత్తు 20 సెం.మీ అయిన (i) వక్రతల వైశాల్యము మరియు (ii) సంపూర్ణతల వైశాల్యములను కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$)

సాధన : క్రమ వృత్తాకార స్థూపం యొక్క వ్యాసార్థము r మరియు ఎత్తు h అనుకొనుము.

$r = 7$ సెం.మీ మరియు $h = 20$ సెం.మీ.

వక్రతల వైశాల్యము, CSA $= 2\pi rh$

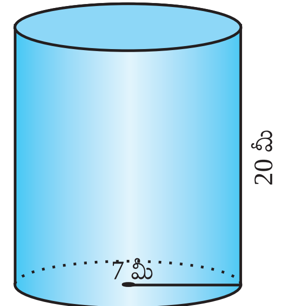
$= 2\times\frac{22}{7}\times 7\times 20$

వక్రతల వైశాల్యము $= 880$ చ.సెం.మీ

సంపూర్ణతల వైశాల్యము TSA $= 2\pi r(h+r)$

$= 2\times\frac{22}{7}\times 7\times[20+7] = 44\times 27$

సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 1188$ చ.సెం.మీ



పటము. 8.9

ఉదాహరణ 8.2

ఒక క్రమ వృత్తాకార ఘన స్థూపము సంపూర్ణతల వైశాల్యం 880 చ.సెం.మీ. వ్యాసార్ధం 10 సెం.మీ. అయిన దాని వక్రతల వైశాల్యం కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$ తీసుకొనుము.)

సాధన : క్రమ వృత్తాకార ఘనస్థూపము యొక్క వ్యాసార్ధం r మరియు ఎత్తు h అనుకొనుము.

సంపూర్ణతల వైశాల్యము S అనుకొనుము.

$r = 10$ సెం.మీ మరియు $S = 880$ సెం.మీ^{2}

$$S = 880 \implies 2\pi r[h + r] = 880$$

$$\implies 2 \times \frac{22}{7} \times 10[h + 10] = 880$$

$$\implies h + 10 = \frac{880 \times 7}{2 \times 22 \times 10}$$

$$\implies h + 10 = 14$$

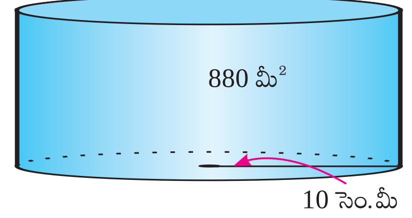
స్థూపము ఎత్తు, $h = 4$ సెం.మీ

వక్రతల వైశాల్యము $= 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 10 \times 4$$

$$= \frac{1760}{7}$$

స్థూపం వక్రతల వైశాల్యం $= 251\frac{3}{7}$ చ.సెం.మీ



పటము. 8.10

మరొక పద్ధతి :

వక్రతలవైశాల్యము = సంపూర్ణతల వైశాల్యము – 2 × భూ వైశాల్యము

$= 880 - 2 \times \pi r^2$

$= 880 - 2 \times \frac{22}{7} \times 10^2$

$= \frac{1760}{7} = 251\frac{3}{7}$ చ.సెం.మీ

ఉదాహరణ 8.3

ఒక క్రమ వృత్తాకార ఘనస్థూపం యొక్క వ్యాసార్ధం మరియు ఎత్తుల నిష్పత్తి 2:5, దీని వక్రతల వైశాల్యం $\frac{3960}{7}$ చ.సెం.మీ. అయిన దాని ఎత్తు మరియు వ్యాసార్ధంలను కనుగొనుము.. ($\pi = \frac{22}{7}$)

సాధన : క్రమ వృత్తాకార స్థూపము వ్యాసార్ధము మరియు ఎత్తులను r మరియు h అనుకొనుము.

$$r : h = 2 : 5 \implies \frac{r}{h} = \frac{2}{5}, \quad \therefore r = \frac{2}{5}h$$

వక్రతల వైశాల్యము $= 2\pi rh$

$$\implies 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{2}{5} \times h \times h = \frac{3960}{7}$$

$$\implies h^2 = \frac{3960 \times 7 \times 5}{2 \times 22 \times 2 \times 7} = 225$$

కావున, $h = 15$ సెం.మీ. $\implies r = \frac{2}{5}h = 6$ సెం.మీ.

కనుక, స్థూపము ఎత్తు 15 సెం.మీ. మరియు వ్యాసార్ధము 6 సెం.మీ.

ఉదాహరణ 8.4

120 సెం.మీ. పొడవు గల ఒక రోడ్ రోలర్ (Road Roller) 84 సెం.మీ. వ్యాసం గల ఒక ఆట స్థలము (Playground) ను 500 సార్లు భ్రమణములు చేసి చదును చేసిన, చదును చేయుటకు 1 చ.మీకు 0.75 పైసలు వంతున ఖర్చు అయిన, మొత్తము చదును చేయుటకు అగు ఖర్చును కనుగొనుము.($\pi = \frac{22}{7}$ తీసుకొనుము.)

సాధన : $r = 42$ సెం.మీ., $h = 120$ సెం.మీ.

ఒక భ్రమణములో చదును చేయు స్థలము = రోడ్ రోలర్ వక్రతల వైశాల్యము

$= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 42 \times 120$

$= 31680$ సెం.మీ.^{2}.

500 భ్రమణములతో చదును చేయు స్థలము $= 31680 \times 500$

$= 15840000$ సెం.మీ.^{2}.

$= \frac{15840000}{10000} = 1584$మీ.^{2} (10,000 సెం.మీ.^{2} = 1 చ.మీ)

పటము. 8.11

1 చ.మీ. చదును చేయుటకు అగు ఖర్చు $= ₹\ \frac{75}{100}$

ఆట స్థలమును చదును చేయుటకు అగు ఖర్చు $= \frac{1584 \times 75}{100} = ₹\ 1188$.

ఉదాహరణ 8.5

బోలు స్థూపము లోపలి మరియు బయటి వ్యాసార్ధములు వరుసగా 12 సెం.మీ. మరియు 18 సెం.మీ. దాని ఎత్తు 14 సెం.మీ. అయిన దాని వక్రతల వైశాల్యము మరియు సంపూర్ణతల వైశాల్యంలను కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$ గాతీసుకొనుము)

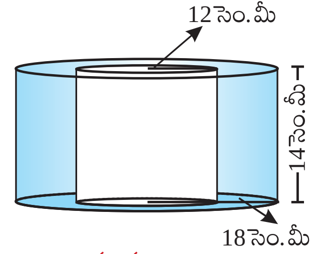
సాధన : బోలు స్థూపము యొక్క లోపలి మరియు బయటి వ్యాసార్ధములు మరియు ఎత్తు క్రమముగా r, R మరియు h అనుకొనుము.

$r = 12$ సెం.మీ., $R = 18\text{cm}$, $h = 14$ సెం.మీ.

వక్రతల వైశాల్యమ, CSA $= 2\pi h(R+r)$

కావున, CSA $= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times (18+12)$

$= 2640$ చ.సెం.మీ



పటము. 8.12

సంపూర్ణతల వైశాల్యం, TSA $= 2\pi(R+r)(R-r+h)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times (18+12)(18-12+14)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30 \times 20 = \frac{26400}{7}$.

కావున, సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= 3771\frac{3}{7}$ చ.సెం.మీ

8.2.2 క్రమ వృత్తాకార శంఖువు (Right Circular Cone)

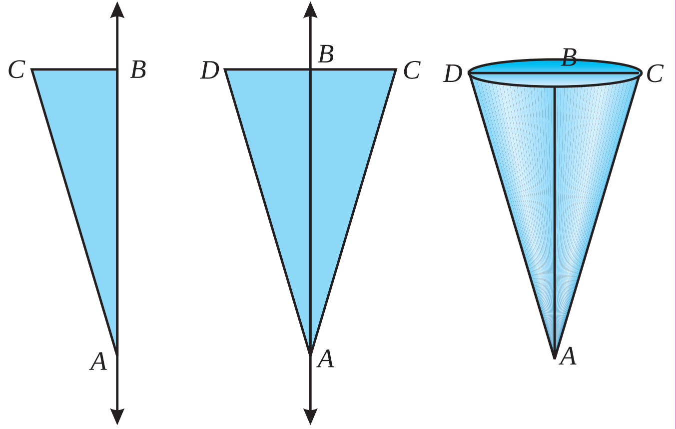
నిత్య జీవితంలో మనము వివిధ ఘనరూపములు లేక వస్తువులు అనగా ఐస్‌క్రీం, దేవాలయపు తేరు పై భాగము, బఫూన్ టోపి, మెహంతి కోన్ మొదలగు రూపములను చూస్తున్నాము. పైన పేర్కొన్న వస్తువులన్నీ క్రమ వృత్తాకార శంఖువు ఆకారమును కలిగియున్నవి.

ఒక ఘన వస్తువైన శంఖువు, సమతల ఆధారము నుండి మొనదేలిన బిందువును శీర్షము అందురు. సాధారణంగా ఆధారము ఏరూపములోనైనావుండును. ఇక్కడ శంఖువులు క్రమ వృత్తాకారంలో వుండునట్లు అనుకొనుము. ఇక్కడ సమతలంలో లంబకోణం చేస్తూ ఆధార కేంద్రం ద్వారా పోవు అక్షమును క్రమము అందురు. మరియు ఆధారము వృత్తాకారంలో ఉండుటను వర్తులం అందురు. క్రమ వర్తులాకార శంఖువును నిర్వచించి దాని ఉపరితల వైశాల్యమును కనుగొనుటను క్రింది కృత్యము ద్వారా చూడవచ్చును.

కృత్యము

ఒక మందమైన కాగితంను తీసుకొని B వద్ద లంబకోణము చేయునట్లు $\triangle ABC$ ని కత్తిరించుము. త్రిభుజము యొక్క లంబకోణ త్రిభుజములలో ఒకటైన AB వైపు పొడవైన దారమును అంటించును. దారము ఆధారముగా దారమును పట్టుకొని త్రిభుజమును త్రిప్పుము.

ఏమి జరుగును? దారమును ఆధారంగా చేసుకొని త్రిభుజమును త్రిప్పినప్పుడు ఒక రూపము ఏర్పడును. ఈరూపమునే క్రమ వృత్తాకార శంఖువు అందురు.



పటము. 8.13

AB భుజమును ఆధారంగా $\triangle ABC$ లంబకోణ త్రిభుజమును 360° కోణముతో త్రిప్పిన ఘనము ఏర్పడును. దీనినే క్రమ వృత్తాకారపు శంఖువు అందురు

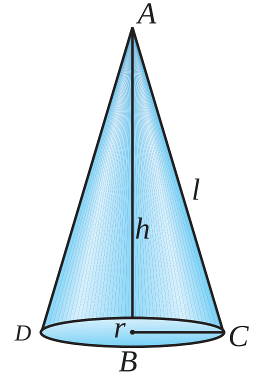
AB పొడవును శంఖువు ఎత్తు అందురు.

BC పొడవును ఆధారము యొక్క వాసార్ధము అందురు $(BC = r)$

AC పొడవును శంఖువు వాలుఎత్తు l అందురు. $(AC = AD = l)$.

$\triangle ABC$ లంబకోణ త్రిభుజములో

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} \quad \text{(పైథాగరస్ సిద్ధాంతంననుసరించి)}$$
$$h = \sqrt{l^2 - r^2}$$
$$r = \sqrt{l^2 - h^2}$$



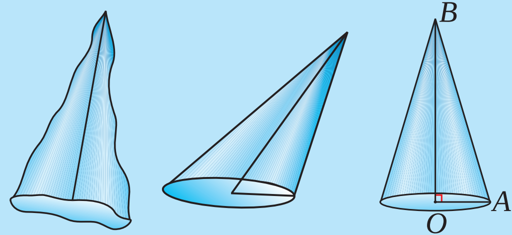
పటము. 8.14

గమనిక

(i) శంఖువు ఆధారము వృత్తాకారంగా లేనిచో దానిని క్రమరహిత శంఖువు అందురు

(ii) శంఖువు ఆధారము వృత్తాకారంగా నున్నచో దానిని వృత్తీయ శంఖువు అందురు.

(iii) వృత్తాకార ఆధారము యొక్క కేంద్రము నుండి పైకి నేరుగా అగ్రమును ఏర్పరిచిన దానిని క్రమవృత్తాకార శంఖువు అందురు.



పటము. 8.15

(i) బోలు శంఖువు యొక్క వక్రతల వైశాల్యము (Curved surface area of a hollow cone)

వృత్త ఖండ వ్యాసార్ధము l. మరియు కేంద్ర కోణము θ° గా తీసుకొనెదము, చాపము పొడవు L అనుకొనుము.

Thus, $\dfrac{2\pi l}{L} = \dfrac{360^\circ}{\theta^\circ}$

$$\Longrightarrow \quad L = 2\pi l \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ} \qquad (1)$$

వృత్త ఖండ వ్యాసార్ధములను కలుపగా క్రమ వృత్తాకార శంఖువు ఏర్పడును.

శంఖువు వ్యాసార్ధము r అనుకొనుము.

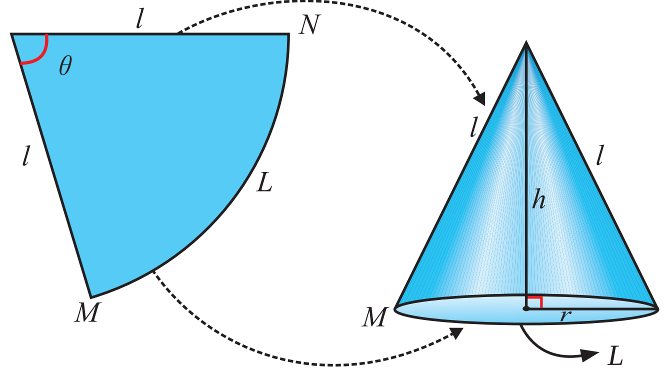
కావున, $L = 2\pi r$

(1) నుండి

$$2\pi r = 2\pi l \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ}$$

$$\Longrightarrow \quad r = l\left(\frac{\theta^\circ}{360^\circ}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{r}{l} = \left(\frac{\theta^\circ}{360^\circ}\right)$$



పటము. 8.16

సూచన

వృత్త ఖండమును శంఖువుగా మడిచినపుడు ఈ క్రింది మార్పులు సంభవించును:

వృత్త ఖండము		శంఖువు
వ్యాసార్ధము (l)	→	వాలుటెత్తు (l)
చాప పొడవు (L)	→	భూమి చుట్టుకొలత $2\pi r$
వైశాల్యము	→	వక్రతల వైశాల్యము πrl

వృత్త ఖండము వైశాల్యము A అనుకొనుము. అపుడు

$$\frac{\pi l^2}{A} = \frac{360^\circ}{\theta^\circ} \qquad (2)$$

శంఖువు వక్రతల వైశాల్యము = వృత్త ఖండము వైశాల్యము

శంఖువు వక్రతల వైశాల్యము $A = \pi l^2\left(\dfrac{\theta^\circ}{360^\circ}\right) = \pi l^2\left(\dfrac{r}{l}\right)$.

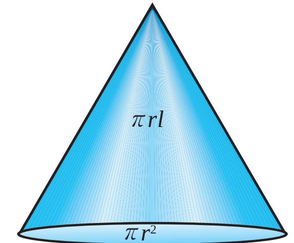
శంఖువు వక్రతల వైశాల్యము $= \pi rl$ చ.ప్రమాణములు

(ii) క్రమ వృత్తాకార ఘన శంఖువు యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము (Total surface area of the solid right circular cone)

ఘన శంఖువు సంపూర్ణతల వైశాల్యము = { శంఖువు వక్రతల వైశాల్యము + భూ వైశాల్యము

$= \pi rl + \pi r^2$

ఘన శంఖువు సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= \pi r(l + r)$ చ.ప్రమాణములు



పటము. 8.17

ఉదాహరణ 8.6

ఒక క్రమ వృత్తాకార శంఖువు యొక్క వ్యాసార్ధము మరియు వాలుటెత్తు వరుసగా 35 సెం.మీ మరియు 37 సెం.మీ అయిన శంఖువు వక్రతల వైశాల్యము మరియు సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనుము. ($\pi = \dfrac{22}{7}$)

సాధన : క్రమ వృత్తాకార ఘనశంఖువు వ్యాసార్ధము r మరియు వాలుటెత్తు l అనుకొనుము.

$r = 35$ సెం.మీ, $l = 37$ సెం.మీ

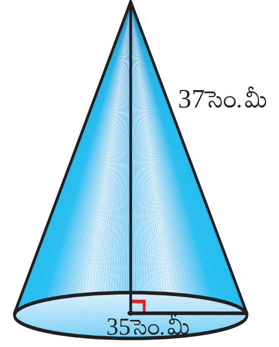
వక్రతల వైశాల్యము, $\text{CSA} = \pi rl = \pi(35)(37)$

$\text{CSA} = 4070$ చ.సెం.మీ.

సంపూర్ణ తల వైశాల్యము, $\text{TSA} = \pi r[l + r]$

$$= \frac{22}{7} \times 35 \times [37 + 35]$$

కావున, $\text{TSA} = 7920$ చ.సెం.మీ.



పటము. 8.18

ఉదాహరణ 8.7

O మరియు C లు ఒక క్రమ వృత్తాకార శంఖువు యొక్క భూ ఆధార కేంద్రము మరియు అగ్రము అని అనుకొనుము B అనునది భూ ఆధార పరిధిపై ఏదేని ఒక బిందువు అనుకొనుము. శంఖువు వ్యాసార్ధము 6 సెం.మీ మరియు $\angle OBC = 60^o$ అయిన శంఖువు యొక్క ఎత్తు మరియు వక్రతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన : ఇవ్వబడిన వ్యాసార్ధము OB = 6 సెం.మీ మరియు $\angle OBC = 60^o$.

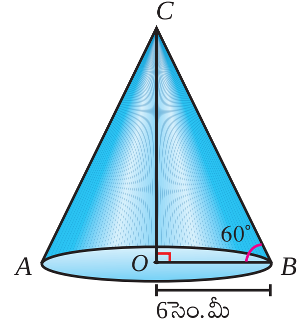
$\triangle OBC$ లంబకోణత్రిభుజం నుండి,

$$\cos 60^o = \frac{OB}{BC}$$

$$\Longrightarrow \quad BC = \frac{OB}{\cos 60^\circ}$$

$$\therefore \quad BC = \frac{6}{(\frac{1}{2})} = 12 \text{ సెం.మీ}$$

కనుక, శంఖువు వాలుటెత్తు $l = 12$ సెం.మీ



పటము. 8.19

$\triangle OBC$ లంబకోణత్రిభుజం నుండి,

$$\tan 60^o = \frac{OC}{OB}$$

$$\Longrightarrow \quad OC = OB \tan 60^\circ = 6\sqrt{3}$$

కావున, శంఖువు ఎత్తు , OC = $6\sqrt{3}$ సెం.మీ

$\therefore$ వక్రతల వైశాల్యము, $\pi rl = \pi \times 6 \times 12 = 72\pi$ చ.సెం.మీ.

ఉదాహరణ 8.8

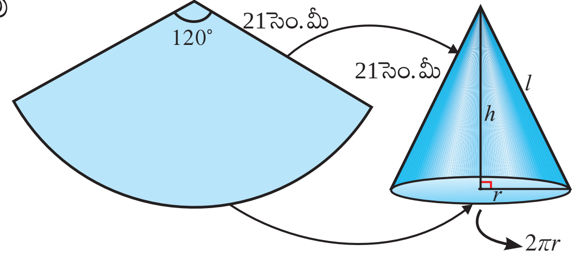
21 సెం.మీ వ్యాసార్ధము గల వృత్తము నుండి 120° కోణము గల వృత్తఖండమును కత్తిరించి శంఖువుగా చేసిన శంఖువు యొక్క వక్రతల వైశాల్యమను కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$)

సాధన : శంఖువు యొక్క భూ వ్యాసార్ధము = r అనుకొనుము

వృత్తఖండ కోణము, $\theta = 120^\circ$

వృత్త ఖండ వ్యాసార్ధం, $R = 21$ సెం.మీ

వృత్త ఖండమును మడతపెట్టగా క్రమ వృత్తాకార శంఖువు ఏర్పడును.



పటము. 8.20

శంఖువు యొక్క భూ పరిధి = చాపము పొడవు

$$\Longrightarrow \quad 2\pi r = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi R$$

$$\Longrightarrow \quad r = \frac{\theta}{360^\circ} \times R$$

కనుక, శంఖువు యొక్క భూవ్యాసార్ధము, $r = \frac{120^\circ}{360^\circ} \times 21 = 7$ సెం.మీ

మరియు, శంఖువు వాలుటెత్తు,

l = వృత్త ఖండ వ్యాసార్ధం

$l = R \Longrightarrow l = 21$ సెం.మీ.

శంఖువు వక్రతల వైశాల్యము,

$$\text{CSA} = \pi r l$$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 21 = 462.$$

మరొక పద్ధతి :

శంఖువు వక్రతల వైశాల్యము = వృత్త ఖండ వైశాల్యము

$$= \frac{\theta}{360^0} \times \pi R^2$$

$$= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

$= 462$ చ.సెం.మీ

కావున, శంఖువు వక్రతల వైశాల్యము 462 చ.సెం.మీ.

8.2.3 గోళము (Sphere)

ఒక వృత్తాకార డిస్క్‌ను దాని వ్యాసం ఆధారంగా భ్రమణము చేసినపుడు ఏర్పడు ఘనాకారము గోళము అందురు. గోళము ఒక త్రిపరిమాణము గల వస్తువు. దీనికి ఉపరితల వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమాణములు వుండును.

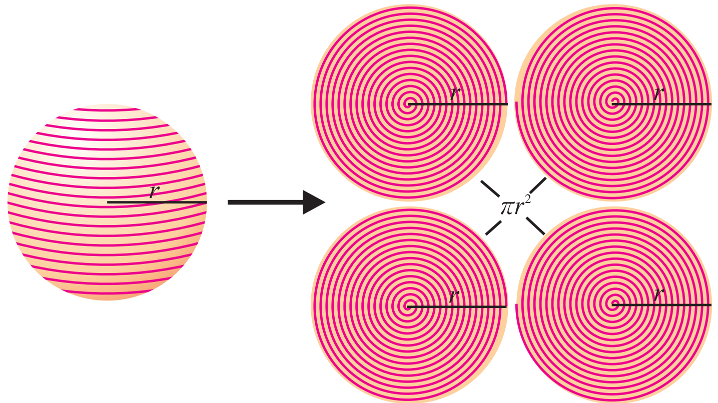
(i) గోళము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము (Curved surface area of a solid sphere)

కృత్యము

ఒక వృత్తాకార డిస్క్ తీసుకొని, దానికి ఒక దారమును వ్యాసంనకు అంటించి 360^0 కోణముతో త్రిప్పినపుడు అది ఒక బంతి వలె వుండును. ఈ కొత్త ఘనమును గోళము అందురు.

గోళ ఉపరితల వైశాల్యము అదే వ్యాసార్ధము గల వృత్తవైశాల్యమునకు, నాలుగు రెట్లుండునని క్రింది కృత్యము సహాయముతో తెలుసుకొనుము.

- ఒక ప్లాస్టిక్ బంతిని తీసుకొనుము.
- బంతి పై భాగములో ఒక గుండు సూదిని అమర్చుము.
- బంతి చుట్టూ అనగా మొత్తము వక్రతల వైశాల్యము కప్పునట్లుగా దారమును చుట్టుము.
- చుట్టిన దారము విప్పి దానిని కొలువుము.
- దానిని నాలుగు సమాన భాగములుగా కత్తిరించుము.
- పటములో చూపిన విధముగా దారమును ఉంచుము



పటము. 8.21

- గోళము మరియు ఏర్పడిన వృత్తముల వ్యాసార్ధములను కొలువుము.

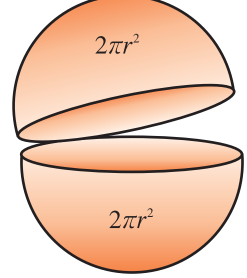
గోళము వ్యాసార్ధము = నాలుగు సమాన వృత్తముల వ్యాసార్ధము.

కనుక, గోళము వక్రతల వైశాల్యము = 4 × వృత్త వైశాల్యము

$= 4 \times \pi r^2$

$\therefore$ గోళము వక్రతల వైశాల్యము $= 4\pi r^2$ చ.ప్రమాణములు

(ii) ఘన అర్ధగోళము (Solid hemisphere)



పటము. 8.22

గోళం కేంద్రం గుండా పోవు సమతలం గోళాన్ని రెండు సమభాగాలుగా విభజిస్తుంది. ప్రతి సమభాగాన్ని **ఘన అర్ధగోళము** అందురు.

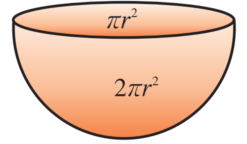
అర్ధగోళ వక్రతల వైశాల్యము $= \dfrac{\text{గోళము వక్రతల వైశాల్యము}}{2}$

$= \dfrac{4\pi r^2}{2} = 2\pi r^2$ చ.ప్రమాణములు

అర్ధగోళము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము = వక్రతల వైశాల్యము + వృత్త వైశాల్యము

$= 2\pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\pi r^2$ చ.ప్రమాణములు



పటము. 8.23

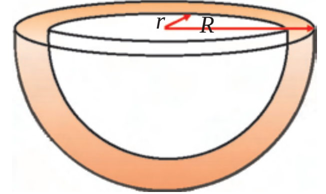
(iii) బోలు అర్ధగోళము (Hollow hemisphere)

R మరియు r బోలు అర్ధగోళము యొక్క బయటి మరియు లోపలి వ్యాసార్ధాలు అనుకొనుము.

వక్రతల వైశాల్యము = బయటి ఉపరితల వైశాల్యము + లోపలి ఉపరితల వైశాల్యము

$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2$

$= 2\pi(R^2+r^2)$ చ.ప్రమాణములు.



పటము. 8.24

సంపూర్ణతల వైశాల్యము = బయటి ఉపరితల వైశాల్యము + లోపలి ఉపరితల వైశాల్యము + భూ వైశాల్యము

$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 + \pi(R^2 - r^2)$

$= 2\pi(R^2 + r^2) + \pi(R + r)(R - r)$ చ.ప్రమాణములు.

ఉదాహరణ 8.9

సర్కసులో ఒక మోటారు సైకిల్ నడుపువాడు 7 మీ లోపలి వ్యాసార్ధము గల బోలు గోళములో గారడి చేయును. వాహనము నడుపుటకు అందుబాటులో నున్న వైశాల్యమును కనుగొనుము. ($\pi = \dfrac{22}{7}$)

సాధన : బోలు గోళము లోపలి వ్యాసం, $2r = 7$ మీ

మోటారు సైకిల్ నడుపువాడు వాహనము నడుపుటకు అందుబాటులో నున్న వైశాల్యము

= గోళము యొక్క లోపలి ఉపరితల వైశాల్యము

$= 4\pi r^2 = \pi(2r)^2 = \dfrac{22}{7} \times 7^2$

అతను వాహనము నడుపుటకు అందుబాటులో నున్న వైశాల్యము $= 154$ చ.మీ.

ఉదాహరణ 8.10

ఒక ఘన అర్ధగోళము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము 675π చ.సెం.మీ. అయిన దాని వక్రతల వైశాల్యము కనుగొనుము.

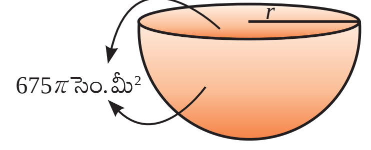
సాధన : ఇవ్వబడిన ఘన అర్ధగోళము సంపూర్ణతల వైశాల్యము,

$3\pi r^2 = 675\pi$ చ.సెం.మీ.

$\Longrightarrow r^2 = 225$

ఘన అర్ధగోళము వక్రతల వైశాల్యము,

CSA = $2\pi r^2 = 2\pi \times 225 = 450\pi$ చ.సెం.మీ.



పటము. 8.25

ఉదాహరణ 8.11

ఒక అర్ధగోళాకార పాత్ర మందం 0.25 సెం.మీ. పాత్ర లోపలి వ్యాసార్ధం 5 సెం.మీ. అయిన పాత్ర యొక్క వెలుపలి వక్రతల వైశాల్యము కనుగొనుము ($\pi = \frac{22}{7}$)

సాధన : r, R మరియు w లు వరుసగా పాత్ర లోపలి మరియు వెలుపలి వ్యాసార్ధాలు మరియు పాత్ర మందం అనుకొనుము.

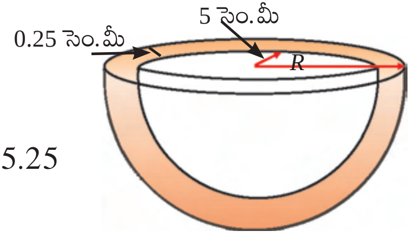
ఇవ్వబడినది $r = 5$ సెం.మీ., $w = 0.25$ సెం.మీ.

$\therefore \quad R = r + w = 5 + 0.25 = 5.25$ సెం.మీ.

పాత్ర వెలుపలి ఉపరితల వైశాల్యము $= 2\pi R^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 5.25 \times 5.25$

ఉపరితల వైశాల్యము $= 173.25$ చ.సెం.మీ.



పటము. 8.26

అభ్యాసము 8.1

1. ఒక క్రమ వృత్తాకార స్థూపము వ్యాసార్ధం 14 సెం.మీ. మరియు ఎత్తు 8 సెం.మీ. అయిన దాని వక్రతల వైశాల్యం మరియు సంపూర్ణతల వైశాల్యం కనుగొనుము.
2. ఒక క్రమ వృత్తాకార స్థూపం సంపూర్ణతల వైశాల్యం 660 సెం.మీ^{2} మరియు దాని ఆధారము వ్యాసము 14 సెం.మీ. అయిన స్థూపము ఎత్తు మరియు వక్రతల వైశాల్యము కనుగొనుము.
3. ఒక క్రమ వృత్తాకార స్థూపము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము మరియు భూపరిధిలు వరుసగా 4400 చ.సెం.మీ. మరియు 110 సెం.మీ. అయిన దాని ఎత్తు మరియు వ్యాసములను కనుగొనుము.
4. ఒక భవనములో 12 క్రమ స్థూపాకార స్థంభములు గలవు. ప్రతి ఒక్కదాని వ్యాసార్ధం 50 సెం.మీ. మరియు ఎత్తు 3.5 మీ. ఈ స్తంభములకు రంగు వేయుటకు ఒక చ.మీ.కు రూ.20లు ఖర్చు అయిన మొత్తము 12 స్తంభములకు రంగు వేయుటకు అగు ఖర్చు కనుగొనుము.
5. ఒక ఘన క్రమ వృత్తాకార స్థూపము సంపూర్ణతల వైశాల్యము 231 సెం.మీ^{2} దాని వక్రతల వైశాల్యం, సంపూర్ణతల వైశాల్యమునకు మూడింటిలో రెండు వంతులు అయిన దాని వ్యాసార్ధం, ఎత్తులను కనుగొనుము.
6. ఒక క్రమ వృత్తాకార స్థూపం సంపూర్ణతల వైశాల్యం 1540 సెం.మీ^{2} దాని ఎత్తు భూ వ్యాసార్ధంనకు 4 రెట్లు అయిన స్థూపము ఎత్తును కనుగొనుము.`

7. రెండు క్రమ వృత్తాకార స్థూపముల వ్యాసార్ధముల నిష్పత్తి 3:2 మరియు వాటి ఎత్తుల నిష్పత్తి 5:3 అయిన వాటి వక్రతల వైశాల్యముల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.
8. ఒక బోలు స్థూపము వక్రతల వైశాల్యము 540π చ.సెం.మీ. దాని లోపలి వ్యాసం 16 సెం.మీ., ఎత్తు 15 సెం.మీ. అయిన సంపూర్ణతల వైశాల్యం కనుగొనుము.
9. ఒక స్థూపాకారపు ఇనుప పైపు వెలుపలి వ్యాసం 25 సెం.మీ. మరియు దాని పొడవు 20 సెం.మీ. పైపు మందం 1 సెం.మీ. అయిన పైపు యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము కనుగొనుము.
10. ఒక ఘన క్రమ వృత్తాకార శంఖువు వ్యాసార్ధము మరియు ఎత్తులు వరుసగా 7 సెం.మీ., మరియు 24 సెం.మీ. అయిన దాని వక్రతల వైశాల్యము మరియు సంపూర్ణతల వైశాల్యములను కనుగొనుము.
11. ఒక క్రమ వృత్తాకార శంఖువు ఊర్ధ్వకోణము మరియు వ్యాసార్ధము వరుసగా 60° మరియు 15 సెం. మీ. అయిన దాని ఎత్తు మరియు వాలుటెత్తులను కనుగొనుము.
12. ఒక ఘన శంఖువు భూ పరిధి 236 సెం.మీ. మరియు వాలుటెత్తు 12 సెం.మీ. అయిన వక్రతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.
13. ఒక వడ్లకుప్ప శంఖువు ఆకారంలో నున్నది. దాని వ్యాసం 4.2 సెం.మీ. మరియు ఎత్తు 2.8 మీ వడ్లకుప్ప వర్షంలో తడవకుండా కాన్వాసుచే కప్పబడినది. దానికి అవసరమగు కాన్వాసు గుడ్డ వైశాల్యమును కనుగొనుము.
14. ఒక వృత్తాకార డిస్క్ యొక్క వృత్తఖండము మధ్యకోణము మరియు వ్యాసార్ధములు వరుసగా180° మరియు 21 సెం.మీ. వృత్తఖండము యొక్క కొనలు ఒకటిగా కలిపిన బోలు శంఖువు ఏర్పడును. అయిన శంఖువు వ్యాసార్ధము కనుగొనుము.
15. ఘన శంఖువు యొక్క వ్యాసార్ధము మరియు వాలుటెత్తుల నిష్పత్తి 3:5 దాని వక్రతల వైశాల్యము 60π చ.సెం.మీ. అయిన సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.
16. ఘన గోళము వక్రతల వైశాల్యము 98.56 సెం.మీ^{2} అయిన గోళము వ్యాసార్ధం కనుగొనుము.
17. ఒక ఘన అర్ధగోళము యొక్క వక్రతల వైశాల్యం 2772 చ.సెం.మీ. అయిన దాని సంపూర్ణతల వైశాల్యము కనుగొనుము.
18. రెండు ఘన అర్ధగోళముల వ్యాసార్ధముల నిష్పత్తి 3:5 అయిన వాటి వక్రతల వైశాల్యము నిష్పత్తి మరియు సంపూర్ణతల వైశాల్యముల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.
19. ఒక బోలు అర్ధగోళము యొక్క బాహ్య మరియులోపలి వ్యాసార్ధాలు వరుసగా 4.2 సెం.మీ. మరియు 2.1 సెం.మీ అయిన వక్రతల వైశాల్యము మరియు సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.
20. ఒక అంతర వక్రతల వైశాల్యము గల అర్ధగోళాకార భవన శిఖరమునకు రంగు వేయవలెను. భూ పరిధి 17.6 మీ. రంగు వేయుటకు 1 మీ^{2} కు ₹ 5 ఖర్చు అయిన మొత్తం రంగు వేయుటకు అగు ఖర్చును కనుగొనుము.

8.3 ఘనపరిమాణము (Volume)

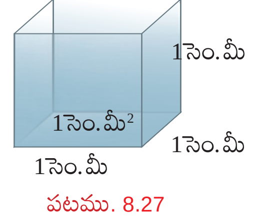
ఇంతవరకు మనము కొన్ని ఘనముల ఉపరితల వైశాల్యమునకు సంబంధించిన సమస్యలను చూచితిమి. ఇపుడు ఘనముల ఘనపరిమాణములను గణించుటను తెలుసుకుందాము. యదార్ధంగా ఘనపరిమాణము అనునది "స్థలమును ఆక్రమించు కొలత" ఒక ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము, ఆ ఘనము యొక్క సంఖ్యాత్మక లక్షణము అగును.

ఉదాహరణకు ఒక వస్తువును ప్రమాణ ఘనముల యొక్క పరిమితి సమితిగా విడదీసిన, దాని ఘనపరిమాణము వాటి ఘనముల సంఖ్యకు సమానము.

పటములో నున్న ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము

= పొడవు × వెడల్పు × ఎత్తు

= 1 సెం.మీ. ×1 సెం.మీ. ×1 సెం.మీ. = 1 సెం.మీ.^{3}.



పటము. 8.27

ఒక వస్తువు యొక్క ఘన పరిమాణం 100 ఘన సెం.మీ. అని చెప్పవచ్చును. ఆ వస్తువును పూర్తిగా నింపుటకు ప్రతి 1 సెం.మీ.^{3} ఘనపరిమాణమునకు 100 ఘనములు కావలయును.

ఉపరితల వైశాల్యము వలె ఘనపరిమాణము ఒక ధనాత్మక పరిమాణము మొత్తము మరియు స్థానభ్రంశమునకు స్థిరంగా ఉండును. కొన్ని ఘనముల ఘనపరిమాణములు క్రింద ఇవ్వబడినది.

8.3.1 క్రమ వృత్తాకార స్థూపం ఘనపరిమాణము (Volume of a right circular cylinder)

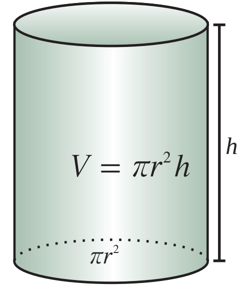
(i) ఒక ఘన వృత్తాకార స్థూపం ఘనపరిమాణం (Volume of a solid right circular cylinder)

భూ వైశాల్యము మరియు ఎత్తుల లబ్ధంను క్రమ వృత్తాకార ఘన స్థూపము ఘనపరిమాణం అగును.

స్థూపము ఘనపరిమాణం, V = భూ వైశాల్యం × ఎత్తు

$= \pi r^2 \times h$

కావున, స్థూపము ఘనపరిమాణము, $V = \pi r^2 h$ ఘ.ప్రమాణములు



పటము. 8.28

(ii) బోలు స్థూపము ఘనపరిమాణము (Volume of a hollow cylinder)

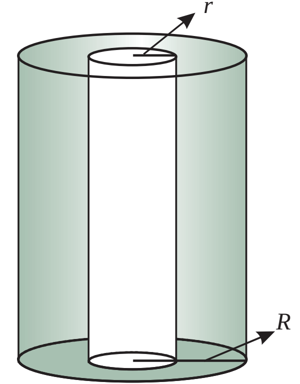
R మరియు r లు క్రమ వృత్తాకార బోలు స్థూపము యొక్క వెలుపలి మరియు అంతర వ్యాసార్ధములు అనుకొనుము. h అనునది దాని ఎత్తు అనుకొనుము.

ఘనపరిమాణము, V = {వెలుపలి స్థూపము ఘనపరిమాణము} − {అంతర స్థూపము ఘనపరిమాణము}

$= \pi R^2 h - \pi r^2 h$

కనుక, బోలు స్థూపము ఘనపరిమాణము,

$V = \pi h(R^2 - r^2)$ ఘ.ప్రమాణములు



పటము. 8.29

ఉదాహరణ 8.12

ఒక క్రమ వృత్తాకార స్థూపం వక్రతల వైశాల్యం 704 చ.సెం.మీ. మరియు ఎత్తు 8 సెం.మీ. అయిన స్థూపము ఘనపరిమాణం లీటర్లలో కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$)

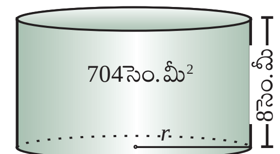
సాధన : r మరియు h లు వరుసగా క్రమ వృత్తాకార స్థూపము యొక్క వ్యాసార్ధము మరియు ఎత్తు అనుకొనుము.

ఇవ్వబడినది h = 8 సెం.మీ. మరియు CSA = 704 చ.సెం.మీ

వక్రతల వైశాల్యము = 704

$\Longrightarrow \quad 2\pi rh = 704$

$2 \times \frac{22}{7} \times r \times 8 = 704$



పటము. 8.30

$\therefore \qquad r = \dfrac{704 \times 7}{2 \times 22 \times 8} = 14$ సెం.మీ

స్థూపము ఘనపరిమాణము, $V = \pi r^2 h$

$= \dfrac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 8$

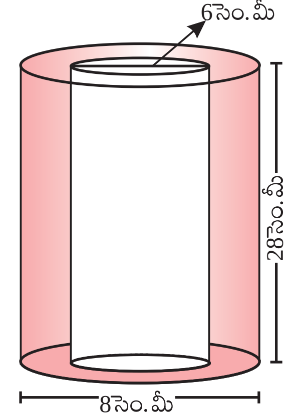
$= 4928$ ఘ. సెం.మీ

కావున, ఘనపరిమాణము $= 4.928$ లీటర్లు. (1000 ఘ. సెం.మీ = 1 లీటరు)

ఉదాహరణ 8.13

బోలు స్థూపాకారంగా వున్న ఒక ఇనుప గొట్టం పొడవు 28 సెం.మీ. దాని బయటి మరియు లోపలి వ్యాసములు వరుసగా 8 సెం.మీ. మరియు 6 సెం.మీ అయిన ఆ గొట్టం యొక్క ఘనపరిమాణము కనుగొనుము. 1 ఘ. సెం.మీ కు ఇనుము బరువు 7 గ్రాములు అయిన ఇనుప గొట్టం బరువును కనుగొనుము. ($\pi = \dfrac{22}{7}$)

సాధన : r, R మరియు h లను వరుసగా బోలు స్థూపాకార గొట్టం యొక్క లోపలి, వెలుపలి వ్యాసార్ధములు మరియు ఎత్తు అనుకొనుము.



పటము. 8.31

ఇవ్వబడినది $2r = 6$ సెం.మీ, $2R = 8$ సెం.మీ , $h = 28$ సెం.మీ

గొట్టం ఘనపరిమాణం, $V = \pi \times h \times (R + r)(R - r)$

$= \dfrac{22}{7} \times 28 \times (4 + 3)(4 - 3)$

$\therefore$ ఘనపరిమాణం, $V = 616$ ఘ. సెం.మీ

1 ఘ. సెం.మీ. లోహపు బరువు $= 7$ గ్రాములు

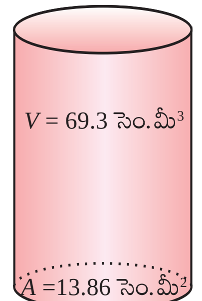
616 ఘ. సెం.మీ లోహపు బరువు $= 7 \times 616$ గ్రా

గొట్టం బరువు $= 4.312$ కిలో. గ్రా.

ఉదాహరణ 8.14

ఒక క్రమ వృత్తాకార ఘన స్థూపము భూ వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమాణములు వరుసగా 13.86 చ.సెం.మీ. మరియు 69.3 ఘ.సెం.మీ. అయిన దాని ఎత్తు మరియు వక్రతల వైశాల్యమును కనుగొనుము. ($\pi = \dfrac{22}{7}$)

సాధన : A మరియు V లు స్థూపము భూ వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమాణము అనుకొనుము.



పటము. 8.32

ఇవ్వబడిన భూ వైశాల్యం, $A = \pi r^2 = 13.86$ చ. సెం.మీ. మరియు

ఘనపరిమాణం , $V = \pi r^2 h = 69.3$ ఘ. సెం.మీ.

$\pi r^2 h = 69.3$

$\Longrightarrow \qquad 13.86 \times h = 69.3$

$\therefore \qquad h = \dfrac{69.3}{13.86} = 5$ సెం.మీ

భూ వైశాల్యం $= \pi r^2 = 13.86$

$$\frac{22}{7} \times r^2 = 13.86$$

$$r^2 = 13.86 \times \frac{7}{22} = 4.41$$

$\therefore$ $$r = \sqrt{4.41} = 2.1 \text{ సెం.మీ.}$$

వక్రతల వైశాల్యము, CSA $= 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 5$$

కావున, CSA $= 66$ చ.ప్రమాణములు

8.3.2 క్రమ వృత్తాకార శంఖువు ఘనపరిమాణము (Volume of a right circular cone)

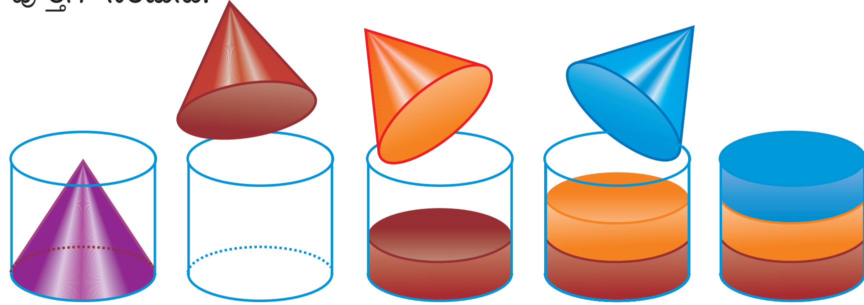
r మరియు h లు వరుసగా క్రమ వృత్తాకార శంఖువు భూ వ్యాసార్థము మరియు ఎత్తు అనుకొనుము.

శంఖువు ఘనపరిమాణమునకు ఇవ్వబడిన యొక్క సూత్రము: $V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$ ఘ.ప్రమాణములు

క్రింది కృత్యము ద్వారా ఈ సూత్రమును న్యాయపరుచుటను గమనింపుము.

కృత్యము

సమాన ఎత్తు మరియు సమాన వ్యాసార్థములతో బోలు స్థూపము మరియు బోలు శంఖువులను పటములో క్రింద చూపిన విధముగా తయారుచేయుము. క్రింద చూపించిన విధము ననుసరించి శంఖువు యొక్క ఘనపరిమాణమును ప్రయోగాత్మకంగా కనుగొనెదము. శంఖువును ఇసుక లేక ద్రవముతో నింపి దానిని స్థూపములోనికి పోయుము. ఈ విధంగా ప్రయోగము కొనసాగించినచో 3వ సారికి స్థూపము ఇసుక / ద్రవముతో పూర్తిగా నిండును.



పటము. 8.33

ఈ సులభ కృత్యము నుండి, r మరియు hలు స్థూపము యొక్క వ్యాసార్థము మరియు ఎత్తులు అయిన

3 (శంఖువు ఘనపరిమాణము) = స్థూపము ఘనపరిమాణము = $\pi r^2 h$

శంఖువు ఘనపరిమాణము = $\frac{1}{3} \times \pi r^2 h$ ఘ.ప్రమాణములు

ఉదాహరణ 8.15

ఒక ఘన శంఖువు ఘనపరిమాణము 4928 ఘ.సెం.మీ. దాని ఎత్తు 24 సెం.మీ. అయిన శంఖువు వ్యాసార్థము కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$)

సాధన : r, h మరియు v లు వరుసగా ఘన శంఖువు వ్యాసార్థము ఎత్తు మరియు ఘన పరిమాణము అనుకొనుము.

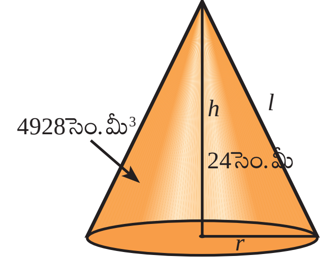
ఇవ్వబడినది $V =$ 4928 ఘ.సెం.మీ.మరియు $h = 24$ సెం.మీ.

కనుక, $\frac{1}{3}\pi r^2 h = 4928$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times r^2\times 24 = 4928$$

$$\Longrightarrow \quad r^2 = \frac{4928\times 3\times 7}{22\times 24} = 196.$$

కావున, శంఖువు భూ వ్యాసార్ధము, $r = \sqrt{196} = 14$ సెం.మీ.



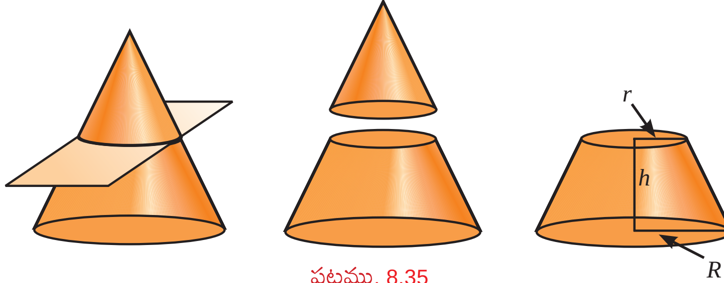
పటము. 8.34

8.3.3 శంఖుఖండము యొక్క ఘనపరిమాణము (Volume of a Frustum of a Cone)

క్రమ వృత్తాకార ఘన శంఖువును తీసుకొని దానిని రెండు ఘనములుగా ఒక పద్ధతిలో కత్తిరించిన ఒక చిన్న క్రమ వృత్తాకార శంఖువు ఏర్పడును. శంఖువు యొక్క మరొక భాగమును శంఖుఖండము (frustum) అందురు. దీనికి సంబంధించిన ఈ క్రింది కృత్యమును గమనించుము.

కృత్యము

కొంత బంకమట్టిని తీసుకొని దానితో ఒక క్రమ వృత్తాకార శంఖువును తయారుచేయుము. ఆధారమునకు సమాంతరముగా దానిని కత్తితో కత్తిరింపుము చిన్న శంఖువును తీసివేయుము. ఏమి మిగిలియున్నది? ఘన శంఖువు యొక్క మిగిలివున్న భాగమును శంఖుఖండము అని అందురు. లాటిన్ పదము (frustum) ఫ్రస్టమ్ అనగా "కత్తిరించిన ముక్క" అని అర్థం. మరియు దాని బహువచనము ఫ్రస్టా (frusta).



పటము. 8.35

కావున ఒక ఘన క్రమ వృత్తాకార శంఖువును కత్తిరించగా ఏర్పడు శంఖుఖండము యొక్క తల ము ఆధారమునకు సమాంతరముగా ఉండును. ఆధారమును కలిగియున్న శంఖువు యొక్క భాగమును శంఖుఖండము అందురు. శంఖుఖండమునకు రెండు వృత్తాకార చదునైన భాగములుండును. వాటిలో ఒకటి క్రింద మరొకటి పై భాగములో వుండును.

మనము ఇప్పుడు శంఖుఖండము ఘనపరిమాణమును కనుగొనెదము.

శంఖువు ఖండము ఘనపరిమాణము అనునది రెండు క్రమ వృత్తాకార శంఖువుల ఘనపరిమాణముల భేదమగును. ఒక ఘన క్రమ వృత్తాకార శంఖువు యొక్క శంఖుఖండమును పరిగణించుము. (పటము 3.5 చూడుము)

R అనునది ఇచ్చిన శంఖువు వ్యాసార్ధము r మరియు x అనునది చిన్న శంఖువు వ్యాసార్ధము మరి యు ఎత్తు అనుకొనుము. (ఇచ్చిన శంఖువు ఖండనము తరువాత ఏర్పడునది చిన్న శంఖువు అగును)

h అనునది శంఖుఖండము ఎత్తు అనుకొనుము.

శంఖుఖండము ఘనపరిమాణము } (V) = ఇచ్చిన శంఖువు ఘనపరిమాణము } - { చిన్న శంఖువు ఘనపరిమాణము

$$= \frac{1}{3}\times\pi\times R^2\times(x+h) - \frac{1}{3}\times\pi\times r^2\times x$$

కనుక, $V = \frac{1}{3}\pi[x(R^2 - r^2) + R^2h]$. (1)

పటం 8.36 నుండి $\Delta BFE \sim \Delta DGE$

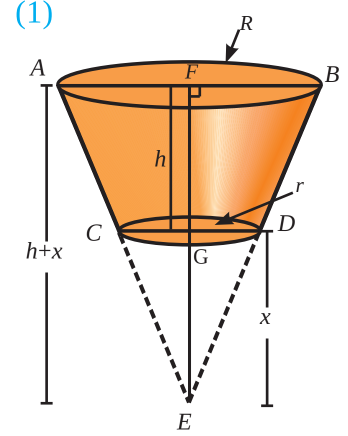
$$\therefore \quad \frac{BF}{DG} = \frac{FE}{GE}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{R}{r} = \frac{x+h}{x}$$

$$\Longrightarrow \quad Rx - rx = rh$$

$$\Longrightarrow \quad x(R - r) = rh$$

కనుక, $x = \frac{rh}{R-r}$ (2)



పటము. 8.36

(1) నుండి $\Longrightarrow \quad V = \frac{1}{3}\pi[x(R^2 - r^2) + R^2h]$

$\Longrightarrow \quad = \frac{1}{3}\pi[x(R-r)(R+r) + R^2h]$

$\Longrightarrow \quad = \frac{1}{3}\pi[rh(R+r) + R^2h]$ (2) ను ఉపయోగించగా,

కావున, శంఖుఖండము ఘనపరిమాణం, $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$ ఘన ప్రమాణములు.

గమనిక

* శంఖుఖండము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము $= \pi(R+r)l$ ఇక్కడ $l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$

* శంఖుఖండము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= \pi(R+r) + \pi R^2 + \pi r^2$ ఇక్కడ $l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$

* (పరీక్షా ఉద్దేశనమునకు కాదు)

ఉదాహరణ 8.16

శంఖు ఖండము రూపంలో గల బక్కెట్టు యొక్క రెండు వృత్తాకార వ్యాసార్థములు 15 సెం.మీ. మరియు 8 సెం.మీ. దాని లోతు 63 సెం.మీ. అయిన బక్కెట్టు సామర్థ్యమును లీటర్లలో కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$)

సాధన : R మరియు r లు, పై మరియు క్రింది వృత్తాకార భాగపు వ్యాసార్థములు అనుకొనుము. h బక్కెట్టు లోతు అనుకొనుము.

ఇవ్వబడినవి $R = 15$ సెం.మీ., $r = 8$ సెం.మీ. మరియు $h = 63$ సెం.మీ.



పటము. 8.37

బక్కెట్టు (శంఖుఖండము) ఘనపరిమాణము

$= \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 63 \times (15^2 + 8^2 + 15 \times 8)$

$= 26994$ ఘ.సెం.మీ

$= \frac{26994}{1000}$ లీటర్లు (1000 ఘ.సెం.మీ = 1 లీటరు)

కావున, బక్కెట్టు సామర్థ్యము= 26.994 లీటర్లు

8.3.4 గోళము ఘనపరిమాణము (Volume of a sphere)

(i) ఘనగోళము ఘనపరిమాణము (Volume of a Solid Sphere)

కృత్యము

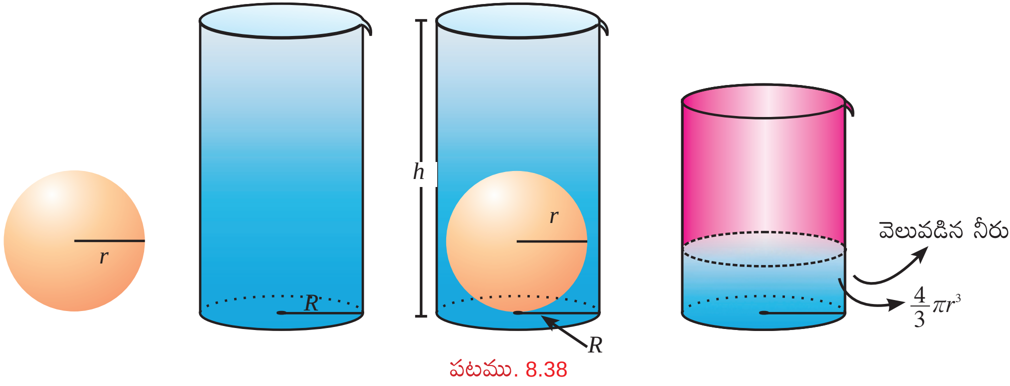
క్రింది చిన్న ప్రయోగము గోళము ఘనపరిమాణం సూత్రమును న్యాయపరుచును.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ ఘన ప్రమాణములు}$$

వ్యాసార్ధము R మరియు ఎత్తు h గా గల స్థూపాకారములో గల పాత్రను తీసుకొని దానిని నీటితో నింపుము. r వ్యాసార్ధము గల ఒక ఘన గోళమును అందులో ముంచుము. పాత్రలో $R > r$ గా ఉండవలెను మరియు బయటకు పొర్లిన నీటి ఘన పరిమాణమును కొలువుము. వెలువడిన నీరు ఘన గోళము ఘనపరిమాణమునకు సమానము.

కనుక, గోళము ఘనపరిమాణము,

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ ఘన ప్రమాణములు}$$



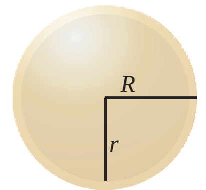
పటము. 8.38

(ii) బోలు గోళము ఘనపరిమాణము (Volume of a hollow sphere)

బోలు గోళము లోపలి మరియు వెలుపలి వ్యాసార్ధములు వరుసగా r మరియు R అయిన

$$\left.\begin{array}{c}\text{బోలు గోళము}\\ \text{ఘనపరిమాణము}\end{array}\right\} = \left.\begin{array}{c}\text{వెలుపలి గోళము}\\ \text{ఘనపరిమాణము}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c}\text{లోపలి గోళము}\\ \text{ఘనపరిమాణము}\end{array}\right.$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$



పటము. 8.39

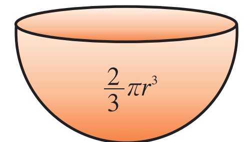
$\therefore$ బోలు గోళము ఘనపరిమాణము $= \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$ ఘన ప్రమాణములు

(iii) ఘన అర్ధగోళము ఘనపరిమాణము (Volume of a solid hemisphere)

ఘన అర్ధగోళము ఘనపరిమాణము $= \frac{1}{2} \times$ గోళము ఘనపరిమాణము

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 \text{ ఘన ప్రమాణములు}$$



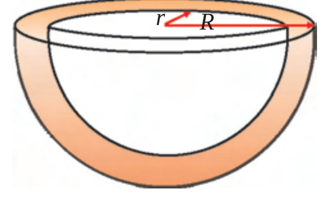
పటము. 8.40

(iv) బోలు అర్ధగోళము ఘనపరిమాణము (Volume of a hollow hemisphere)

$$\left.\begin{array}{c}\text{బోలు అర్ధ గోళము}\\ \text{ఘనపరిమాణము}\end{array}\right\} = \left.\begin{array}{c}\text{వెలుపలి అర్ధ గోళము}\\ \text{ఘనపరిమాణము}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c}\text{లోపలి అర్ధ గోళము}\\ \text{ఘనపరిమాణము}\end{array}\right.$$

$$= \frac{2}{3}\times\pi\times R^3 - \frac{2}{3}\times\pi\times r^3$$

$$= \frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$$ ఘన ప్రమాణములు.

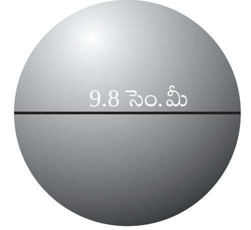


పటము. 8.41

ఉదాహరణ 8.17

గోళము ఆకారంలో గల లోహపు షాట్-పుట్ వ్యాసము 8.4 సెం.మీ. అయిన దాని ఘనపరిమాణము కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$)

సాధన : షాట్ - పుట్ వ్యాసార్ధము r అనుకొనుము.



పటము. 8.42

$2r = 8.4$ సెం.మీ. $\Longrightarrow$ $r = 4.2$ సెం.మీ.

షాట్ - పుట్ ఘనపరిమాణము, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times\frac{42}{10}\times\frac{42}{10}\times\frac{42}{10}$$

కనుక, షాట్ - పుట్ ఘనపరిమాణము $= 310.464$ ఘ.సెం.మీ.

ఉదాహరణ 8.18

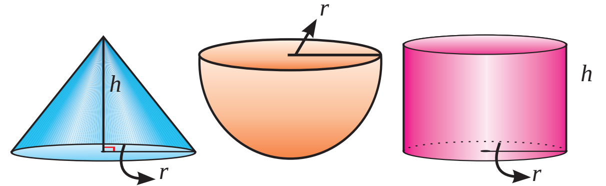
ఒక శంఖువు, ఒక అర్ధగోళము మరియు స్థూపము సమానమైన భూమిని కలిగివున్నవి వాటి వ్యాసార్ధములు సమానము మరియు శంఖువు, స్థూపముల ఎత్తులు సమానము. వాటి ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

సాధన :శంఖువు, అర్ధగోళము మరియు స్థూపముల ఉమ్మడి వ్యాసార్ధము r అని అనుకొనుము.

శంఖువు మరియు స్థూపముల ఉమ్మడి ఎత్తు h అనుకొనుము.

$r = h$ అని ఇవ్వబడినది.

శంఖువు, అర్ధగోళము, స్థూపముల ఘనపరిమాణములు వరుసగా v_1, v_2 మరియు v_3 అనుకొనుము.



పటము. 8.43

ఇపుడు, $V_1 : V_2 : V_3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h : \frac{2}{3}\pi r^3 : \pi r^2 h$

$\Longrightarrow$ $= \frac{1}{3}\pi r^3 : \frac{2}{3}\pi r^3 : \pi r^3$ (ఇక్కడ $r = h$)

$\Longrightarrow$ $V_1 : V_2 : V_3 = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} : 1$

కావున, కావలసిన ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తి = 1:2:3

ఉదాహరణ 8.19

గోళము ఘనపరిమాణము $7421\frac{1}{7}$ ఘనపు సెం.మీ. అయిన దాని వ్యాసార్ధము కనుగొనుము($\pi = \frac{22}{7}$)

సాధన: r మరియు V లు వరుసగా గోళము యొక్క వ్యాసార్ధము మరియు ఘనపరిమాణములు అనుకొనుము.

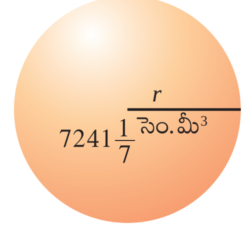
$$V = 7241\frac{1}{7} \text{ ఘనపు సెం.మీ}$$

$$\Longrightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{50688}{7}$$

$$\Longrightarrow \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times r^3 = \frac{50688}{7}$$

$$r^3 = \frac{50688}{7}\times\frac{3\times 7}{4\times 22}$$

$$= 1728 = 4^3\times 3^3$$



పటము. 8.44

కావున, గోళము వ్యాసార్ధము, $r = 12$ సెం.మీ.

ఉదాహరణ 8.20

బోలు గోళము ఘనపరిమాణము $\frac{11352}{7}$ cm^3. దాని వెలుపలి వ్యాసార్ధం 8 సెం.మీ. అయిన గోళము లోపలి వ్యాసార్ధము కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$)

సాధన: R మరియు r లు బోలు గోళము వెలుపలి మరియు లోపలి వ్యాసార్ధము అనుకొనుము.

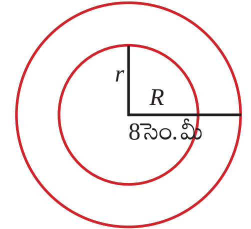
బోలు గోళము ఘనపరిమాణము V అనుకొనుము

$$\therefore \quad V = \frac{11352}{7} \text{ cm}^3$$

$$\Longrightarrow \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) = \frac{11352}{7}$$

$$\Longrightarrow \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}(8^3 - r^3) = \frac{11352}{7}$$

$$512 - r^3 = 387 \quad \Longrightarrow r^3 = 125 = 5^3$$



పటము. 8.45

కావున, లోపలి వ్యాసార్ధం , $r = 5$ సెం.మీ.

అభ్యాసము 8.2

1. స్థూపము వ్యాసార్ధము 14 సెం.మీ. మరియు ఎత్తు 30 సెం.మీ. అయిన స్థూపము ఘనపరిమాణము కనుగొనుము.

2. ఒక వైద్యశాలలో రోగులకు 7 సెం.మీ వ్యాసం గల ఒక స్థూపాకారపాత్రలో సూపు ప్రతిరోజు ఇవ్వబడును. పాత్రలో సూపు 4 సెం.మీ. ఎత్తు వరకు వుండిన, 250 మంది రోగులకు ఒక రోజుకు ఎంత పరిమాణంలో సూపు ఆ వైద్యశాలలో తయారగును?

3. ఒక క్రమ వృత్తాకార ఘన స్థూపము భూ వ్యాసార్ధము మరియు ఎత్తుల మొత్తము 37 సెం.మీ స్థూపము సంపూర్ణతల వైశాల్యము 1628 చ.సెం.మీ. అయిన స్థూపము ఘనపరిమాణము కనుగొనుము.

4. ఒక ఘన స్థూపము ఘనపరిమాణము 62.37 ఘనపు సెం.మీ. దాని ఎత్తు 4.5 సెం.మీ. అయిన దాని వ్యాసార్ధము కనుగొనుము.

5. రెండు క్రమ వృత్తాకార స్థూపముల వ్యాసార్ధముల నిష్పత్తి 2:3 మరియు ఎత్తుల నిష్పత్తి 5:3 అయిన వాటి ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

6. ఒక స్థూపము యొక్క వ్యాసార్ధము మరియు ఎత్తుల నిష్పత్తి 5:7 మరియు దాని ఘనపరిమాణం 4400 ఘనపు సెం.మీ. అయిన స్థూపము వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము.

7. ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార లోహపు రేకు కొలతలు 66 సెం.మీ. × 12 సెం.మీ. దానిని చుట్టగా 12 సెం. మీ. ఎత్తు గల స్థూపము ఏర్పడదినది. స్థూపం ఘనపరిమాణం కనుగొనుము.

8. ఒక లెడ్‌పెన్సిల్ క్రమ వృత్తాకారంలో నున్నది. పెన్సిలు 28 సెం.మీ. పొడవును మరియు 3 మి.మీ వ్యాసార్ధమును కలిగివున్నది. లెడ్ వ్యాసార్ధము 1 మి.మీ.అయిన పెన్సిల్‌కు కావలసిన కొయ్య ఘనపమాణమును కనుగొనుము.

9. శంఖువు యొక్క వ్యాసార్ధము మరియు వాలుటెత్తులు వరుసగా 20 సెం.మీ. మరియు 29 సెం.మీ. అయిన దాని ఘనపరిమాణము కనుగొనుము

10. కొయ్యతో చేయబడిన ఘన శంఖువు భూపరిధి 44 మీ మరియు ఎత్తు 12 మీ అయిన దాని ఘనపమాణమును కనుగొనుము.

11. ఒక పాత్ర శంఖుఖండము రూపములో నున్నది. దాని ఒక చివరి వ్యాసార్ధము మరియు ఎత్తులు వరుసగా 8 సెం.మీ. మరియు 14 సెం.మీ. దాని ఘనపరిమాణము $\frac{5676}{3}$ సెం.మీ^{3} అయిన, మరియొక చివర వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము.

12. శంఖుఖండము చివరల యొక్క చుట్టుకొలత కొలతలు 44 సెం.మీ. మరియు 8.4π. సెం.మీ. లోతు 14 సెం.మీ. అయిన దాని ఘనపరిమాణం కనుగొనుము.

13. $\triangle ABC$ లంబకోణత్రిభుజం భుజము 5 సెం.మీ.,12 సెం.మీ. మరియు 13 సెం.మీ. అయిన భుజము 12 సెం.మీ. ఆధారంగా త్రిభుజమును త్రిప్పిన ఒకఘనము ఏర్పడును. ఆ ఏర్పడిన ఘనము ఘనపరిమాణం కనుగొనుము.

14. ఒక క్రమ వృత్తాకార శంఖువు వ్యాసార్ధము మరియు ఎత్తుల నిష్పత్తి 2:3 దాని ఘనపరిమాణం 100.48 ఘ.సెం.మీ. అయిన వాలుటెత్తును కనుగొనుము. (π = 3.14గాతీసుకొనుము)

15. వృత్తాకార ఆధారము గల శంఖువు ఘనపరిమాణం 216π ఘ.సెం.మీ. భూ వ్యాసార్ధము 9 సెం.మీ అయిన శంఖువు ఎత్తును కనుగొనుము.

16. గోళాకార స్టీలు బాల్ బేరింగ్ ఒక దాని వ్యాసార్ధము 0.7 సెం.మీ. స్టీలు సాంద్రత 7.95 గ్రాము/సెం.మీ. అయిన 200 స్టీలు బాల్ బేరింగ్‌ల ద్రవ్యరాశిని కనుగొనుము. (ద్రవ్యరాశి = ఘనపరిమాణము × సాంద్రత)

17. బోలు గోళము యొక్క వెలుపలి మరియు లోపలి వాసార్ధములు వరుసగా 12 సెం.మీ. మరియు 10 సెం.మీ. అయిన ఘనపరిమాణము కనుగొనుము.

18. అర్ధగోళము ఘనపరిమాణము1152π ఘనపు సెం.మీ. దాని వక్రతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.

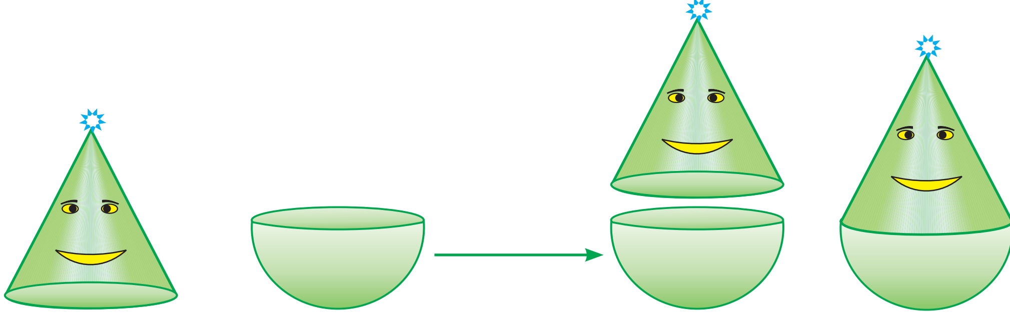
19. 14 సెం.మీ. భుజము గల ఒక ఘనము నుండి కత్తిరించిన అతి పెద్ద క్రమ వృత్తాకార శంఖువు ఘనపరిమాణము కనుగొనుము.

20. ఒక గోళాకార బెలూన్‌లోనికి గాలిని ఊదినపుడు దాని వ్యాసార్ధము 7 సెం.మీ. నుండి 14 సెం. మీ.లకు పెరిగినది. ఈ రెండు సందర్భములలోను బెలూన్ ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

8.4 సంయుక్త ఘనములు (Combination of Solids)

నిత్యజీవితంలో మనము బొమ్మలు, వాహనములు, పాత్రలు, పనిముట్లు మొదలగు వాటిని పరిశీలించుచున్నాము. అవి రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ సంయుక్త ఘనములుగా నుండును.

సంయుక్త ఘనముల ఉపరితల వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమాణములను ఏవిధంగా కనుగొనవలెను?



పటము. 8.46

సంయుక్త ఘనముల సంపూర్ణతల వైశాల్యము, అనునది ఉమ్మడిగా నున్న అన్ని ఘనముల సంపూర్ణతల వైశాల్యముల మొత్తమునకు సమానముగా ఉండనవసరం లేదు. పై పటం నుండి సంయుక్త ఘనముల సంపూర్ణతల వైశాల్యము అనునది అర్ధగోళము వక్రతల వైశాల్యము మరియు శంఖువు వక్రతల వైశాల్యము మొత్తమునకు సమానము. కాని ఒక సంయుక్త ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము, దానిలో గల అన్ని ఘనముల ఘనపరిమాణముల మొత్తమునకు సమానము. పై పటంనుండి,

ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము = అర్ధగోళము వక్రతల వైశాల్యమయ + శంఖువు వక్రతల వైశాల్యము

ఘనము యొక్క మొత్తము ఘనపరిమాణము = శంఖువు ఘనపరిమాణము + అర్ధగోళము ఘనపరిమాణము

ఉదాహరణ 8.21

ఒక ఘనపు కొయ్యబొమ్మ అర్ధగోళముపై శంఖువును బోర్లించునట్లుగా ఉన్నది. అర్ధగోళము వ్యాసార్ధము మరియు శంఖువు భూ వ్యాసార్ధము 3.5 సెం.మీ. బొమ్మ మొత్తము ఎత్తు 17.5 సెం.మీ. అయిన బొమ్మ తయారుచేయుటకు అవసరమగు కొయ్య ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$)

సాధన:

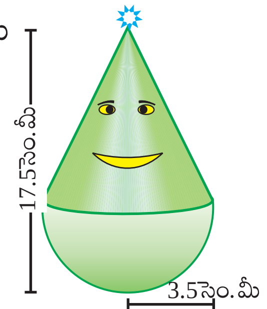
అర్ధగోళ భాగము	శంఖువు భాగము వ్యాసార్ధము
వ్యాసార్ధము, $r = 3.5$ సెం.మీ.	వ్యాసార్ధము, $r = 3.5$ సెం.మీ.
	ఎత్తు , $h = 17.5 - 3.5 = 14$ సెం.మీ.

కొయ్య ఘనపరిమాణము = అర్ధగోళము ఘనపరిమాణము + శంఖువు ఘనపరిమాణము

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{\pi r^2}{3}(2r + h)$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5 \times 3.5}{3} \times (2 \times 3.5 + 14) = 269.5$$

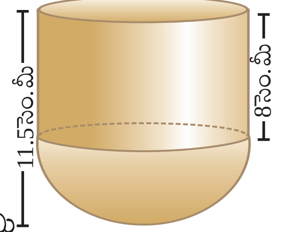


కావున, బొమ్మ చేయుటకు అవసరమగు కొయ్య ఘనపరిమాణము = 269.5 ఘ.సెం.మీ.

పటము. 8.47

ఉదాహరణ 8.22

ఒక కాఫీ కప్పు (cup) అర్ధగోళముపై స్థూపమును ఉంచినట్లుగా వున్నది. స్థూపం భాగపు ఎత్తు 8 సెం.మీ. మరియు కప్పు యొక్క మొత్తము ఎత్తు 11.5 సెం.మీ. అయిన కప్పు యొక్క మొత్తము ఉపరితల వైశాల్యమును కనుగొనుము. $(\pi = \frac{22}{7})$



పటము. 8.48

సాధన:

అర్ధగోళము భాగపు	స్థూపము భాగపు
వ్యాసార్ధము, r = మొత్తము ఎత్తు = 8	ఎత్తు, $h = 8$ సెం.మీ
$\Longrightarrow r = 11.5 - 8 = 3.5$ సెం.మీ	వ్యాసార్ధము, $r = 3.5$ సెం.మీ $= \frac{7}{2}$ సెం.మీ

కప్పు యొక్క మొత్తము ఉపరితల వైశాల్యము = అర్ధగోళము ఉపరితల వైశాల్యము CSA

+ స్థూపము భాగపు ఉపరితల వైశాల్యము CSA

$$= 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r+h)$$

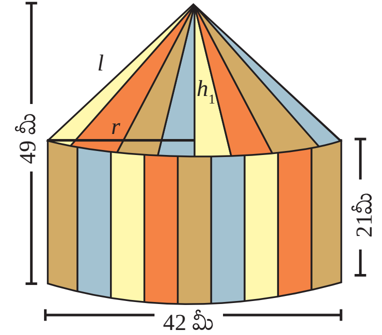
$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2}\left(\frac{7}{2} + 8\right)$$

$\therefore$ కప్పు యొక్క మొత్తము ఉపరితల వైశాల్యము = 253 చ.సెం.మీ.

ఉదాహరణ 8.23

ఒక సర్కస్ గుడారము, స్థూపముపై శంఖువు వున్నట్లుగా నిర్మించబడినది. గుడారము యొక్క మొత్తము ఎత్తు 49 మీ. భూ వ్యాసం 42 మీ. మరియు స్థూపము ఎత్తు 21 మీ. కాన్వాసు ధర రూ. 12.50 మీ^{2} అయిన గుడారము నిర్మించుటకు కావలసిన కాన్వాసు ధరను కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$ తీసుకొనుము)

సాధన:



పటము. 8.49

స్థూపము భాగపు	శంఖువు భాగపు
వ్యాసం, $2r = 42$ మీ.	వ్యాసార్ధము, $r = 21$ మీ.
వ్యాసార్ధము, $r = 21$ మీ.	ఎత్తు, $h_1 = 49 - 21 = 28$ మీ.
ఎత్తు , $h = 21$ మీ.	వాలుటెత్తు , $l = \sqrt{h_1^2 + r^2}$
	$= \sqrt{28^2 + 21^2}$
	$= 7\sqrt{4^2 + 3^2} = 35$ మీ.

కావలసిన కాన్వాసు మొత్తము వైశాల్యము = స్థూపము వక్రతల వైశాల్యము +శంఖువు వక్రతల వైశాల్యము

$$= 2\pi rh + \pi rl = \pi r(2h + l)$$

$$= \frac{22}{7} \times 21(2 \times 21 + 35) = 5082$$

$\therefore$ కాన్వాసు వైశాల్యము = 5082 మీ^{2}

కాన్వాసు ధర 1 చ.మీ. = ₹12.50

కావలసిన కాన్వాసు మొత్తము ధర = 5082×12.5 = ₹63525

ఉదాహరణ 8.24

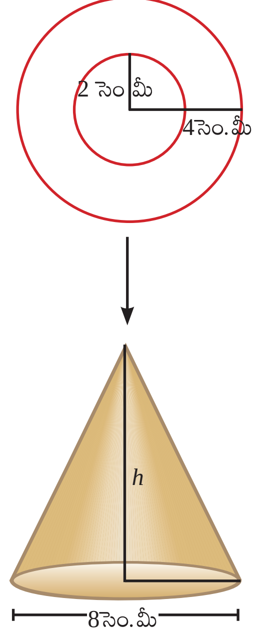
ఒక బోలు గోళము యొక్క బాహ్య మరియు అంతర వ్యాసములు వరుసగా 8 సెం.మీ. మరియు 4 సెం.మీ. గోళమును కరిగించి క్రమ వృత్తాకార శంఖువుగా మలిచిన దాని భూ వ్యాసము 8 సెం.మీ. అయిన శంఖువు ఎత్తును కనుగొనుము.

సాధన: బోలు గోళము బాహ్య మరియు అంతర వ్యాసార్ధములు వరుసగా R మరియు r అనుకొనుము.

శంఖువు ఎత్తు h అనుకొనుము.

బోలు గోళము

బాహ్యగోళము	అంతరగోళము	శంఖువు
$2R = 8$ సెం.మీ.	$2r = 4$ సెం.మీ.	$2r_1 = 8$
$\Longrightarrow R = 4$ సెం.మీ.	$\Longrightarrow r = 2$ సెం.మీ.	$\Longrightarrow r_1 = 4$



పటము. 8.50

బోలు గోళమును కరిగించి శంఖువుగా తయారుచేయబడినది.

శంఖువు ఘనపరిమాణము = బోలు గోళము ఘనపరిమాణము

$$\Longrightarrow \frac{1}{3}\pi r_1^2 h = \frac{4}{3}\pi[R^3 - r^3]$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{3}\times\pi\times 4^2\times h = \frac{4}{3}\times\pi\times(4^3 - 2^3)$$

$$\Longrightarrow h = \frac{64-8}{4} = 14$$

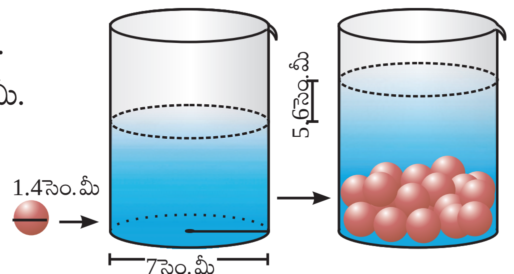
కావున, శంఖువు ఎత్తు $h = 14$ సెం.మీ.

ఉదాహరణ 8.25

గోళాకార రూపంలో గల గోళీల ఒకదాని వ్యాసము 1.4 సెం.మీ. అయిన వాటిని కొంత నీరు గల స్థూపాకారపు బీకరులో వేయుము. స్థూపాకారపు బీకరు వ్యాసము 7 సెం.మీ. అయిన నీటి మట్టం 5.6 సెం.మీ. పెరుగుటకు ఎన్ని గోళీలను బీకరులో వేయవలెను.

సాధన: కావలసిన గోళీల సంఖ్య n అనుకొనుము. గోళీ మరియు స్థూపాకార బీకరు వ్యాసార్ధములు వరుసగా r_1 మరియు r_2 అనుకొనుము.

గోళీలు	స్థూపాకారపు బీకరు
వ్యాసము $2r_1 = 1.4$ సెం.మీ.	వ్యాసము, $2r_2 = 7$ సెం.మీ.
వ్యాసార్ధము $r_1 = 0.7$ cm	వ్యాసార్ధము, $r_2 = \frac{7}{2}$ సెం.మీ.



పటము. 8.51

పెరిగిన నీటి మట్టం ఎత్తు h అనుకొనుము.

$h = 5.6$ సెం.మీ.

గోళీలను బీకరులో వేసిన తరువాత

పెరిగిన నీటి ఘనపరిమాణము = n గోళీల ఘనపరిమాణము

$$\Longrightarrow \pi r_2^2 h = n\times\frac{4}{3}\pi r_1^3$$

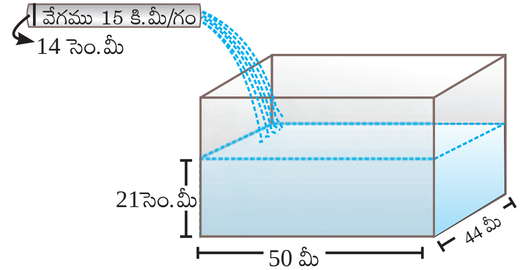
కావున, $n = \dfrac{3r_2^2 h}{4r_1^3}$

$$n = \frac{3 \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 5.6}{4 \times \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{7}{10}} = 150.$$

$\therefore$ కావలసిన గోళీల సంఖ్య = 150.

ఉదాహరణ 8.26

14 సెం.మీ. వ్యాసము గల స్థూపాకారపు గొట్టం ద్వారా నీరు 15 కి.మీ/గంట రేటుతో దీర్ఘచతురస్రాకార తొట్టి లోనికి ప్రవహించెను. దీర్ఘచతురస్రాకార తొట్టి పొడవు 50 మీ మరియు వెడల్పు 44 మీ. అయిన తొట్టిలోని నీటిమట్టం 21 సెం.మీ. పెరుగుటకు ఎన్ని గంటలు పట్టును. ($\pi = \frac{22}{7}$)



పటము. 8.52

సాధన: నీటి వేగము = 15 కి.మీ/గంట.

= 15000 మీ / గంట.

గొట్టం వ్యాసము, $2r$ = 14 సెం.మీ.

కావున, $r = \frac{7}{100}$ మీ.

పెరిగిన నీటి మట్టము h అనుకొనుము

కనుక, h = 21సెం.మీ. = $\frac{21}{100}$ మీ.

1 గంటలో విడుదల అయిన నీటి ఘనపరిమాణము

= గొట్టం అడ్డుకోత వైశాల్యం × కాలము × వేగము

(భూ వైశాల్యం)

$= \pi r^2 \times 1 \times 15000$

$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{100} \times \frac{7}{100} \times 15000$ ఘ.మీ.

తొట్టిలో కావలసిన పరిమాణములో నీటి ఘనపరిమాణము,

$$lbh = 50 \times 44 \times \frac{21}{100}$$

కావలసన పరిమాణములో నీటిని పొందుటకు T గంటలు అవసరమగును

$\therefore$ T గంటలలో విడుదల అయిన నీటి ఘనపరిమాణము = తొట్టిలో కావలసిన నీటి ఘనపరిమాణము

$$\Longrightarrow \quad \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{100}\right)^2 \times T \times 15000 = 50 \times 44 \times \frac{21}{100}$$

T = 2 గంటలు

కావున, కావలసిన నీటి మట్టం పెరుగుటకు 2 గంటల సమయం పట్టును.

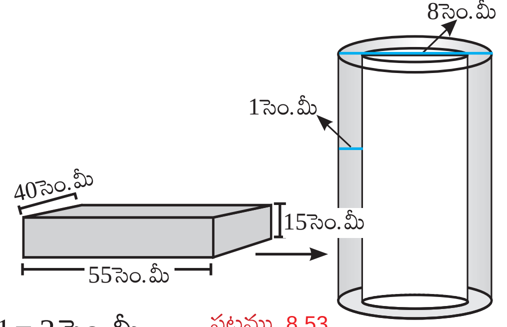
ఉదాహరణ 8.27

55 సెం.మీ. × 40 సెం.మీ. × 15 సెం.మీ. కొలతలు గల ఒక ఘన ఇనుప పలకను కరిగించి ఒక గొట్టంను తయారుచేసెను. గొట్టం వెలుపలి వ్యాసము మరియు మందము వరుసగా 8 సెం.మీ. మరియు 1 సెం.మీ అయిన గొట్టం పొడవును కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$)

సాధన: గొట్టం పొడవు h_1 అనుకొనుము.

R మరియు r లు గొట్టం యొక్క వెలుపలి మరియు లోపలి వ్యాసార్థములు అనుకొనుము.

ఇనుప పలక కొలతలు $lbh = 55\times40\times15.$



పటము. 8.53

ఇనుప గొట్టం కొలతలు:

వెలుపలి వ్యాసము, $2R = 8$ సెం.మీ.

$\therefore$ వెలుపలి వ్యాసార్థము, $R = 4$ సెం.మీ.

మందము, $w = 1$ సెం.మీ.

$\therefore$ లోపలి వ్యాసార్థము , $r = R - w = 4 - 1 = 3$ సెం.మీ.

ఇనుప గొట్టం ఘనపరిమాణము = ఇనుప పలక ఘనపరిమాణం

$$\Longrightarrow \quad \pi h_1 (R + r)(R - r) = lbh$$

$$\frac{22}{7} \times h_1 (4 + 3)(4 - 3) = 55 \times 40 \times 15$$

కావున, గొట్టం పొడవు, $h_1 = 1500$ సెం.మీ. = 15 మీ.

అభ్యాసము 8.3

1. ఒక బొంగరము అర్ధగోళముపై శంఖువును బోర్లించినట్లుగా ఉన్నది. అర్ధగోళము వ్యాసము 3.6 సెం.మీ. బొంగరము మొత్తము ఎత్తు 4.2 సెం.మీ. అయిన దాని మొత్తము ఉపరితల వైశాల్యము కనుగొనుము.
2. ఒక ఘనము, అర్ధగోళముపై స్థూపమును బోర్లించినట్లున్నది. ఆ ఘనము యొక్క వ్యాసము మరియు ఎత్తులు వరుసగా 21 సెం.మీ., 25.5 సెం.మీ. అయిన దాని ఘనపరిమాణము కనుగొనుము.
3. ఒక మాత్ర స్థూపాకారముగా వుండి, దాని రెండు చివరలు అర్ధగోళ రూపములో గలదు. మాత్ర మొత్తము పొడవు 14 మి.మీ. మరియు మాత్ర వ్యాసము 5 మి.మీ. అయిన దాని ఉపరితల వైశాల్యము కనుగొనుము.
4. ఒక గుడారము క్రమ వృత్తాకార స్థూపముపై శంఖువు బోర్లించినట్లున్నది. దాని మొత్తము ఎత్తు మరియు భూ వ్యాసములు వరుసగా 13.5 మీ అయిన 28 మీ. స్థూపాకారపు భాగపు ఎత్తు 3 మీ. అయిన గుడారము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.
5. ఒక విద్యార్థి బంక మట్టిని ఉపయోగించి 48 సెం.మీ. ఎత్తు మరియు 12 సెం.మీ. భూ వ్యాసార్థం గల ఒక క్రమ వృత్తాకార శంఖువును తయారుచేసెను. మరియొక విద్యార్థి దానిని గోళముగా మార్చెను. అయిన గోళము వ్యాసార్థము కనుగొనుము.
6. ఒక ఘన గోళము వ్యాసార్థము 24 సెం.మీ. గోళమును కరిగించి పొడవైన తీగగా మలిచిన తీగ వ్యాసార్థము 1.2 మి.మీ. అయిన తీగ పొడవును కనుగొనుము.

7. ఒక క్రమ వృత్తాకార శంఖువు పాత్ర లోపలి వ్యాసార్ధం 5 సెం.మీ. పాత్రలో 24 సెం.మీ. ఎత్తు వరకు నీరు కలదు. ఆ నీటిని స్థూపాకార పాత్రలోనికి మార్చగా దాని లోపలి వ్యాసార్ధం 10 సెం.మీ. అయిన స్థూపాకార పాత్రలోని నీటి మట్టం ఎత్తును కనుగొనుము.

8. 6 సెం.మీ. వ్యాసము గల ఒక ఘన గోళమును 12 సెం.మీ. వ్యాసము గల ఒక క్రమ వృత్తాకార స్థూపాకార పాత్రలోనికి వేయబడినది. స్థూపాకార పాత్రలో కొంత భాగము వరకు నీరు కలదు. గోళము నీటిలో పూర్తిగా మునుగుటకు స్థూపాకార పాత్రలో నీటి మట్టం ఎంత పెరగవలెను?

9. 7 సెం.మీ. లోపలి వ్యాసార్ధము గల ఒక స్థూపాకార గొట్టం ద్వారా నీరు 5 సెం.మీ/సె రేటు ప్రకారం ప్రవహించిన అర్ధగంటలో గొట్టం ద్వారా వెలువడిన నీటి ఘనపరిమాణం లీటర్లలో కనుగొనుము.

10. 4 మీ. వ్యాసం మరియు 10 మీ. ఎత్తు గల స్థూపాకార తొట్టి నుండి 10 సెం.మీ. వ్యాసం మరియు 2.5 కి.మీ/గంట చొప్పున నీరు ఒక స్థూపకార గొట్టం ద్వారా వెలువడుచున్నది. తొట్టిలోని నీరు సగం వరకు ఖాళీ అగుటకు ఎంత సమయం పట్టును. ప్రారంభంలో తొట్టి నిండా నీరు కలదని ఊహించుకొనుము.

11. 18 సెం.మీ. వ్యాసార్ధం గల ఒక ఘన గోళాకార వస్తువును కరిగించి మూడు ఘన గోళాకార గోళములను వేరు వేరు పరిమాణములలో తయారుచేసిరి. అందులో రెండు గోళముల వ్యాసార్ధములు 2 సెం.మీ. మరియు 12 సెం.మీ. అయిన మూడవ గోళము వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము.

12. ఒక బోలు స్థూపాకార గొట్టం పొడవు 40 సెం.మీ. దాని లోపలి మరియు బాహ్య వ్యాసార్ధములు వరుసగా 4 సెం.మీ. మరియు 12 సెం.మీ. దానిని కరిగించి ఘన స్థూపముగా మలిచిన దాని పొడవు 20 సెం.మీ. అయిన ఏర్పడిన ఘన స్థూపము వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము.

13. ఒక క్రమ వృత్తాకార ఇనుప శంఖువు వ్యాసం 8 సెం.మీ. మరియు ఎత్తు 12 సెం.మీ. అయిన దానిని కరిగించి 4 మి.మీ. వ్యాసార్ధం గల గోళాకార సీసపు గుండ్లుగా తయారుచేసిన ఎన్ని సీసపు గుండ్లను తయారు చేయవచ్చును?

14. 12 సెం.మీ. వ్యాసం మరియు 15 సెం.మీ ఎత్తుగల ఒక క్రమ వృత్తాకార స్థూపము నిండుగా ఐస్‌క్రీం కలదు. ఈ ఐస్‌క్రీం అంతటిని 12 సెం.మీ. ఎత్తు మరియు 6 సెం.మీ. వ్యాసము గల శంఖువు పై భాగములో అర్ధగోళాకారం వచ్చునట్లు నింపవలయును. ఐస్‌క్రీం అంతటిని నింపుటకు ఎన్ని శంఖువులు కావలయును.

15. పొడవు 4.4 మీ. మరియు వెడల్పు 2 మీ. కలిగిన దీర్ఘ చతురస్రాకారపు ఒక పాత్రలోనికి వర్షపు నీరు సేకరించబడినది. ఆ పాత్రలో నీటిమట్టం ఎత్తు 4 సెం.మీ. మరియు ఆ నీటిని 40 సెం.మీ. వ్యాసార్ధం గల స్థూపాకారపు పాత్రలోనికి బదిలీ చేయబడినది. అయిన స్థూపాకార పాత్రలో గల నీటిమట్టం ఎత్తును కనుగొనుము.

16. 32 సెం.మీ. ఎత్తు మరియు 18 సెం.మీ. వ్యాసార్ధము గల ఒక స్థూపాకారపు బక్కెట్టు నిండుగా ఇసుక కలదు. ఇసుకను క్రింద కుమ్మరించగా అది శంఖాకారపు కుప్ప వలె ఏర్పడెను. శంఖాకార కుప్ప ఎత్తు 24 సెం.మీ. అయిన కుప్ప యొక్క వాలుటెత్తు మరియు వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము.

17. 20 మీ. లోతు మరియు 14 మీ .వ్యాసము గల ఒక స్థూపాకారపు బావి త్రవ్వబడెను. త్రవ్వగా విసిరి వేయబడిన మట్టి ఒక ఘనాకారపు తిన్నెను ఏర్పరిచిన దాని ఆధారపు కొలతలు 20 మీ × 14 మీ అయిన తిన్నె ఎత్తును కనుగొనుము.

అభ్యాసము 8.4

సరైన జవాబును ఎన్నుకొనుము.

1. వ్యాసార్ధము 1 సెం.మీ. మరియు ఎత్తు 1 సెం.మీ. గల ఒక క్రమ వృత్తాకార స్థూపము వక్రతల వైశాల్యము.

   (A) π సెం.మీ^{2} (B) 2π సెం.మీ^{2} (C) 3π సెం.మీ^{3} (D) 2 సెం.మీ^{2}

2. ఒక క్రమ వృత్తాకార ఘన స్థూపము వ్యాసార్ధం దాని ఎత్తులో సగముండును. అయిన దాని సంపూర్ణతల వైశాల్యము.

   (A) $\frac{3}{2}\pi h$ చ.యూనిట్లు (B) $\frac{2}{3}\pi h^2$ చ.యూనిట్లు (C) $\frac{3}{2}\pi h^2$ చ.యూనిట్లు (D) $\frac{2}{3}\pi h$ చ.యూనిట్లు

3. ఒక క్రమ వృత్తాకార స్థూపము భూ వైశాల్యము 80 సెం.మీ^{2} దాని ఎత్తు 5 సెం.మీ. అయిన దాని ఘనపరిమాణము.

   (A) 400 సెం.మీ^{3} (B) 16 సెం.మీ^{3} (C) 200 సెం.మీ^{3} (D) $\frac{400}{3}$ సెం.మీ^{3}

4. ఒక ఘన వృత్తాకార స్థూపము సంపూర్ణ తల వైశాల్యము 200π సెం.మీ^{2} మరియు వ్యాసార్ధము 5 సెం.మీ. అయిన దాని ఎత్తు మరియు వ్యాసార్ధముల మొత్తము.

   (A) 20 సెం.మీ. (B) 25 సెం.మీ. (C) 30 సెం.మీ. (D) 15 సెం.మీ.

5. ఒక క్రమ వృత్తాకార స్థూపము వ్యాసార్ధము a యూనిట్లు మరియు ఎత్తు b యూనిట్లు అయిన దాని వక్రతల వైశాల్యము.

   (A) $\pi a^2 b$ చ.సెం.మీ. (B) $2\pi ab$ చ.సెం.మీ. (C) 2π చ.సెం.మీ. (D) 2 చ.సెం.మీ.

6. క్రమ వృత్తాకార శంఖువు మరియు స్థూపముల వ్యాసార్ధము మరియు ఎత్తులు సమానము. స్థూపం ఘనపరిమాణము 120 సెం.మీ^{3}. అయిన శంఖువు ఘనపరిమాణం

   (A) 1200 సెం.మీ^{3} B) 360 సెం.మీ^{3} (C) 40 సెం.మీ^{3} (D) 90 సెం.మీ^{3}

7. ఒక క్రమ వృత్తాకార శంఖువు వ్యాసము మరియు ఎత్తులు వరుసగా 12 సెం.మీ. మరియు 8 సెం. మీ. అయిన దాని వాలుటెత్తు

   (A) 10 సెం.మీ. (B) 20 సెం.మీ. (C) 30 సెం.మీ. (D) 96 సెం.మీ.

8. ఒక క్రమ వృత్తాకార శంఖువు యొక్క భూ పరిధి మరియు వాలుటెత్తులు వరుసగా 120π సెం.మీ. మరియు 10 సెం.మీ. అయిన శంఖువు వక్రతల వైశాల్యము

   (A) 1200π సెం.మీ^{2} (B) 600π సెం.మీ^{2} (C) 300π సెం.మీ^{2} (D) 600 సెం.మీ^{2}

9. ఒక క్రమ వృత్తాకార శంఖువు ఘనపరిమాణము మరియు భూ వైశాల్యములు వరుసగా 48π సెం.మీ^{3} మరియు 12π సెం.మీ^{3} అయిన శంఖువు ఎత్తు

   (A) 6 సెం.మీ. (B) 8 సెం.మీ. (C) 10 సెం.మీ. (D) 12 సెం.మీ.

10. ఒక క్రమ వృత్తాకార శంఖువు ఎత్తు మరియు భూ వైశాల్యములు వరుసగా 5 సెం.మీ. మరియు 48 చ.సెం.మీ. అయిన శంఖువు ఘనపరిమాణము

    (A) 240 సెం.మీ^{3} (B) 120 సెం.మీ^{3} (C) 80 సెం.మీ^{3} (D) 480 సెం.మీ^{3}

11. రెండు స్థూపముల ఎత్తులు మరియు వ్యాసార్థముల నిష్పత్తి క్రమములు 1:2 మరియు 2:1 అయిన వాటి ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తి

(A) 4 : 1 (B) 1 : 4 (C) 2 : 1 (D) 1 : 2

12. గోళము వ్యాసార్థము 2 సెం.మీ. అయిన దాని వక్రతల వైశాల్యము

(A) 8π సెం.మీ^{2} (B) 16 సెం.మీ^{2} (C) 12π సెం.మీ^{2} (D) 16π సెం.మీ^{2} .

13. ఒక ఘన అర్ధగోళము వ్యాసము 2 సెం.మీ. అయిన దాని సంపూర్ణతల వైశాల్యము

(A) 12 సెం.మీ^{2} (B) 12π సెం.మీ^{2} (C) 4π సెం.మీ^{2} (D) 3π సెం.మీ^{2}.

14. గోళము ఘనపరిమాణము $\frac{9}{16}\pi$ ఘ.సెం.మీ. అయిన దాని వ్యాసార్థము

(A) $\frac{4}{3}$ సెం.మీ. (B) $\frac{3}{4}$ సెం.మీ. (C) $\frac{3}{2}$ సెం.మీ. (D) $\frac{2}{3}$ సెం.మీ.

15. రెండు గోళముల ఉపరితల వైశాల్యముల నిష్పత్తి 9:25 అయిన వాటి ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తి

(A) 81 : 625 (B) 729 : 15625 (C) 27 : 75 (D) 27 : 125.

16. ఒక ఘన అర్ధగోళము వ్యాసార్థము a యూనిట్లు అయిన దాని సంపూర్ణతల వైశాల్యము

(A) $2\pi a^2$ చ.యూనిట్లు (B) $3\pi a^2$ చ.యూనిట్లు (C) $3\pi a$ చ.యూనిట్లు

(D) $3a^2$ చ.యూనిట్లు.

17. గోళము ఉపరితల వైశాల్యము 100π సెం.మీ^{2}, అయిన దాని వ్యాసార్థము

(A) 25 సెం.మీ (B) 100 సెం.మీ (C) 5 సెం.మీ (D) 10 సెం.మీ.

18. గోళము ఉపరితల వైశాల్యము36π సెం.మీ^{2}, అయిన గోళము ఘనపరిమాణము

(A) 12π సెం.మీ^{3} (B) 36π సెం.మీ^{3} (C) 72π సెం.మీ^{3} (D) 108π సెం.మీ^{3}

19. ఒక ఘన అర్ధగోళము సంపూర్ణతల వైశాల్యము 12π సెం.మీ^{2} అయిన దాని వక్రతల వైశాల్యము

(A) 6π సెం.మీ^{2} (B) 24π సెం.మీ^{2} (C) 36π సెం.మీ^{2} (D) 8π సెం.మీ^{2}

20. ఒక గోళము వ్యాసార్థము ఇంకొక గోళము వ్యాసార్థములో సగము అయిన వాటి ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తి

(A) 1 : 8 (B) 2: 1 (C) 1 : 2 (D) 8 : 1

21. ఒక ఘన గోళము వక్రతల వైశాల్యము 24 సెం.మీ^{2} గోళమును రెండు అర్ధగోళములుగా విభజించిన, దానిలో ఒక అర్ధగోళము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము.

(A) 12 సెం.మీ^{2} (B) 8 సెం.మీ^{2} (C) 16 సెం.మీ^{2} (D) 18 సెం.మీ^{2}

22. రెండు క్రమ వృత్తాకార శంఖువుల వ్యాసార్థాలు సమానము. వాటి వాలుటెత్తు ల నిష్పత్తి 4:3 అయిన వాటి వక్రతల వైశాల్యముల నిష్పత్తి

(A) 16 : 9 (B) 8 : 6 (C) 4 : 3 (D) 3 : 4

మీకు తెలుసా?

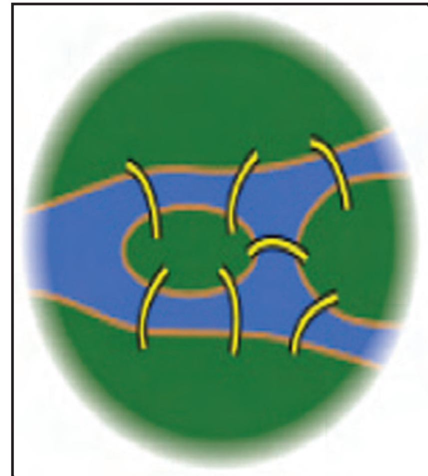
కోనింగ్స్ బర్గ్ యొక్క ఏడు వంతెనలు (The Seven Bridges of Konigsberg) అనునది గణితశాస్త్రములో ఒక చారిత్రాత్మక సమస్యగా ఉన్నది. ప్రష్యాలో (Prussia) ఉన్నటువంటి కోనింగ్స్ బర్గ్ నగరం అనునది ప్రెగల్ నదికి (Pregal River) ఇరువైపుల అమరియున్నది. మరియు పెద్ద దీవులు రెండూ ఒకదానికొకటి కలిసినట్లు మరియు భూభాగము ఏడు వంతెనలతో కలుపబడినట్లుగా ఉండును.

ఒకే ఒకసారి మాత్రమే వంతెనను దాటుట ద్వారా నగరంలో అన్ని ప్రదేశములకు వెళ్ళుటకు మర్గముము తెలుసుకొనుట ఒక సమస్యగా నున్నది. వంతెనల ద్వారా కాకుండా దీవులను చేరుకొనుటకు ఏ మార్గము లేదు. మరియు ప్రతిసారి ప్రతి ఒక్క వంతెనను పూర్తిగా దాటుటకు(ఒకరు వంతెనలో సగం దూరం నడిచి వెళ్ళిన తరువాత వేరే మార్గములో మిగిలిన సగము దూరమును దాటుటకు) వీలుకాదు.

1735 లో లియోనార్డ్ యూలర్ ఈ సమస్యకు పరిష్కారము లేదు అని నిరూపించాడు. ఈ సాధనలో యూలర్ ఉపయోగించిన వ్యతిరేక తీర్మానముల ద్వారా రేఖాచిత్రముల సిద్ధాంతముల (Graph Theory) పునాదిని మరియు సంస్థితి శాస్త్రము (Topology) ముందుచూపు భావనను ఏర్పరచెను.







ముఖ్యాంశములు

వ. సం	పేరు	పటము	పార్శ్వతల (లేక) వక్రతల వైశాల్యము (చ.యూనిట్లు)	సంపూర్ణతల వైశాల్యము (చ.యూనిట్లు)	ఘనపరిమాణము (ఘ. యూనిట్లు)
1	క్రమ వృత్తాకార స్థూపము		$2\pi rh$	$2\pi r(h+r)$	$\pi r^2 h$
2	క్రమ వృత్తాకార బోలు స్థూపము		$2\pi h(R+r)$	$2\pi(R+r)(R \quad r+h)$	$\pi R^2 h \quad \pi r^2 h$ $\pi h(R^2 \quad r^2)$ $\pi h(R+r)(R \quad r)$
3	క్రమ వృత్తాకార శంఖువు		πrl	$\pi r(l+r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
4	శంఖు ఖండము		- - - - - - - -	- - - - - - - - - - - - - - - -	$\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr)$
5	గోళము		$4\pi r^2$	- - -	$\frac{4}{3}\pi r^3$
6	బోలు గోళము		- - -	- - -	$\frac{4}{3}\pi(R^3 \quad r^3)$
7	అర్ధ గోళము		$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3}\pi r^3$
8	బోలు అర్ధ గోళము		$2\pi(R^2+r^2)$	$2\pi(R^2+r^2)+\pi(R^2 \quad r^2)$ $=\pi(3R^2+r^2)$	$\frac{2}{3}\pi(R^3 \quad r^3)$
9	శంఖువు $l \quad \sqrt{h^2+r^2}$ $h \quad \sqrt{l^2 \quad r^2}$ $r \quad \sqrt{l^2 \quad h^2}$ శంఖువు వక్రతల వైశాల్యము = చాప వైశాల్యము $\pi rl \quad = \frac{\theta}{360}\times \pi r^2$ చాపము పొడవు = శంఖువు భూపరిధి			10. గొట్టం ద్వారా వెలుపలికి పోవు ప్రవాహ ఘనపరిమాణము = {అడ్డుకోత వైశాల్యము × వేగము × కాలము} 11. తిరిగి పొందుటలో కొత్త ఘనముల సంఖ్య = $\frac{\text{కరిగించిన ఘనము ఘనపరిమాణము}}{\text{ఏర్పడిన ఒక ఘనము ఘనపరిమాణము}}$		
12	మార్పుట	1 మీ^{3} = 1000 లీటర్లు , 1 డెస్సి.మీ^{3} = 1 లీటరు , 1000 cm^3 = లీటరు , 1000 లీటర్లు = 1 కి.లీ			

9

ప్రయోగాత్మక రేఖాగణితము

- పరిచయం
- స్పర్శరేఖలు
- త్రిభుజములు
- చక్రీయ చతుర్భుజములు



బ్రహ్మగుప్త
(598-668 AD)
ప్రాచీన భారతదేశ గొప్ప శాస్త్రవేత్త
భారతదేశము

బ్రహ్మగుప్త "బ్రహ్మస్ఫుత సిద్ధాంత" అను పుస్తకమును వ్రాసెను. చక్రీయ చతుర్భుజం సూత్రము అతనికి రేఖాగణితంలో ఎక్కువ ప్రసిద్ధికెక్కిన ఫలితంను ఏర్పరిచినది.

చక్రీయ చతుర్భుజం భుజముల పొడవు p, q, r, s లను ఇచ్చిన, అతను రమారమి మరియు ఖచ్చితవైశాల్యం కొరకు సూత్రంను ఇచ్చెను.

రమారమి వైశాల్యం $\left(\frac{p+r}{2}\right)\left(\frac{q+s}{2}\right)$.

ఖచ్చిత వైశాల్యం

$$\sqrt{(t-p)(t-q)(t-r)(t-s)}$$

ఇక్కడ $2t = p+q+r+s$.

"Give me a place to stand, and I shall move the earth"
-Archimedes

9.1 పరిచయం

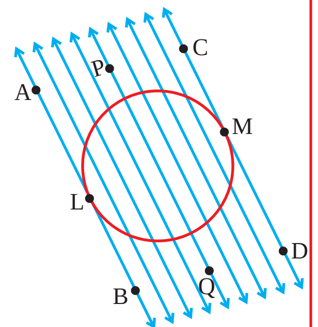
రేఖాగణితము ఈజిప్టులో క్రీ.పూ. 3000 సంవత్సరములకు ముందు ఆవిర్భవించింది. దీనిని ఎక్కువగా భూమిని కొలుచుటకు ఉపయోగించుచుండిరి. ప్రారంభమున రేఖాగణితము పొడవు, కోణము, వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమాణముకు సంబంధించిన సూత్రములను కనుగొని, వాటిని సర్వే నిర్మాణము, ఖగోళము మరియు వేర్వేరు వృత్తుల ను అభివృద్ధి చేయుటకు అవసరమయినది.

ఆధునికంగా కొన్ని నవీన ప్రయత్నములతో సవరణ చేసిన పాఠ్య ప్రణాళికలైన బీజగణితము, విశ్లేషణము మొదలగు వాటి కన్నా రేఖాగణితమును తక్కువ విలువైనదిగా పరిగణించబడెను. కాని అనేక మంది గణిత శాస్త్రవేత్తలు ఈ సవరణతో బలముగా విభేదించినారు. గణితశాస్త్రములోని ఇతర శాఖల గణిత భావములను సులభముగా గ్రహించుటకు రేఖాగణితము సహాయపడును. ఈ అధ్యాయంలో వృత్తములకు స్పర్శరేఖలను గీయుట, త్రిభుజములు మరియు చక్రీయ చతుర్భుజములను ఇచ్చిన కొలతలతో నిర్మించుటను నేర్చుకొనెదరు.

9వ తరగతిలో వృత్తమునకు సంబంధించిన జ్యా, వృత్తఖండము, చాపము మొదలగు పదముల గురించి చదివియున్నాము. ఇపుడు క్రింది కృత్యముల ద్వారా వృత్తమునకు ఖండనరేఖలు, స్పర్శరేఖలు గురించి జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొనుము.

కృత్యము 1

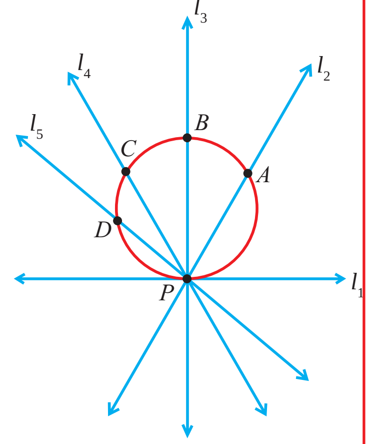
ఒక కాగితంను తీసుకొని ఏదైనా వ్యాసార్ధంతో ఒక వృత్తమును నిర్మించుము. వృత్తముపై ఖండనరేఖ PQ ను గీయుము. PQ కు ఇరువైపుల వీలైనన్ని ఖండనరేఖల ను PQ కు సమాంతరంగా గీయుము. ఖండనరేఖల స్పర్శబిందువులు ఇరువైపుల



దగ్గరదగ్గరగా వుండుటను గమనింపుము. ఒక దశలో ఇరువైపుల ఒక బిందువు వద్ద మాత్రము వృత్తమును స్పర్శించుచున్నదని గమనింపుము. PQ కు సమాంతరంగా వున్న ఖండనరేఖలలో, ఖండనరేఖలు AB, CD లు వృత్తమును ఒకే బిందువు వద్ద తాకును. AB, CD రేఖలు, వృత్తమును క్రమముగా L, M ల వద్ద గల **స్పర్శరేఖలు** అందురు. AB అనునది CD కి సమాంతరము అని గమనింపుము.

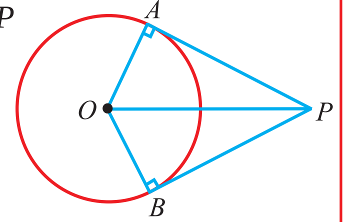
కృత్యము 1

ఒక వృత్తమును గీచి, వృత్తముపై ఏదేని ఒక బిందువు P ని తీసుకొనుము. పటములో చూపిన విధంగా బిందువు P గుండా వీలైనన్ని రేఖలను గీయుము. P గుండా పోవు రేఖలు వృత్తముపై రెండు బిందువుల వద్ద తాకును. సరళరేఖలు l_2, l_3, l_4, l_5 వృత్తమును వరుసగా A, B, C మరియు D ల వద్ద కలియును. l_2, l_3, l_4, l_5 రేఖలు వృత్తమునకు ఖండన రేఖలు. l_1 రేఖ వృత్తమును ఖచ్చితంగా ఒక బిందువు P వద్ద కలియును. ఇపుడు రేఖ l_1 ను వృత్తమునకు P వద్ద **స్పర్శరేఖ** అని అందురు.



వృత్తములో స్పర్శబిందువుకు గీయబడిన వ్యాసార్థము ఆ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖకు లంబంగా వుండును.

బాహ్యబిందువు P నుండి వృత్తమునకు A వద్ద గీయబడు స్పర్శరేఖను AP అనుకొనుము.



లంబకోణ ΔOPA నుండి, $OA \perp AP$

$$OP^2 = OA^2 + AP^2 \quad \text{[పైథాగరస్ సిద్ధాంతం]}$$

$$AP = \sqrt{OP^2 - OA^2}.$$

9.2 వృత్తమునకు స్పర్శరేఖలు నిర్మించుట:

వృత్తమునకు స్పర్శరేఖలు గీయుటను నేర్చుకొందుము.

(i) కేంద్రము నుపయోగించి గీయుట.

(ii) స్పర్శరేఖ – జ్యా సిద్ధాంతమునుపయోగించి గీయుట.

9.2.1 వృత్తమునకు స్పర్శరేఖను నిర్మించుట (కేంద్రము నుపయోగించి)

ఫలితం

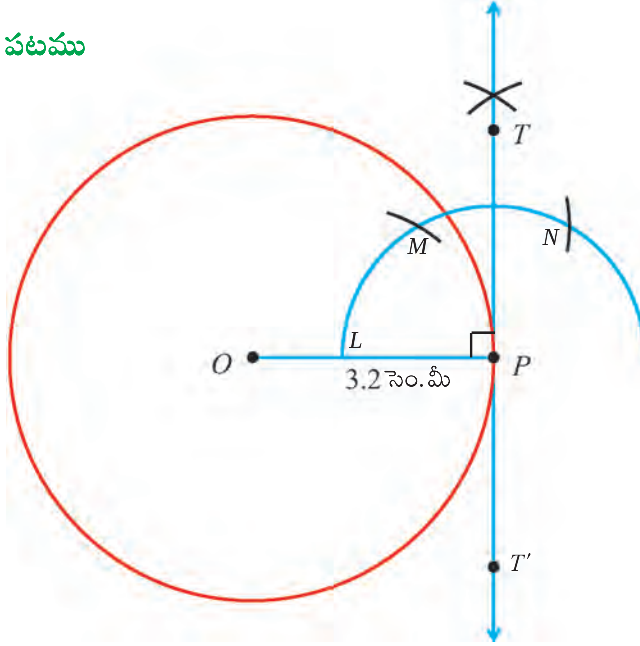
వృత్తములో స్పర్శ బిందువు గుండా గీయబడిన వ్యాసార్థము, స్పర్శరేఖకు లంబంగా ఉండును.

ఉదాహరణ 9.1

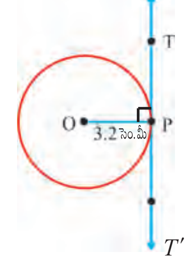
3.2 సెం.మీ. వ్యాసార్థంతో ఒక వృత్తమును గీయుము. వృత్తముపై ఏదేని ఒక బిందువు P తీసుకొని, ఆ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖను గీయుము. (కేంద్రము నుపయోగించి)

సారాంశము: వృత్త వ్యాసార్ధం = 3.2 సెం.మీ.

వాస్తవ పటము



చిత్తు పటము



నిర్మాణము

(i) O కేంద్రంగా 3.2 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో ఒక వృత్తమును గీయుము.

(ii) వృత్తము పై ఏదేని ఒక బిందువు P గుర్తించి, OP ని కలుపుము.

(iii) P ను కేంద్రముగా తీసుకొని OP పై ఒక చాపము L వద్ద ఖండించునట్లు గీయుము.

(iv) $\overparen{LM} = \overparen{MN}$ వుండునట్లు చాపముపై M, N లను గుర్తింపుము.

(v) $\angle MPN$ కు PT అను కోణ సమద్విఖండన రేఖను గీయుము.

(vi) TP ను T' వరకు పొడిగించిన,

$T'PT$ అనునది P వద్ద ఒక స్పర్శరేఖ

సూచన

సరళరేఖ OP కు వృత్తముపై బిందువు P ద్వారా లంబరేఖ PT ను గీయవచ్చును. ఇప్పుడు PT అనునది వృత్తముపై P బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ అగును.

9.2.2 స్పర్శరేఖ – జ్యా సిద్ధాంతం నుపయోగించి వృత్తమునకు స్పర్శరేఖను నిర్మించుట.

ఫలితము (స్పర్శరేఖ – జ్యా సిద్ధాంతం)

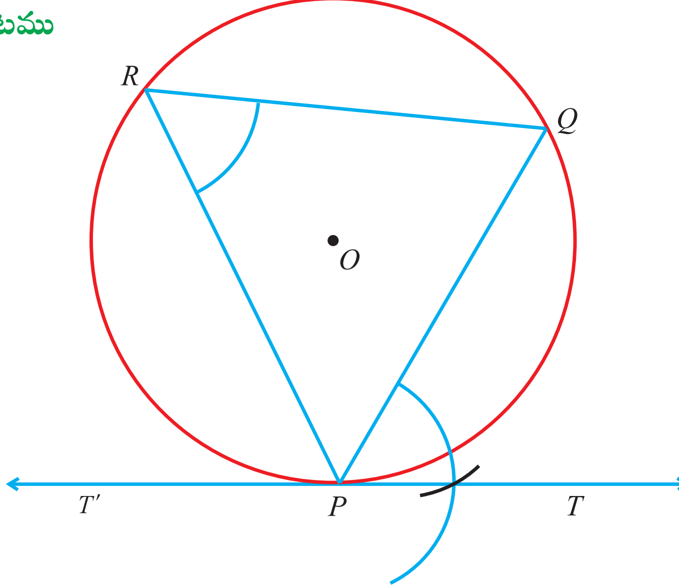
ఒక వృత్త జ్యా మరియు దాని ఒక చివరి బిందువు వద్ద గల స్పర్శరేఖకు మధ్య గల కోణములు, ఏకాంతర వృత్త ఖండములోని కోణమునకు సమానము.

ఉదాహరణ 9.2

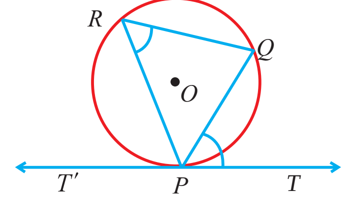
3.2 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో ఒక వృత్తమును గీయుము. దానిపై P అను బిందువును గుర్తించి, దాని ద్వారా స్పర్శరేఖ – జ్యా సిద్ధాంతమునుపయోగించి వృత్తమునకు స్పర్శరేఖను గీయుము.

సారాంశము: వృత్త వ్యాసార్ధం = 3.2 సెం.మీ.

వాస్తవ పటము



చిత్తు పటము



నిర్మాణము

(i) O కేంద్రంగా 3.2 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో ఒక వృత్తమును గీయుము.

(ii) వృత్తము పై ఏదేని ఒక బిందువు P ని గుర్తింపుము

(iii) P ద్వారా PQ అను ఏదేని ఒక జ్యాను గీయుము..

(iv) వృత్తముపై P మరియు Q లకు విభిన్న బిందువైన R ను గుర్తించుము. P, Q మరియు R లు అపసవ్య దిశలో నుండును.

(v) PR మరియు QR లను కలుపుము.

(vi) $\angle QPT = \angle PRQ$ ఉండునట్లు P వద్ద నిర్మింపుము.

(vii) TP ను T' వరకు పొడిగింపుము $T'PT$ కావలసిన స్పర్శరేఖ అగును.

9.2.3 బాహ్య బిందువు నుండి వృత్తమునకు రెండు స్పర్శరేఖలను నిర్మించుట (Construction of pair of tangents to a circle from an external point).

ఫలితములు

(i) బాహ్య బిందువు నుండి వృత్తమునకు రెండు స్పర్శరేఖలు గీయవచ్చును.

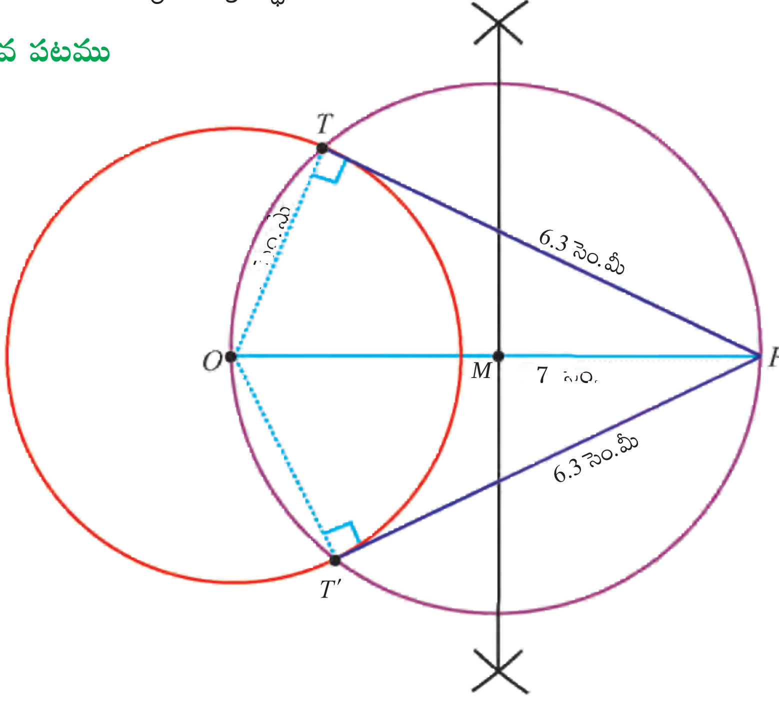
(ii) వృత్తవ్యాసములు వృత్త పరిధిపై 90° చేయును.

ఉదాహరణ 9.3

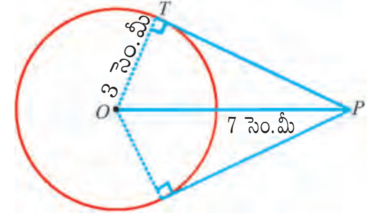
3 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో ఒక వృత్తమును గీయుము. వృత్త కేంద్రము నుండి 7 సెం.మీ. దూరములోనున్న బాహ్యబిందువు నుండి వృత్తమునకు రెండు స్పర్శరేఖలు గీయుము, వాటి పొడవులను కొలువుము.

సారాంశము: వృత్త వ్యాసార్ధము = 3 సెం.మీ., OP = 7 సెం.మీ.

వాస్తవ పటము



చిత్తు పటము



నిర్మాణము

(i) O కేంద్రంగా 3 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో ఒక వృత్తమును గీయుము.

(ii) O నుండి 7 సెం.మీ. దూరంలో P అను బిందువును గుర్తించి, OP ని కలుపుము.

(iii) OP కి లంబ సమద్విఖండన రేఖను గీయుము. అది OP ని M వద్ద కలియును.

(iv) M కేంద్రముగా MO వ్యాసార్ధముతో మరొక వృత్తమును గీయుము.

(v) రెండు వృత్తములు T మరియు T' ల వద్ద ఖండించుకొనును.

(vi) PT మరియు PT' లను కలిపిన, కావలసిన స్పర్శరేఖలు ఏర్పడును.

స్పర్శరేఖ పొడవు, PT = 6.3 సెం.మీ.

సరిచూచుట

లంబకోణ ΔOPT నుండి,

$$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{7^2 - 3^2}$$

$$= \sqrt{49 - 9} = \sqrt{40} \qquad \therefore \quad PT = 6.3 \text{ సెం.మీ. (సుమారుగా).}$$

అభ్యాసము 9.1

1. 4.2 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో ఒక వృత్తమును గీయుము. వృత్తంపై ఏదేని ఒక బిందువు వద్ద కేంద్రమునుపయోగించి స్పర్శరేఖను గీయుము.
2. 4.8 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో ఒక వృత్తమును గీయుము. వృత్తంపై ఏదేని ఒక బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ – జ్యా సిద్ధాంతమునుపయోగించి స్పర్శరేఖను గీయుము.
3. 10 సెం.మీ. వ్యాసంతో ఒక వృత్తమును గీయుము. వృత్త కేంద్రం నుండి 13 సెం.మీ. దూరంలో బాహ్యబిందువు నుండి వృత్తంనకు రెండు స్పర్శరేఖలు PA మరియు PB లను గీయుము. వాటి పొడవుల ను కనుగొనుము.
4. కేంద్రం నుండి 10 సెం.మీ. దూరంలో గల బాహ్యబిందువు నుండి 6 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో గీయబడిన వృత్తమునకు రెండు స్పర్శరేఖలను గీయుము మరియు వాటి పొడవులను లెక్కించుము.
5. కేంద్రం నుండి 9 సెం.మీ. దూరంలో గల బాహ్యబిందువు నుండి 3 సెం.మీ. వ్యాసార్ధం గల వృత్తమునకు రెండు స్పర్శరేఖలను గీయుము.

9.3 త్రిభుజముల నిర్మాణము (Construction of triangles)

భుజములు మరియు కోణములను ఇచ్చినచో త్రిభుజములను నిర్మించుటను ముందుగానే నేర్చుకున్నారు. ఈ భాగంలో

(i) భూభుజము, శీర్షకోణము మరియు భూభుజము నుండి ఎదుటి శీర్షమునకు గీచిన ఉన్నతి ఇచ్చినచో

(ii) భూభుజము, శీర్షకోణము మరియు భూభుజము నుండి ఎదుటి శీర్షమునకు గీచిన మధ్యగత రేఖ ఇచ్చిన త్రిభుజములను నిర్మించుటను తెలుసుకొనెదము.

మొదట, ఈ భాగంలో ఇవ్వబడిన రేఖాఖండము, కోణము కొలతలతో వృత్తఖండమును నిర్మించుటను గమనించెదము.

ఇవ్వబడిన రేఖాఖండముపై, ఇవ్వబడిన కోణము θ ఉండునట్లు, వృత్తఖండమును నిర్మించుట

నిర్మాణము

(i) $\overline{BC}$ రేఖాఖండము గీయుము.

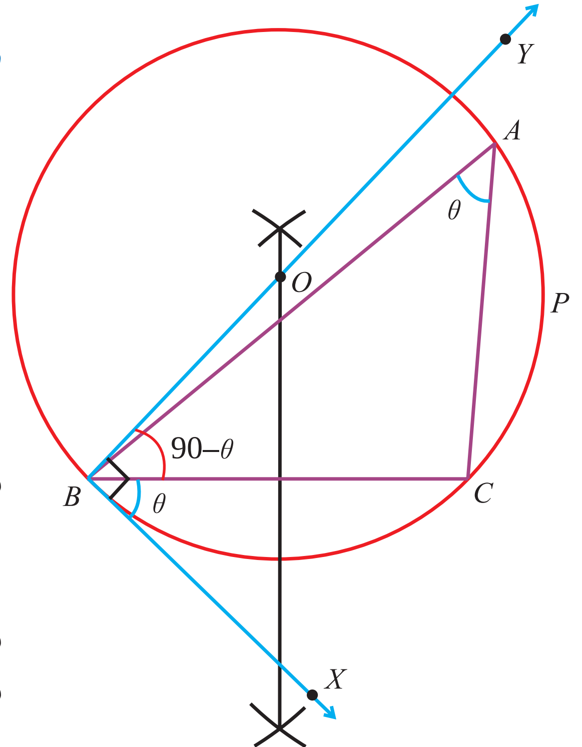
(ii) B వద్ద $\angle CBX = \theta$ వుండునట్లు గీయుము.

(iii) $BY \perp BX$ వుండునట్లు గీయుము.

(iv) BC కి లంబ సమద్విఖండన రేఖను గీయుము. ఇది BY ని O వద్ద కలియును.

(v) O కేంద్రంగా OB వ్యాసార్ధంతో ఒక వృత్తమును గీయుము.

(vi) వృత్తంపై ఏదేని ఒక బిందువు A తీసుకొనిన, స్పర్శరేఖ–జ్యా సిద్ధాంతం నుండి గురుచాపము BAC అనునది θ కోణము కలిగిన వృత్తఖండము అగును.



భూభుజము, శీర్షకోణములతో త్రిభుజమును నిర్మించుట.

భూభుజము మరియు శీర్షకోణములను ఇచ్చిన త్రిభుజమును నిర్మించుటలో గల వివిధ సోపానములను తెలుసుకొనెదము.

నిర్మాణము

(i) AB రేఖాఖండమును గీయుము.

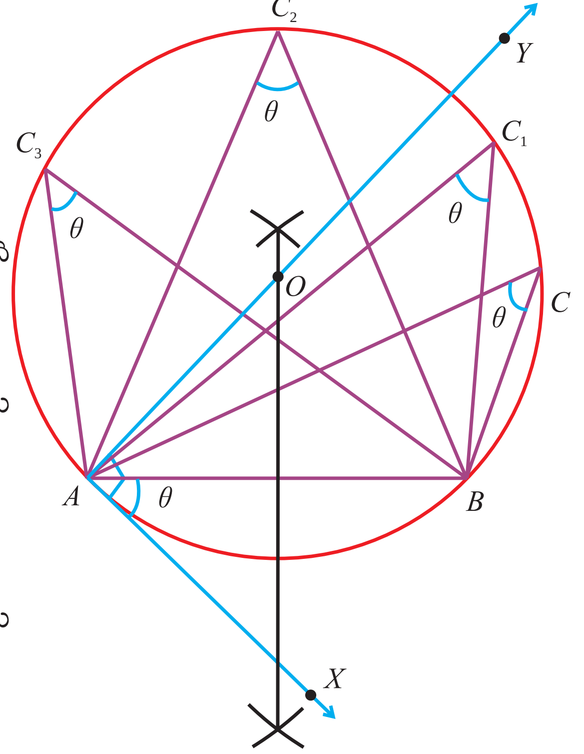
(ii) A వద్ద $\angle BAX = \theta$ కోణమును గీయుము.

(iii) $AY \perp AX$ వుండునట్లు గీయుము.

(iv) AB కి లంబ సమద్విఖండన రేఖను గీయుము. ఇది AY ను O వద్ద కలియును.

(v) O కేంద్రంగా, OA వ్యాసార్ధంతో వృత్తమును గీయుము

(vi) వృత్తంపై ఏకాంతర వృత్తఖండములో ఏదేని ఒక బిందువు C నుండి AC మరియు BC లను కలుపుము.



(vii) $\triangle ABC$ మనకు కావలసిన త్రిభుజము

ఇందు మూలమున తెలియునది, $\triangle ABC$ అనునది ఇవ్వబడిన భూభుజము, శీర్షకోణముతో ఏర్పడిన త్రిభుజములలో ఒకానొకటి.

$AX \perp AY$ కనుక, $\angle XAY = 90^\circ$.

ఇంకను $OB = OA$. (వృత్త వ్యాసార్ధములు).

AX అనునది A వద్ద వృత్తమునకు గల స్పర్శరేఖ అగును మరియు C వృత్తంపై ఏదేని బిందువు.

కనుక, $\angle BAX = \angle ACB$ (స్పర్శరేఖ – జ్యా సిద్ధాంతం).

సూచన

మనము వృత్తంపై $C_1, C_2, C_3, \ldots$ అను ఏదేని బిందువులను తీసుకొనిన, ΔABC_1, ΔABC_2, $\Delta ABC_3, \cdots$ అను అన్ని త్రిభుజములు ఒకే భూమి, ఒకే శీర్షకోణంతో ఏర్పడుతాయి.

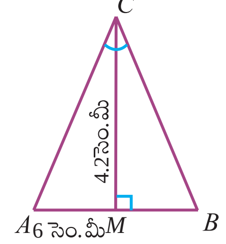
9.3.1 భూభుజము, శీర్షకోణము మరియు శీర్షము నుండి భూభుజమునకు గీసిన ఉన్నతి (ఎత్తు) ఇవ్వబడిన త్రిభుజమును నిర్మించుట.

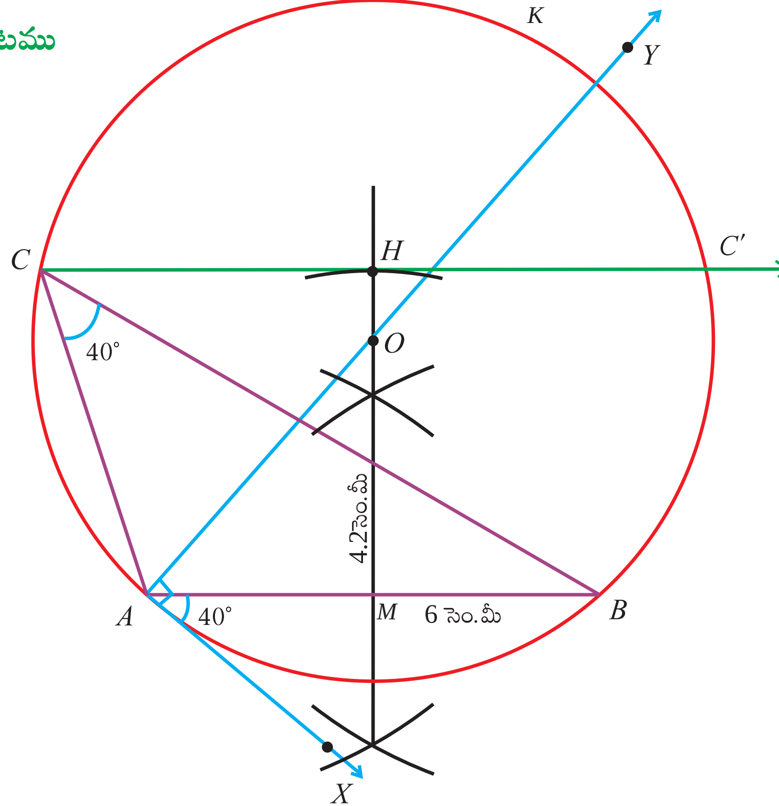
ఉదాహరణ 9.4

$AB = 6$ సెం.మీ., $\angle C = 40^\circ$, C నుండి AB కి గల ఉన్నతి(ఎత్తు) పొడవు 4.2 సెం.మీ. ఉండునట్లు ΔABC ని నిర్మింపుము.

సారాంశము: ΔABC లో, $AB = 6$ సెం.మీ, $\angle C = 40^\circ$

C నుంచి AB కి గల ఉన్నతి పొడవు $= 4.2$ సెం.మీ.





నిర్మాణము

(i) $AB = 6$ సెం.మీ గల ఒక రేఖాఖండమును గీయుము.

(ii) $\angle BAX = 40^\circ$ వుండునట్లు AX ను గీయుము.

(iii) $AY \perp AX$ ఉండునట్లు గీయుము.

(iv) AB ని M వద్ద, AY ని O వద్ద ఖండించునట్లు AB కి లంబ సమద్విఖండన రేఖను గీయుము.

(v) O ను కేంద్రముగా, OA వ్యాసార్ధముతో వృత్తమును గీయుము.

(vi) AKB వృత్తఖండం శీర్షకోణము 40°. ను కలిగియుండును.

(vii) లంబసమద్విఖండన రేఖ MO పై, $MH = 4.2$ సెం.మీ. ఉండునట్లు H ని గుర్తించుము.

(viii) AB కి సమాంతరంగా వృత్తమును C మరియు C'ల వద్ద సంధించునట్లు CHC' ను గీయుము.

(ix) AC, BC లను కలపగా మనకు కావలసిన ΔABC ఏర్పడును.

సూచన

$\Delta ABC'$ కూడా కావలసిన మరొక త్రిభుజము అగును.

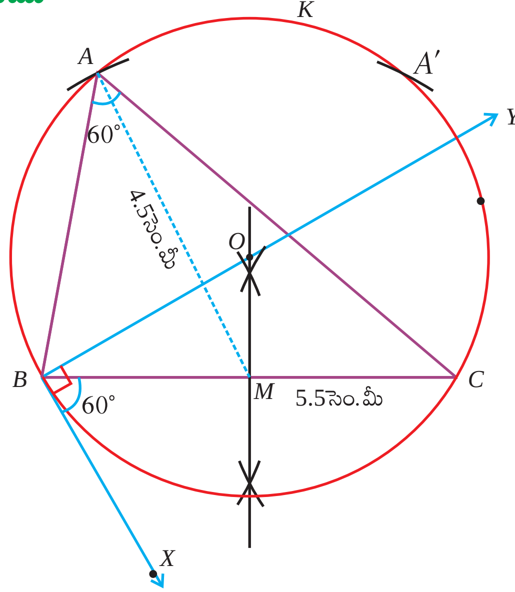
9.3.2 భూభుజము, శీర్షకోణము మరియు శీర్షము నుండి భూభుజమునకు గల మధ్యగతం ఇచ్చిన త్రిభుజమును నిర్మించుట.

ఉదాహరణ 9.5

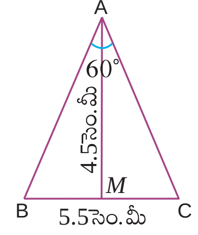
$BC = 5.5$ సెం.మీ., $\angle A = 60^\circ$ మరియు A ద్వారా AM మధ్యగతం 4.5 సెం.మీ. అయిన ΔABC త్రిభుజమును నిర్మించుము.

సారాంశము: ΔABC లో, $BC = 5.5$ సెం.మీ., $\angle A = 60^\circ$, మధ్యగతం $AM = 4.5$ సెం.మీ.

వాస్తవ పటము



చిత్తు పటము



నిర్మాణము

(i) $BC = 5.5$ సెం.మీ. వుండునట్లు రేఖాఖండమును గీయుము.

(ii) $\angle CBX = 60^\circ$ వుండునట్లు B వద్ద BX ను గీయుము.

(iii) $BY \perp BX$ ఉండునట్లు గీయుము.

(iv) BC ని లంబసమద్విఖండన చేయగా అది BY ని O వద్ద మరియు BC ని M వద్ద కలియును.

(v) O కేంద్రంగా OB వ్యాసార్ధంతో వృత్తమును గీయుము.

(vi) దీర్ఘ వృత్త ఖండము BKC, 60° శీర్షకోణమును కలిగియుండును.

(vii) M కేంద్రంగా, 4.5 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో ఒక వృత్తఖండమును గీయగా అది వృత్తమును A మరియు A' ల వద్ద సంధించును.

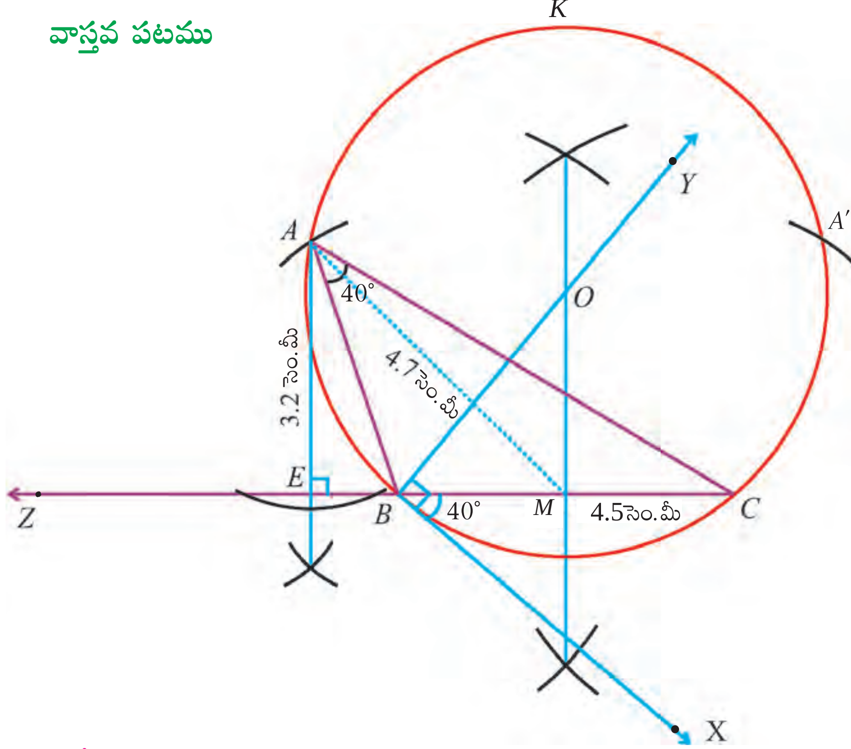
(viii) $\triangle ABC$ లేక $\triangle A'BC$ లు మనకు కావలసిన త్రిభుజములు.

ఉదాహరణ 9.6

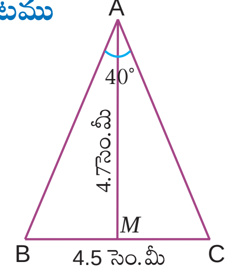
$BC = 4.5$సెం.మీ., $\angle A = 40^\circ$, మరియు A నుండి BC కి గల మధ్యగతము 4.7 సెం.మీ. కొలతలతో ΔABCని నిర్మింపుము. మరియు A నుండి BC కు గల ఉన్నతి పొడవును కనుగొనుము.

సారాంశము: ΔABC లో, $BC = 4.5$ సెం.మీ., $\angle A = 40^\circ$, A నుండి BC కు గల మధ్యగతం $AM = 4.7$ సెం.మీ.

వాస్తవ పటము



చిత్తు పటము



నిర్మాణము

(i) $BC = 4.5$సెం.మీ. రేఖాఖండమును గీయుము.

(ii) $\angle CBX = 40^\circ$ వుండునట్లు BX గీయుము.

(iii) $BY \perp BX$ గీయుము.

(iv) BC కి లంబసమద్విఖండన రేఖను గీయుము. అది BY మరియు BC లను క్రమముగా O మరియు M వద్ద సంధించును.

(v) O కేంద్రంగా OB వ్యాసార్ధంతో BKC వృత్తమును గీయుము.

(vi) దీర్ఘ వృత్త ఖండము BKC, 40° శీర్షకోణమును కలిగియుండును.

(vii) M కేంద్రంగా, 4.7 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో ఒక వృత్త ఖండమును గీయగా అది వృత్తమును A మరియు A'ల వద్ద సంధించును.

(viii) $\triangle ABC$ లేక $\Delta A'BC$ లు కావలసిన త్రిభుజములు.

(ix) CB ను CZ వరకు పొడిగింపుము.

(x) $AE \perp CZ$ గీయుము.

(xi) ఉన్నతి పొడవు $AE = 3.2$సెం.మీ.

అభ్యాసము 9.2

1. $AB = 5.2$సెం.మీ. రేఖాఖండముపై, 48° కోణముతో ఒక వృత్తఖండమును నిర్మింపుము..

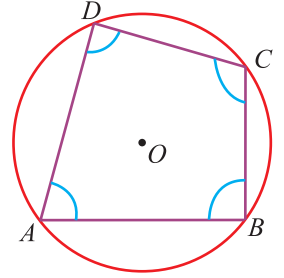
2. భూభుజము $PQ = 6$ సెం.మీ, $\angle R = 60^\circ$ మరియు R నుండి PQ కి గల ఉన్నతి పొడవు 4 సెం.మీ కొలతలతో ΔPQR ను నిర్మింపుము

3. $PQ = 4$సెం.మీ, $\angle R = 60^\circ$, R నుండి PQ కి గల ఉన్నతి పొడవు 4.5 సెం.మీ కొలతలతో ΔPQR ను నిర్మింపుము.

4. $BC = 5$సెం.మీ, $\angle A = 45^\circ$ మరియు A నుండి BC కి గల మధ్యగతం పొడవు 4 సెం.మీ కొలతలతో ΔABC నిర్మింపుము.

5. $BC = 5$ సెం.మీ, $\angle BAC = 40^\circ$ మరియు A నుండి BC కి గల మధ్యగతం పొడవు 6 సెం.మీ అయిన ΔABC నిర్మింపుము. A నుండి ఉన్నతి పొడవును కనుగొనుము.

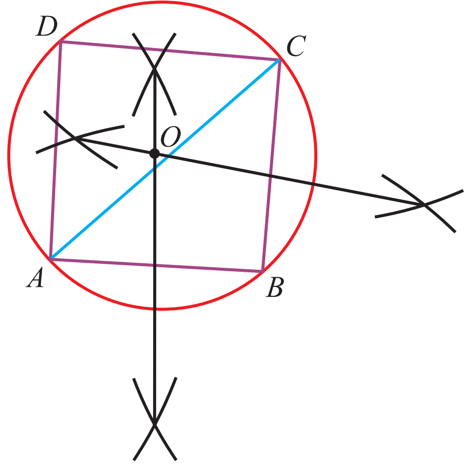
9.4 చక్రీయ చతుర్భుజం (Cyclic quadrilateral)



ఒక చతుర్భుజం యొక్క శీర్షములన్నియు ఒక వృత్తముపై అమరినచో దానిని చక్రీయ చతుర్భుజం అని అందురు. చక్రీయ చతుర్భుజంలో అభిముఖ కోణములు సంపూరకము అనగా అభిముఖ కోణముల మొత్తం 180° కనుక చక్రీయ చతుర్భుజం నిర్మించుటకు నాలుగు కొలతలు చాలును. (ఐదు కొలతలకు బదులు).

ఇచ్చిన కొలతలతో చక్రీయ చతుర్భుజమును నిర్మించుటకు ఈ క్రింది అంశములు వివరించబడినవి.

(i) ఇచ్చిన కొలతలతో చిత్తుపటమును గీచి $\triangle ABC$ లేక ΔABDని గీయుము.



(ii) AB మరియు BC లకు లంబ సమద్విఖండన రేఖలను గీయుము. అవి O వద్ద కలియును. ($\triangle ABC$ లో ఏదేని రెండు భుజములను తీసుకొనవచ్చు.)

(iii) O కేంద్రంగా OA వ్యాసార్ధంతో $\triangle ABC$ యొక్క పరి వృత్తమును గీయుము

(iv) ఇచ్చిన కొలతలనుపయోగించి నాలుగవ శీర్షము D ను కనుగొని AD మరియు CD లను కలుపుము.

(v) $ABCD$ కావలసిన చక్రీయ చతుర్భుజము.

ఈ క్రింది వివిధ రకాల కొలతల ఆధారంగా చక్రీయ చతుర్భుజమును నిర్మించుటను తెలుసుకొనెదము.

(i) మూడు భుజములు మరియు ఒక కర్ణము. (ii) రెండు భుజములు మరియు రెండు కర్ణములు. (iii) మూడు భుజములు మరియు ఒక కోణము. (iv) రెండు భుజములు మరియు రెండు కోణములు. (v) ఒక భుజము మరియు మూడు కోణములు. (vi) రెండు భుజములు, ఒక కోణము మరియు ఒక సమాంతర రేఖ.

పద్ధతి I (మూడు భుజములు మరియు ఒక కర్ణం ఇవ్వబడిన చక్రీయ చతుర్భుజంను నిర్మించుట)

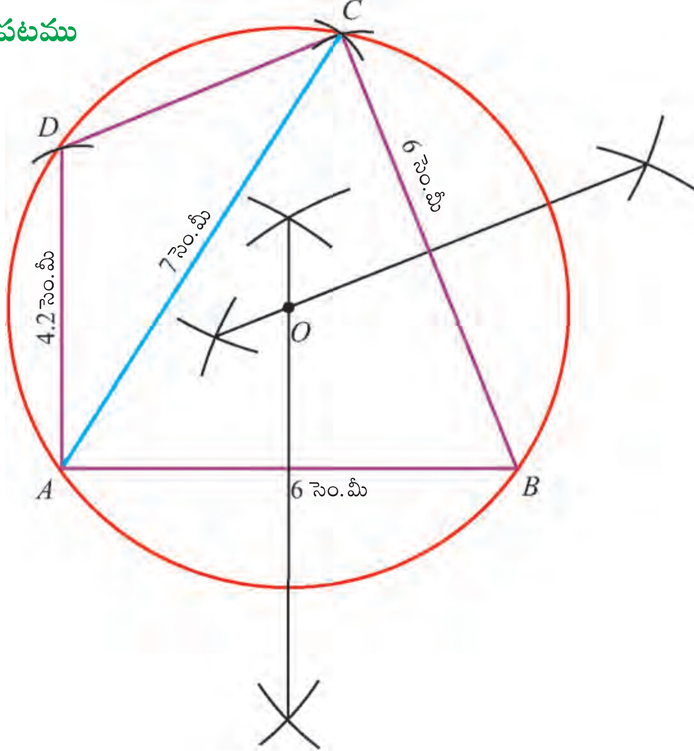
ఉదాహరణ 9.7

$AB = 6$ సెం.మీ., $AC = 7$ సెం.మీ., $BC = 6$ సెం.మీ., మరియు $AD = 4.2$ సెం.మీ.కొలతలతో చక్రీయ చతుర్భుజం $ABCD$ ని నిర్మింపుము.

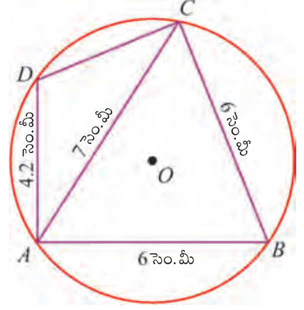
సారాంశము: చక్రీయ చతుర్భుజం $ABCD$ లో, $AB = 6$ సెం.మీ., $AC = 7$ సెం.మీ..

$BC = 6$ సెం.మీ., $AD = 4.2$ సెం.మీ.

వాస్తవ పటము



చిత్తు పటము



నిర్మాణము

(i) చిత్తుపటమును గీచి కొలతలను గుర్తించుము. $AB = 6$ సెం.మీ. రేఖాఖండమును గీయుము

(ii) A మరియు B కేంద్రంగా వరుసగా 7 సెం.మీ. మరియు 6.5 సెం.మీ. వ్యాసార్ధముల కొలతలతో చాపములను గీయగా అవి C వద్ద ఖండించును. AB, AC లను కలుపుము.

(iii) AB మరియు BC లకు లంబసమద్విఖండన రేఖలను గీయగా అవి O వద్ద కలియును.

(iv) O కేంద్రంగా OA $(= OB = OC)$ వ్యాసార్ధంతో ΔABC యొక్క పరివృత్తమును గీయుము.

(v) A కేంద్రంగా 4.2సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో పరివృత్తమును D వద్ద ఖండించునట్లు ఒక చాపమును గీయుము.

(vi) AD మరియు CD లను కలుపుము.

$ABCD$ అనునది మనకు కావలసిన చక్రీయ చతుర్భుజము

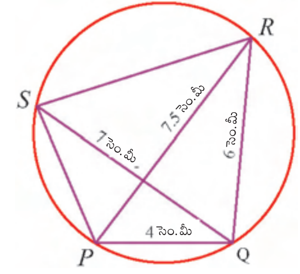
పద్ధతి II (రెండు భుజములు మరియు రెండు కర్ణములు ఇవ్వబడిన చక్రీయ చతుర్భుజమును నిర్మించుట)

ఉదాహరణ 9.8

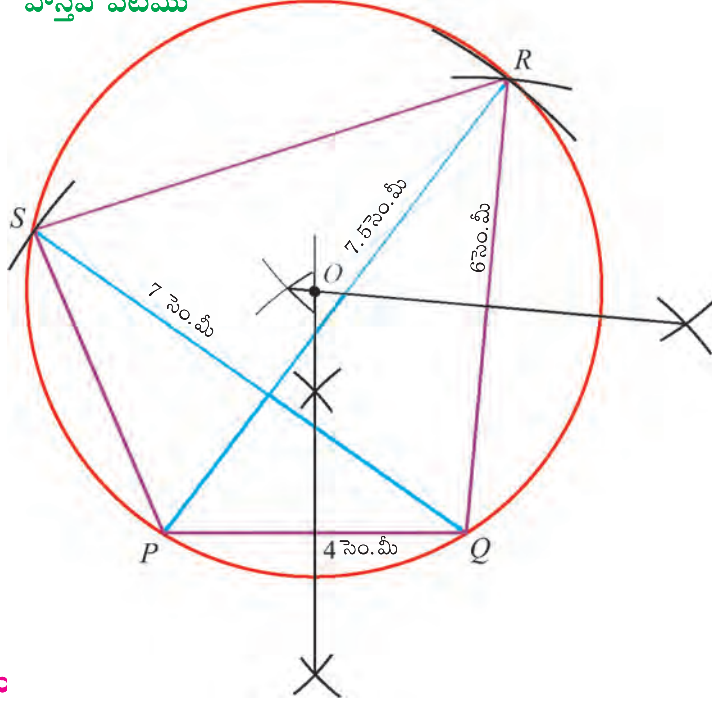
$PQ = 4$ సెం.మీ., $QR = 6$ సెం.మీ., $PR = 7.5$ సెం.మీ., $QS = 7$ సెం.మీ. కొలతలతో $PQRS$ చక్రీయ చతుర్భుజమును నిర్మింపుము

సారాంశము: $PQRS$ చక్రీయ చతుర్భుజంలో, $PQ = 4$ సెం.మీ., $QR = 6$ సెం.మీ., $PR = 7.5$ సెం.మీ. మరియు $QS = 7$ సెం.మీ.

చిత్తు పటము



వాస్తవ పటము



నిర్మాణము

(i) చిత్తుపటమును గీచి కొలతలను గుర్తించుము. $PQ = 4$ సెం.మీ. రేఖాఖండమును గీయుము.

(ii) P కేంద్రంగా 7.5 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో ఒక చాపమును గీయుము.

(iii) Q కేంద్రంగా 6 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో మరియొక చాపము, ముందు చాపమును R వద్ద కలియునట్లు గీయుము.

(iv) PR మరియు QR లను కలుపుము.

(v) PQ మరియు QR లకు లంబసమద్విఖండన రేఖలు గీచి అవి O వద్ద ఖండించునట్లు గీయుము.

(vi) O కేంద్రంగా $OP(=OQ=OR)$ వ్యాసార్ధంతో ΔPQR యొక్క పరివృత్తమును గీయుము.

(vii) Q కేంద్రంగా, 7 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో వృత్తమును S వద్ద కలియునట్లు ఒక చాపమును గీయుము.

(viii) PS మరియు RS లను కలుపుము.

(ix) $PQRS$ అనునది కావలసిన చక్రీయ చతుర్భుజము.

పద్ధతి III (మూడు భుజములు మరియు ఒక కోణము ఇచ్చిన చక్రీయ చతుర్భుజమును నిర్మించుట)

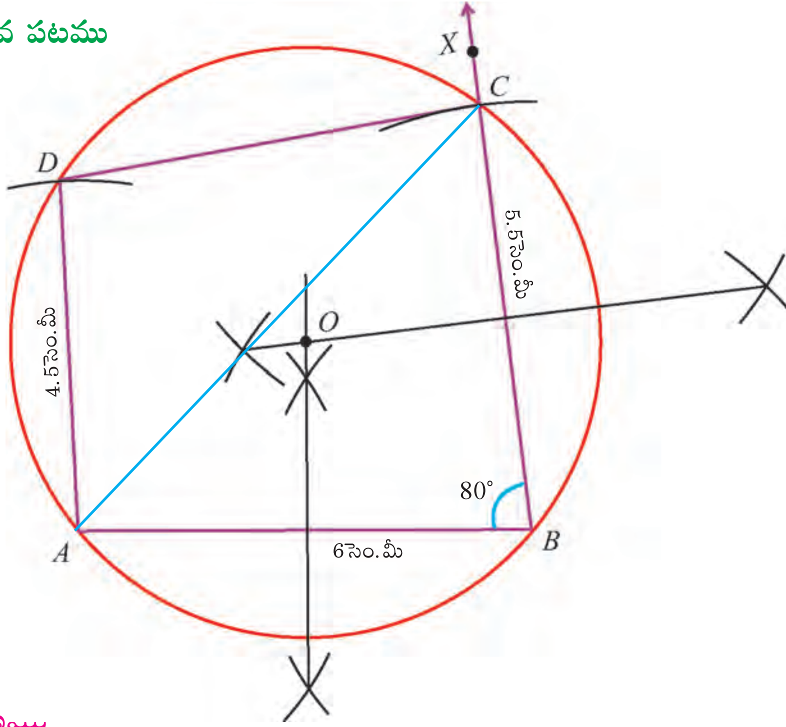
ఉదాహరణ 9.9

$AB = 6$ సెం.మీ., $BC = 5.5$సెం.మీ., $\angle ABC = 80^\circ$ మరియు $AD = 4.5$సెం.మీ. .కొలతలతో$ABCD$ చక్రీయ చతుర్భుజమును నిర్మింపుము

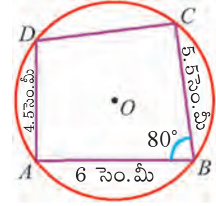
సారాంశము: చక్రీయ చతుర్భుజం $ABCD$ లో, $AB = 6$ సెం.మీ., $BC = 5.5$ సెం.మీ.,

$\angle ABC = 80^\circ$ మరియు $AD = 4.5$ సెం.మీ..

వాస్తవ పటము



చిత్తు పటము



నిర్మాణము

(i) చిత్తుపటమును గీచి కొలతలను గుర్తించుము.
$AB = 6$సెం.మీ. రేఖాఖండమును గీయుము.

(ii) B ద్వారా $\angle ABX = 80^\circ$ ఉండునట్లు BX ను గీయుము.

(iii) B కేంద్రంగా 5.5 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో BX ను C వద్ద ఖండించునట్లు చాపమును గీయుము. AC ని కలుపుము.

(iv) AB మరియు BC ల లంబసమద్విఖండన రేఖలు O వద్ద కలియునట్లు గీయుము.

(v) O కేంద్రంగా OA $(= OB = OC)$ వ్యాసార్ధంతో ΔABC కి పరివృత్తమును గీయుము.

(vi) A కేంద్రంగా మరియు 4.5 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంగల ఒక చాపముతో వృత్తమును D వద్ద ఖండించునట్లు గీయుము.

(vii) AD మరియుCD లను కలుపుము.

(viii) $ABCD$ కావలసిన చక్రీయ చతుర్భుజము

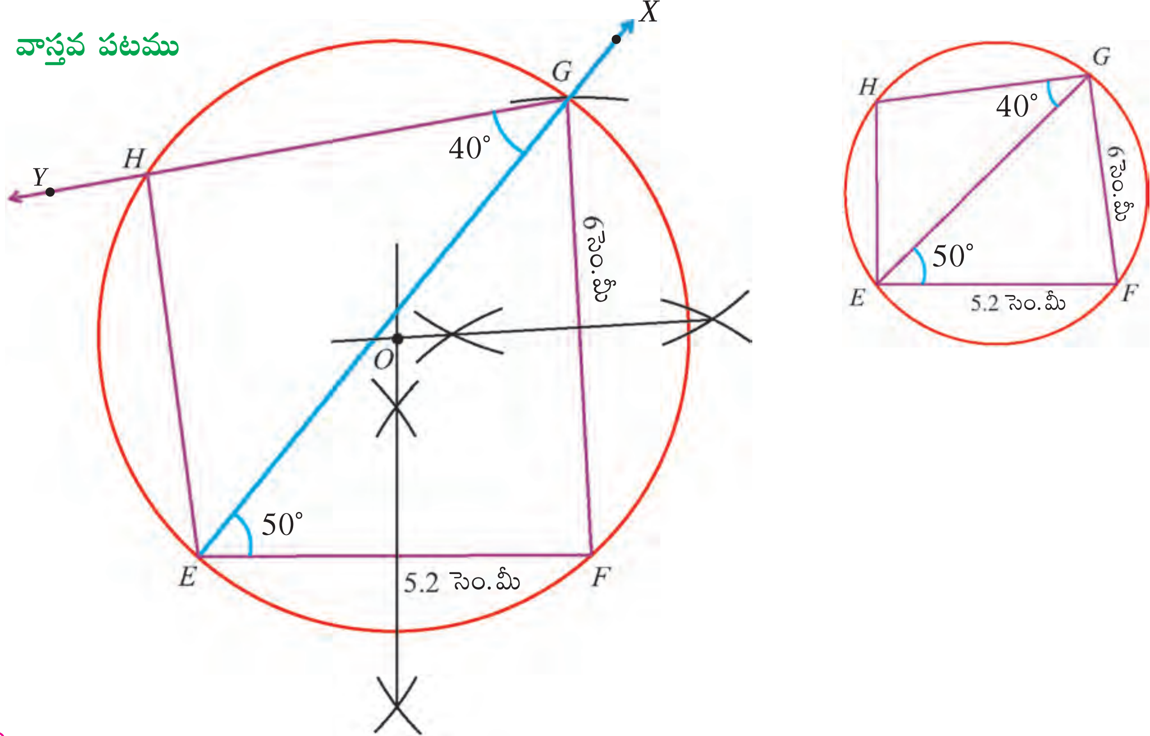
పద్ధతి IV (రెండు భుజములు మరియు రెండు కోణములు ఇచ్చిన చక్రీయ చతుర్భుజమును నిర్మించుట)

ఉదాహరణ 9.10

$EF = 5.2$ సెం.మీ.. $\angle GEF = 50^\circ$, $FG = 6$ సెం.మీ. మరియు $\angle EGH = 40^\circ$ కొలతలతో $EFGH$ చక్రీయ చతుర్భుజమును నిర్మింపుము

సారాంశము: $EFGH$ చక్రీయ చతుర్భుజములో,

$EF = 5.2$ సెం.మీ., $\angle GEF = 50^\circ$, $FG = 6$ సెం.మీ. మరియు $\angle EGH = 40^o$.



నిర్మాణము

(i) చిత్తుపటమును గీచి కొలతలను గుర్తించుము. $EF = 5.2$ సెం.మీ. రేఖాఖండమును గీయుము.

(ii) E ద్వారా $\angle FEX = 50^\circ$ ఉండునట్లు EXను గీయుము.

(iii) F కేంద్రంగా 6 సెం.మీ. వ్యాసార్థంతో ఒక చాపము EX గీచి, అది వృత్తమును G వద్ద కలియునట్లు గీయుము.

(iv) FG ని కలుపుము.

(v) EF మరియు FG ల లంబసమద్విఖండన రేఖలు O వద్ద కలియునట్లు గీయుము.

(vi) O కేంద్రంగా, $OE\ (= OF = OG)$ వ్యాసార్థంతో ΔEFG కి పరివృత్తమును గీయుము.

(vii) G ద్వారా, $\angle EGY = 40^\circ$ ఉండునట్లు GY ను గీయగా అది వృత్తమును H వద్ద కలియును.

(viii) EH ను కలుపుము.

$\therefore$ $EFGH$ మనకు కావలసిన చక్రీయ చతుర్భుజం.

పద్ధతి V (ఒక భుజం,మూడు కోణములు ఇవ్వబడిన, చక్రీయ చతుర్భుజమును నిర్మించుట)

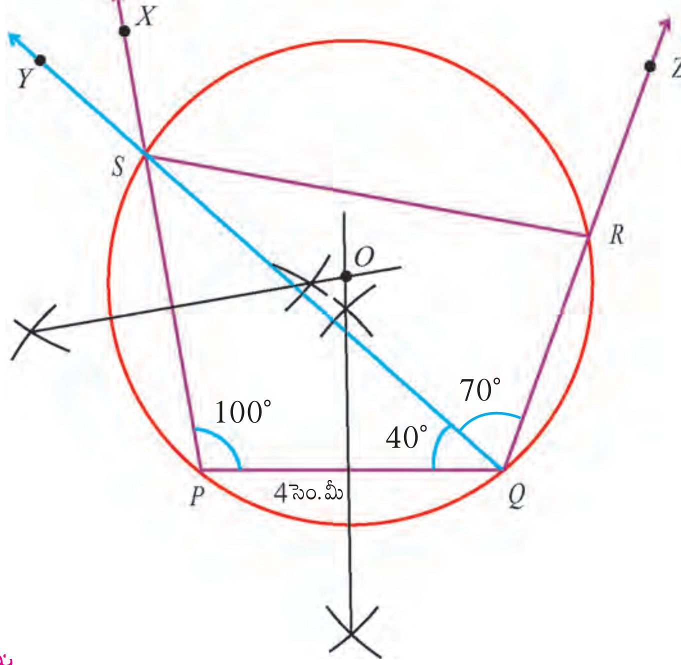
ఉదాహరణ 9.11

$PQ = 4$ సెం.మీ., $\angle P = 100^\circ$, $\angle PQS = 40^\circ$ మరియు $\angle SQR = 70^\circ$ కొలతలతో $PQRS$ చక్రీయ చతుర్భుజమును నిర్మింపుము

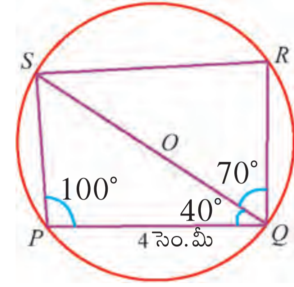
సారాంశము: $PQRS$ చక్రీయ చతుర్భుజములో,

$PQ = 4$ సెం.మీ., $\angle P = 100^\circ$, $\angle PQS = 40^\circ$ మరియు $\angle SQR = 70^\circ$.

వాస్తవ పటము



చిత్తు పటము



నిర్మాణము

(i) చిత్తుపటమును గీచి కొలతలను గుర్తించుము.

$PQ = 4$ సెం.మీ. రేఖాఖండమును గీయుము.

(ii) P ద్వారా $\angle QPX = 100^\circ$ ఉండునట్లు PX ను గీయుము.

(iii) Q ద్వారా $\angle PQY = 40^\circ$ ఉండునట్లు QY ని గీచిన, అది PX ను S వద్ద కలియును.

(iv) PQ మరియు PS ల లంబసమద్విఖండన రేఖలు O వద్ద కలియునట్లు గీయుము

(v) O కేంద్రంగా $OP(= OQ = OS)$ వ్యాసార్ధంతో $\triangle PQS$ కి పరివృత్తమును గీయుము.

(vi) Q ద్వారా $\angle SQZ = 70^\circ$ ఉండునట్లు QZ ను గీయగా అది వృత్తమును R వద్ద ఖండించును.

(vii) RS ను కలుపుము.

$\therefore PQRS$ కావలసిన చక్రీయ చతుర్భుజము.

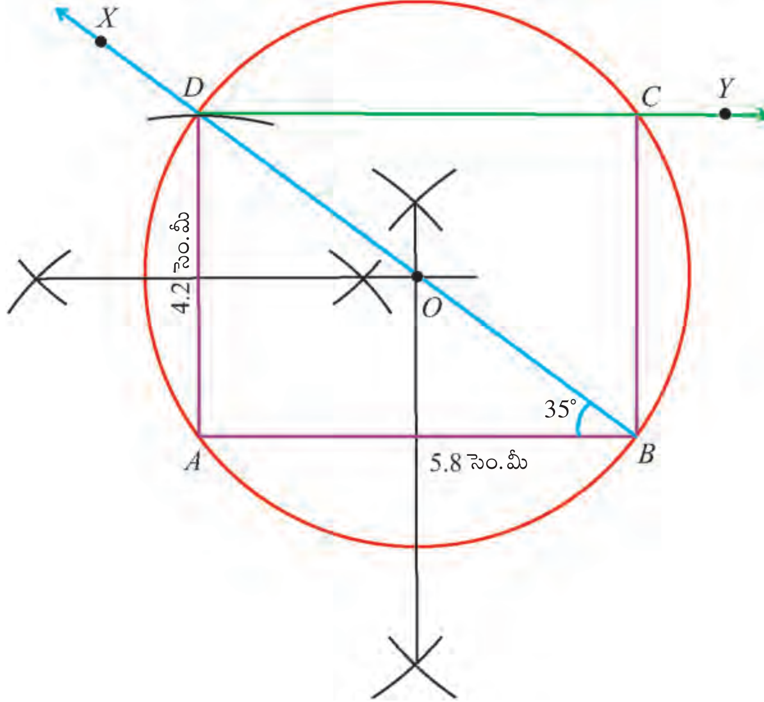
పద్ధతి VI (రెండు భుజములు, ఒక కోణము మరియు ఒక సమాంతర రేఖ ఇచ్చిన చక్రీయ చతుర్భుజమును నిర్మించుట)

ఉదాహరణ 9.12

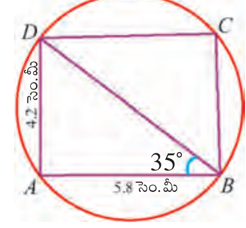
$AB = 5.8$ సెం.మీ., $\angle ABD = 35^\circ, AD = 4.2$ సెం.మీ. మరియు $AB \parallel CD$ అయిన $ABCD$ చక్రీయ చతుర్భుజమును నిర్మింపుము.

సారాంశము: $ABCD$ చక్రీయ చతుర్భుజములో, $AB = 5.8$ సెం.మీ., $\angle ABD = 35^\circ$, $AD = 4.2$ సెం.మీ. మరియు $AB \parallel CD$

వాస్తవ పటము



చిత్తు పటము



నిర్మాణము

(i) చిత్తుపటమును గీచి కొలతలను గుర్తించుము.
$AB = 5.8$ సెం.మీ. రేఖాఖండమును గీయుము.

(ii) B ద్వారా $\angle ABX = 35^\circ$ ఉండునట్లు BX ను గీయుము.

(iii) A కేంద్రంగా 4.2 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో ఒక చాపమును గీయగా అది BX ను D వద్ద కలియును.

(iv) AB మరియు AD ల లంబసమద్విఖండన రేఖలు O వద్ద కలియునట్లు గీయుము.

(v) O కేంద్రంగా $OA (= OB = OD)$ వ్యాసార్ధంతో ΔABD కి పరివృత్తమును గీయుము.

(vi) $DY \parallel AB$ ఉండునట్లు DY ని గీచిన అది వృత్తమును C వద్ద ఖండించును. BC ను కలుపుము.

(vii) $ABCD$ కావలసిన చక్రీయ చతుర్భుజము.

అభ్యాసము 9.3

1. PQ = 6.5 సెం.మీ, QR = 5.5 సెం.మీ, PR = 7 సెం.మీ మరియు PS = 4.5 సెం.మీ. కొలతలతో చక్రీయ చతుర్భుజం $PQRS$ ని నిర్మింపుము.
2. AB = 6 సెం.మీ, AD = 4.8 సెం.మీ, BD = 8 సెం.మీ మరియు CD = 5.5 సెం.మీ. కొలతలతో చక్రీయ చతుర్భుజం $ABCD$ ని నిర్మింపుము.
3. PQ = 5.5 సెం.మీ, QR = 4.5 సెం.మీ, $\angle QPR = 45^\circ$, PS = 3 సెం.మీ. కొలతలతో చక్రీయ చతుర్భుజం $PQRS$ ని నిర్మింపుము.
4. AB = 7 సెం.మీ, $\angle A = 80^\circ$, AD = 4.5 సెం.మీ మరియు BC = 5 సెం.మీ. కొలతలతో చక్రీయ చతుర్భుజం $ABCD$ ని నిర్మింపుము.
5. KL = 5.5 సెం.మీ, KM = 5 సెం.మీ, LM = 4.2 సెం.మీ మరియు LN = 5.3 సెం.మీ. కొలతలతో చక్రీయ చతుర్భుజం $KLMN$ ని నిర్మింపుము.
6. EF = 7 సెం.మీ, EH = 4.8 సెం.మీ, FH = 6.5సెం.మీ మరియు EG =6.6 సెం.మీ. కొలతలతో చక్రీయ చతుర్భుజం $EFGH$ ని నిర్మింపుము.
7. AB = 6 సెం.మీ, $\angle ABC = 70^\circ$, BC = 5 సెం.మీ మరియు $\angle ACD = 30^\circ$ కొలతలతో చక్రీయ చతుర్భుజం $ABCD$ ని నిర్మింపుము.
8. PQ = 5 సెం.మీ, QR = 4 సెం.మీ, $\angle QPR = 35^\circ$ మరియు $\angle PRS = 70^\circ$ కొలతలతో చక్రీయ చతుర్భుజం $PQRS$ ని నిర్మింపుము.
9. AB = 5.5 సెం.మీ $\angle ABC = 50^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$ మరియు $\angle ACD = 30^\circ$ కొలతలతో చక్రీయ చతుర్భుజం $ABCD$ ని నిర్మింపుము.
10. AB = 6.5 సెం.మీ, $\angle ABC = 110^\circ$, BC = 5.5 సెం.మీ మరియు $AB \parallel CD$ అయిన $ABCD$ చక్రీయ చతుర్భుజమును నిర్మింపుము.

మీకు తెలుసా?

1901 నుండి ప్రతి సంవత్సరము భౌతికశాస్త్రము, రసాయనశాస్త్రము, మానవ దేహధర్మశాస్త్రము (వైద్యశాస్త్రము), సాహిత్యము మరియు శాంతికొరకు నోబెల్ బహుమతిని ఆయా శాఖలలో ప్రఖ్యాతిగాంచిన వారికి ఇవ్వబడుచున్నది. స్వీడన్ దేశములోని స్టాక్‌హోమ్‌లో గల నోబెల్ సంస్థ ద్వారా ఈ అరుదైన ప్రపంచ బిరుదునొసగ బడుచున్నది. కానీ గణితశాస్త్రమునకని ఈ బిరుదు ఇవ్వలేదు.

40 సంవత్సరములు అంతకు మించని వయస్సు గల ఇద్దరు, ముగ్గురు లేక నలుగురు గణిత మేధావులకు అంతర్జాతీయ గణిత సమ్మేళనముచే నాలుగు సంవత్సరములకొకసారి జరుగు అంతర్జాతీయ కాంగ్రెస్ సభలో ఫీల్డ్స్ పథకము అను బహుమానము ఇవ్వబడినది. ఇదియే గణితశాస్త్రము కొరకు ఇవ్వబడు నోబెల్ బహుమానముగా పరిగణించబడుచున్నది.

10

రేఖాచిత్రములు

- పరిచయం
- ద్విఘాతరేఖా చిత్రములు
- ప్రత్యేక రేఖా చిత్రములు



రేణె డెస్‌కార్ట్స్
(1596-1650)
ఫ్రాన్స్

డెస్‌కార్ట్స్, వైద్యశాల పడక యందున్న సమయమున ఒక ఈగ తన గది మూలయందు అటు ఇటు తిరుగుటను గమనించి, కార్టీషియన్ తలమును కనుగొనెను.

ఇతను వైశ్లేషిక రేఖా గణితమును సృష్టించెను. దాని ద్వారా అక్షనిరూపకములను ఉపయోగించి, సులభముగా రేఖా చిత్రములను గీయుటకు మార్గము చూపెను.

"I think, therefore I am" - *Rene Descartes*

10.1 పరిచయం

రేఖాచిత్రములు సమాచారమును సూచించు చిత్రపటములు అవి ఎత్తుకు, బరువుకు గల సంబంధములాగా రెండు వేర్వేరు పరిమాణములు ఒకదానికొకటి ఎట్లుండునో సూచించును. కొన్ని సమయములలో బీజగణితము ఊహించుటయే కఠినముగా నుండవచ్చు. సంకేతిక ఉక్తులు మరియు వాటి బీజగణిత పద్ధతుల సంబంధమును సూచించుటకు ప్రారంభమైన ఒక మార్గమే రేఖాచిత్రములు అని తెలుసుకొనుము.

విద్యార్థులు ఇవ్వబడిన సమస్యకు సరియైన, ఖచ్చితమైన రేఖాచిత్రము గీయుటను అలవరచుకొనవలెను. ఒక సమస్య యొక్క జ్యామితీయ వివరణను విశదీకరించు ఉపయోగమేగాక, ఖచ్చితమైన బీజ గణిత పనిని సరిచూచు ఉపయోగము కూడా కలదని, జాగ్రత్తగా రేఖాచిత్రము తయారు చేయవలెను. గీయబడిన రేఖాచిత్రముల ద్వారా సాధించిన ఫలితములు రమారమిగాను మరియు ఖచ్చితత్వమునకు అనుపాతముగాను ఉండునని మరచిపోరాదు.

10.2 ద్విఘాత రేఖాచిత్రములు (Quadratic Graphs)

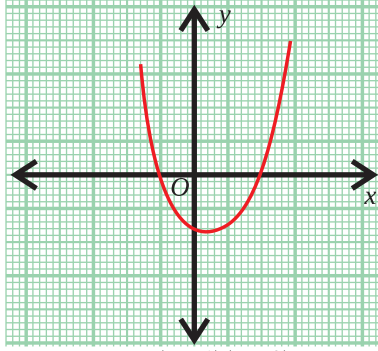
నిర్వచనము

$f : A \rightarrow B$ ఒక ప్రమేయము, A మరియు B అనునది $\mathbb{R}$ యొక్క ఉపసమితుల సమితి $\{(x,y) \mid x \in A, y = f(x)\}$ యొక్క అన్నీ క్రమయుగ్మములు (x, y) ని f యొక్క రేఖాచిత్రము అందురు.

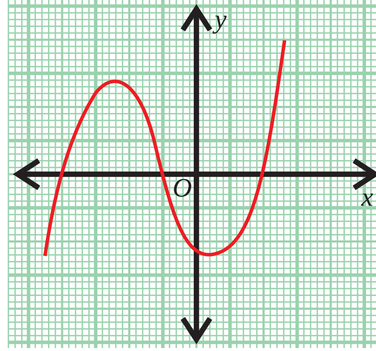
x లో గల బహుపద ప్రమేయమును రేఖా చిత్రము ద్వారా తెలుపవచ్చును. మొదటి అంతస్తు బహుపద ప్రమేయ రేఖా చిత్రము $y = f(x) = ax + b, a \neq 0$ అనునది వాలు a గా గల ఒక **తిర్యక్‌రేఖ** అగును.

రెండవ అంతస్తు బహుపద సమాస రేఖాచిత్రము $y = f(x) = ax^2 + bx + c,\ \ a \neq 0$ అను ఒక అవిచ్ఛిన్న రేఖీయము కాని వక్రరేఖను **పరావలయము** అందురు.

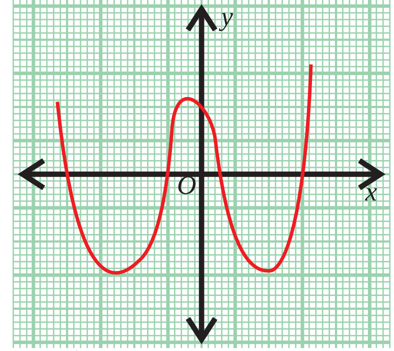
క్రింద ఇవ్వబడిన రేఖాచిత్రములు వేర్వేరు బహుపద సమాసములను తెలుపును.



$y = (x+1)(x-2)$,
బహుపద సమాస అంతస్తు 2



$y = (x+4)(x+1)(x-2)$,
బహుపద సమాస అంతస్తు 3



$y = \frac{1}{14}(x+4)(x+1)(x-3)(x-0.5)$
బహుపద సమాస అంతస్తు 4

IX వ తరగతిలో, $y = ax + b, a \neq 0$ రూపమున గల ఏకఘాత సమాసముల రేఖాచిత్రములను ఎట్లు గీయుదుమో నేర్చుకొంటిమి. ప్రస్తుతము ద్విఘాత సమాసము $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ఇందు a, b మరియు c వాస్తవ స్థిరాంకములు, $a \neq 0$ అను రేఖా చిత్రమును గీయుట యందు దృష్టియుంచెదము మరియు ద్విఘాత రేఖాచిత్రముల స్వభావమును వివరించెదము.

వర్గములను పూరించుట ద్వారా, $y = ax^2 + bx + c$ అను బహుపదసమాసమును $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ గా వ్రాయవచ్చును.

కావున $\frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \geq 0$.(సమాసము యొక్క వర్గము ఎల్లప్పుడు ధనాత్మకము)

వక్రరేఖ (పరావలయము) యొక్క శీర్షము $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ అగును.

$a > 0$ అయిన, వక్రరేఖ పైకి తెరువబడియుండును; ఇది $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ రేఖపై లేక దానికి పైన అమరి ఉండును మరియు $x = -\frac{b}{2a}$ కు సౌష్ఠవముగా నుండును.

$a < 0$ అయిన, వక్రరేఖ క్రిందకు తెరువబడియుండును; ఇది $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ రేఖపై లేక దానికి క్రింద అమరి ఉండును మరియు $x = -\frac{b}{2a}$ కు సౌష్ఠవముగా నుండును.

క్రింద పట్టికలో ద్విఘాత బహుపద సమాసములు మరియు వాటి రేఖాచిత్రముల స్వభావములను తెలుపు కొన్ని ఉదాహరణలు ఇవ్వబడినది.

వ.సం.	బహుపద సమాసము ($y = ax^2 + bx + c$)	శీర్షము	a యొక్క గుర్తు	వక్రరేఖ స్వభావము
1	$y = 2x^2$ $a = 2,\ b = 0,\ c = 0$	(0, 0)	ధనాత్మకము	(i) పైకి తెరచియుండును (ii) $y = 0$ రేఖపై లేక దానికి పైన ఉండును (iii) $x = 0$ కు సౌష్ఠవము, i.e., y-అక్షము
2	$y = -3x^2$ $a = -3,\ b = 0,\ c = 0$	(0, 0)	ఋణాత్మకము	(i) క్రిందకు తెరచియుండును (ii) $y = 0$ రేఖపై లేక దానికి క్రింద ఉండును (iii) $x = 0$ కు సౌష్ఠవము i.e., y-అక్షము
3	$y = x^2 - 2x - 3$ $a = 1, b = -2, c = -3$	(1, –4)	ధనాత్మకము	(i) పైకి తెరచియుండును (ii) $y = -4$ రేఖపై లేక దానికి పైన ఉండును (iii) $x = 1$ కు సౌష్ఠవము.

$y = ax^2 + bx + c$ అను ద్విఘాత రేఖాచిత్రమును గీయు పద్ధతి.

(i) $y = ax^2 + bx + c$ నుపయోగించి x మరియు y విలువలతో పట్టికను నిర్మింపుము.

(ii) తగిన స్కేలును ఎన్నుకొనుము.

x – అక్షముపై ఉపయోగించు స్కేలు y - అక్షముపైనను అదే స్కేలు ఉండనవసరము లేదు. సాధ్యమైనంత విస్తారమైన రేఖా చిత్రమును గీయుటకు సరైన స్కేలును ఎన్నుకొనుము. ఈ పెద్ద రేఖా చిత్రము నుండి ఖచ్చితమైన ఫలితమును పొందవచ్చును.

(iii) $y = ax^2 + bx + c$ అను రేఖాచిత్రములో రేఖాఖండములు లేనందున, గ్రాఫ్ నందు బిందువులను గుర్తించి, ఈ బిందువులను కలుపుట ద్వారా సున్నితమైన వక్రరేఖను పొందవచ్చును.

ఉదాహరణ 10.1

$y = 2x^2$ రేఖాచిత్రమును గీయుము.

సాధన

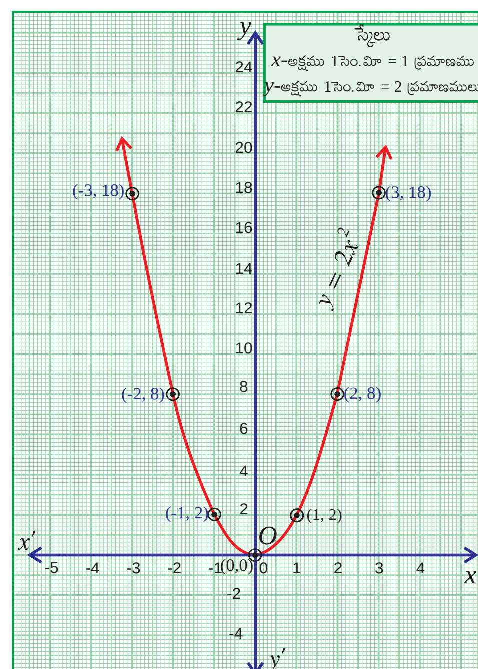
మొదట x గా తీసుకొను పూర్ణాంక విలువలు -3 నుండి 3 వరకు ఇచ్చి, ఈ క్రింది పట్టికను రూపొందించుము.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$y = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

$(-3, 18)$, $(-2, 8)$, $(-1, 2)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 8)$ మరియు $(3, 18)$ అను బిందువులను గుర్తించుము.

ఈ బిందువులను కలుపుటచే ఒక సున్నితమైన వక్రరేఖ ఏర్పడినది.

ఈ విధంగా వచ్చిన వక్రరేఖ $y = 2x^2$ యొక్క రేఖాచిత్రమగును.



పటము. 10.1

గమనిక

(i) ఈ రేఖాచిత్రము y – అక్షమునకు సౌష్ఠవము. అనగా y – అక్షమునకు ఎడమ వైపునున్న రేఖాచిత్ర భాగము, y – అక్షమునకు కుడివైపునున్న రేఖాచిత్ర భాగమును ప్రతిబింబించును.

(ii) y అనునది ఋణాత్మకముకాని విలువలైనందున రేఖాచిత్రము x – అక్షమునకు క్రింద అమరియుండదు.

ఉదాహరణ 10.2

$y = -3x^2$ రేఖాచిత్రమును గీయుము.

సాధన

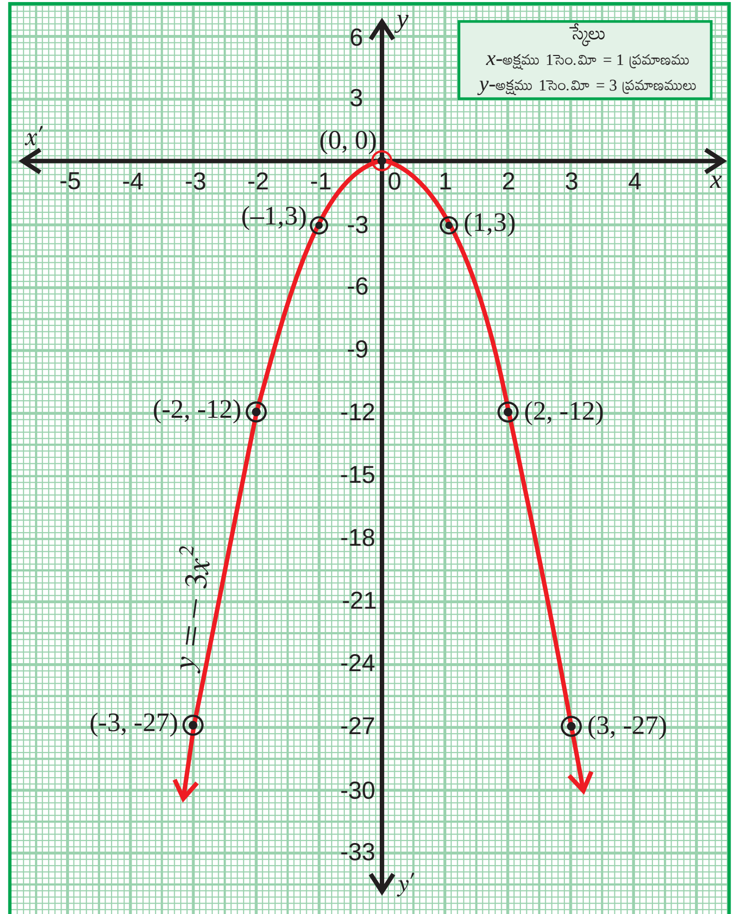
x గా తీసుకొను పూర్ణాంక విలువలు -3 నుండి 3 వరకు ఇచ్చి, క్రింది పట్టికను తయారు చేయుము.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$y = -3x^2$	-27	-12	-3	0	-3	-12	-27

$(-3, -27)$, $(-2, -12)$, $(-1, -3)$, $(0, 0)$, $(1, -3)$, $(2, -12)$ మరియు $(3, -27)$ బిందువులను గుర్తించుము.

ఈ బిందువులను సున్నితముగా కలుపుటచే ఒక వక్రరేఖ ఏర్పడినది.

ఏర్పడిన వక్రరేఖ $y = -3x^2$ యొక్క రేఖాచిత్రమగును.



పటము. 10.2

గమనిక

(i) y అనునది ఎల్లప్పుడూ ఋణాత్మకము అయినందున $y = -3x^2$ అను రేఖాచిత్రము x-అక్షమునకు పైన ఉండదు.

(ii) ఈ రేఖా చిత్రము y-అక్షమునకు సౌష్ఠవము.

10.2.1 $ax^2 + bx + c = 0$ అను ద్విఘాత సమీకరణమును రేఖాచిత్రముచే సాధించుట.

ద్విఘాత సమీకరణము $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలములు రేఖా చిత్రము ద్వారా కనుగొనుటకు, $y = ax^2 + bx + c$ రేఖా చిత్రమును గీయుము. x-అక్షముతో వక్రరేఖ ఖండించుకొనినట్లయితే, ఖండన బిందువులైన x నిరూపకములు, ఇచ్చిన సమీకరణము యొక్క మూలములగును.

ఉదాహరణ 10.3

$x^2 - 2x - 3 = 0$ సమీకరణమును రేఖాచిత్రముచే సాధించుము.

సాధన

$y = x^2 - 2x - 3$ రేఖాచిత్రమును గీయుదుము.

x గా తీసుకొను పూర్ణాంక విలువలు -3 నుండి 4 వరకు ఇచ్చి, $y = x^2 - 2x - 3$ యొక్క అనురూప విలువలు కనుగొని క్రింది పట్టికను ఏర్పరచుము.

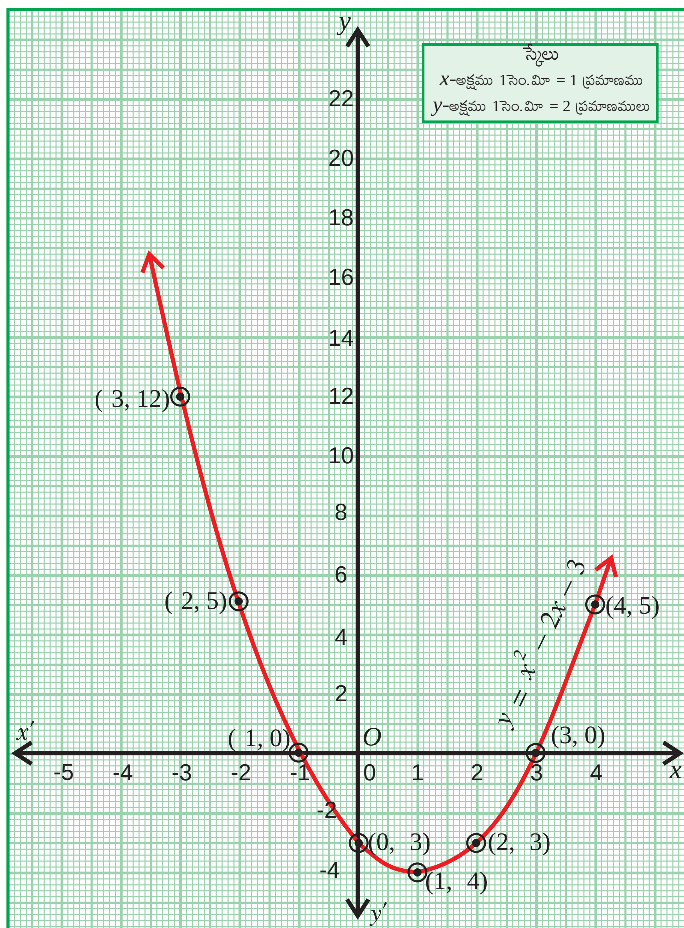
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2	9	4	1	0	1	4	9	16
$-2x$	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
y	12	5	0	-3	-4	-3	0	5

$(-3, 12)$, $(-2, 5)$, $(-1, 0)$, $(0, -3)$, $(1, -4)$, $(2, -3)$, $(3, 0)$, $(4, 5)$ బిందువులను గుర్తించి, ఆ బిందువులను కలిపి వక్రరేఖను గీయుము.

వక్రరేఖ x – అక్షమును $(-1, 0)$ మరియు $(3, 0)$ బిందువుల వద్ద ఖండించును.

పై బిందువుల నుండి x–నిరూపకములు -1 మరియు 3 అగును.

కావున, సాధన సమితి $\{-1, 3\}$ అగును.



పటము. 10.3

గమనిక

(i) x – అక్షముపై ఎల్లప్పుడూ $y = 0$ అగును.

(ii) y విలువలు ధన మరియు ఋణాత్మకములు. కావున వక్రరేఖ x – అక్షమునకు క్రింద మరియు పైన ఉండును.

(iii) ఈ వక్రరేఖ, $x = 1$ రేఖకు సౌష్ఠవము. (ఇది y – అక్షమునకు సౌష్ఠవముకాదు).

ఉదాహరణ 10.4

$2x^2 + x - 6 = 0$ రేఖా చిత్రము ద్వారా సాధించుము.

సాధన

మొదట, x కు పూర్ణాంక విలువలు -3 నుండి 3 వరకు తీసుకొని, $y = 2x^2 + x - 6$ కు అనురూప విలువలు కనుగొని క్రింది పట్టికను ఏర్పరచుము.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
–6	–6	–6	–6	–6	–6	–6	–6
y	9	0	–5	–6	–3	4	15

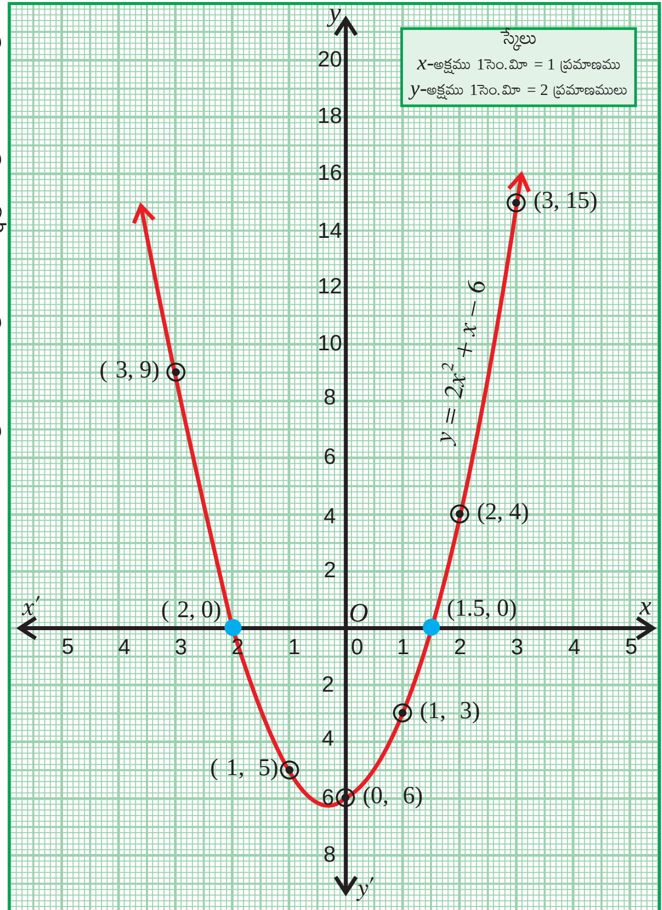
$(-3, 9)$, $(-2, 0)$, $(-1, -5)$, $(0, -6)$, $(1, -3)$, $(2, 4)$ మరియు $(3, 15)$ బిందువులను గుర్తించుము.

ఆ బిందువులను కలిపి సున్నిత వక్రరేఖను గీయుము. కావున $y = 2x^2 + x - 6$ యొక్క రేఖాచిత్రము ఏర్పడినది.

x – అక్షమును వక్రరేఖ $(-2, 0)$ మరియు $(1.5, 0)$ బిందువుల వద్ద ఖండించినది.

పై బిందువుల నుండి x – నిరూపకములు -2 మరియు 1.5 అగును.

కావున, సాధన సమితి $\{-2 , 1.5 \}$ అగును.



పటము. 10.4

సూచనలు

$y = 2x^2 + x - 6$ అను రేఖా చిత్రము ద్వారా సాధించుటకు క్రింది విధానమును పాటించవచ్చును.

(i) $y = 2x^2$ రేఖా చిత్రమును గీయుము.

(ii) $y = 6 - x$ రేఖా చిత్రమును గీయుము.

(iii) రెండు రేఖాచిత్రముల ఖండన బిందువులు $2x^2 + x - 6 = 0$ యొక్క సాధనలు అగును.

ఉదాహరణ 10.5

$y = 2x^2$ రేఖా చిత్రమును గీయుము. దాని ద్వారా $2x^2 + x - 6 = 0$ సాధించుము.

సాధన

మొదట, $y = 2x^2$ యొక్క రేఖా చిత్రమును గీయుదుము. క్రింది పట్టికను ఏర్పరచుము.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$y = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

(–3, 18), (–2, 8), (–1,2), (0, 0), (1, 2), (2, 8) మరియు (3, 18) బిందువులను గుర్తించుము.

బిందువులను కలుపుతూ వక్ర రేఖాచిత్రమును గీయుము.

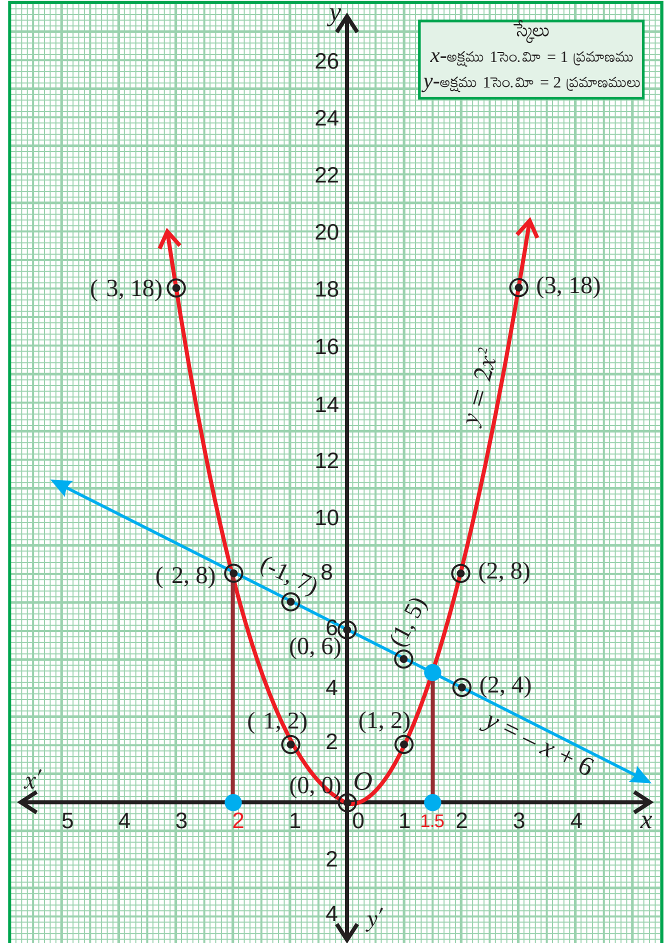
$2x^2 + x - 6 = 0$ యొక్క మూలములను కనుగొనుటకు $y = 2x^2$ మరియు $2x^2 + x - 6 = 0$ అను రెండు సమీకరణములను సాధించుము.

ఇపుడు, $2x^2 + x - 6 = 0$.

$\Longrightarrow \quad y + x - 6 = 0$, $y = 2x^2$ అయినందున కాబట్టి, $y = -x + 6$

కావున, $2x^2 + x - 6 = 0$ ల మూలములు $y = 2x^2$ మరియు $y = -x + 6$ యొక్క ఖండన బిందువుల x – నిరూపకములగును.

ఇపుడు, $y = -x + 6$ అను సరళరేఖకు క్రింది పట్టికను ఏర్పరచుము.



పటము. 10.5

x	–1	0	1	2
$y = -x + 6$	7	6	5	4

పై బిందువులను కలిపి సరళరేఖను గీయుము.

సరళరేఖ మరియు పరావలయముల ఖండన బిందువులు (–2, 8) మరియు (1.5, 4.5) అగును. x – నిరూపకములు –2 మరియు 1.5 అగును.

కావున, $2x^2 + x - 6 = 0$ సమీకరణము యొక్క సాధన సమితి { –2 , 1.5}.

ఉదాహరణ 10.6

$y = x^2 + 3x + 2$ రేఖాచిత్రమును గీచి మరియు దానిని ఉపయోగించి $x^2 + 2x + 4 = 0$ సాధించుము.

సాధన

మొదట, $y = x^2 + 3x + 2$ కు పట్టికను ఏర్పరచుము.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9
$3x$	–12	–9	–6	–3	0	3	6	9
2	2	2	2	2	2	2	2	2
y	6	2	0	0	2	6	12	20

(–4, 6), (–3, 2), (–2, 0), (–1, 0), (0, 2), (1, 6), (2, 12) మరియు (3, 20) బిందువులను గుర్తించుము.

ఇపుడు, బిందువులను కలుపుతూ వక్రరేఖను గీయుము. ఏర్పడిన వక్రరేఖ $y = x^2 + 3x + 2$ యొక్క రేఖా చిత్రము.

ఇపుడు, $x^2 + 2x + 4 = 0$

$\Longrightarrow \quad x^2 + 3x + 2 - x + 2 = 0$

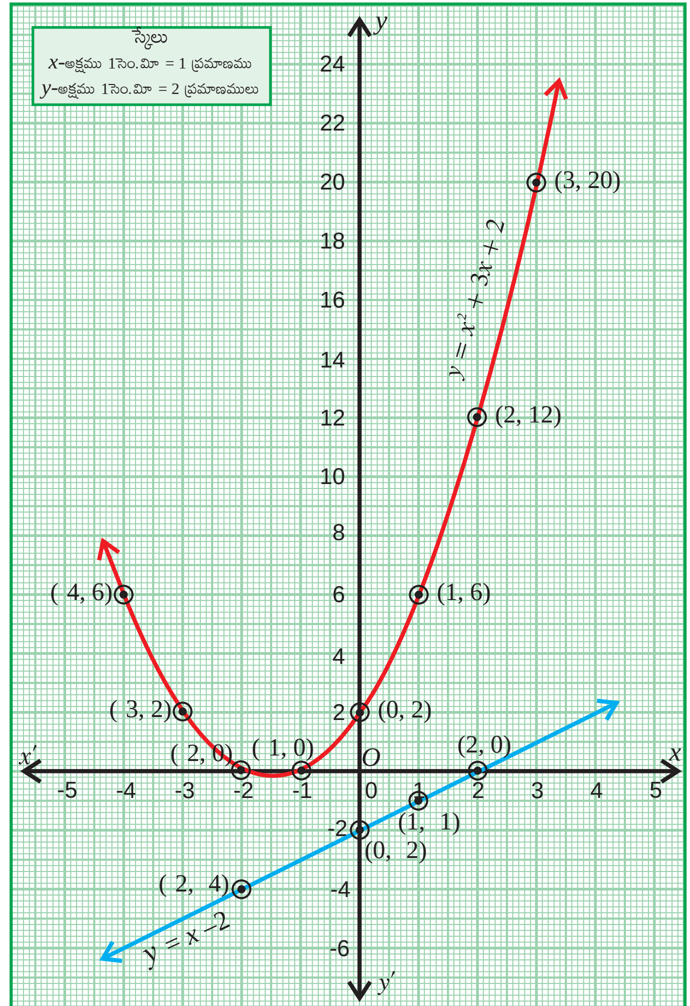
$\Longrightarrow \quad y = x - 2 \quad \because y = x^2 + 3x + 2$

కావున, $y = x - 2$ మరియు $y = x^2 + 3x + 2$ యొక్క ఖండన బిందువుల ద్వారా $x^2 + 2x + 4 = 0$ యొక్క మూలములు పొందవచ్చును.

$y = x - 2$ సరళరేఖా చిత్రమును గీయుము.

ఇపుడు, $y = x - 2$ సరళరేఖకు పట్టికను ఏర్పరచుము.

x	–2	0	1	2
$y = x - 2$	–4	–2	–1	0



పటము. 10.6

$y = x - 2$ అను సరళరేఖ $y = x^2 + 3x + 2$ అను వక్రరేఖను ఖండించుట లేదు. కావున $x^2 + 2x + 4 = 0$ కి వాస్తవ మూలములు లేవు.

అభ్యాసము 10.1

1. క్రింది ప్రమేయములకు రేఖాచిత్రము గీయుము.
   (i) $y = 3x^2$
   (ii) $y = -4x^2$
   (iii) $y = (x+2)(x+4)$
   (iv) $y = 2x^2 - x + 3$
2. క్రింది సమీకరణములను రేఖా చిత్రము ద్వారా సాధించుము.
   (i) $x^2 - 4 = 0$
   (ii) $x^2 - 3x - 10 = 0$
   (iii) $(x-5)(x-1) = 0$
   (iv) $(2x+1)(x-3) = 0$
3. $y = x^2$ రేఖా చిత్రమును గీచి, దీని ద్వారా $x^2 - 4x - 5 = 0$ ను సాధించుము.
4. $y = x^2 + 2x - 3$ రేఖా చిత్రమును గీచి, దీని ద్వారా $x^2 - x - 6 = 0$ యొక్క మూలములు కనుగొనుము.
5. $y = 2x^2 + x - 6$ రేఖా చిత్రమును గీచి, దీని ద్వారా $2x^2 + x - 10 = 0$ ను సాధించుము.
6. $y = x^2 - x - 8$ రేఖా చిత్రమును గీచి, దీని ద్వారా $x^2 - 2x - 15 = 0$ యొక్క మూలములు కనుగొనుము.
7. $y = x^2 + x - 12$ రేఖా చిత్రమును గీచి, దీని ద్వారా $x^2 + 2x + 2 = 0$ ను సాధించుము.

10.3 కొన్ని ప్రత్యేక రేఖా చిత్రములు (Some Special Graphs)

ఈ భాగమునందు (i) అనులోమ చలత్వము (Direct variation) (ii) విలోమ చలత్వము (Indirect variation) లో చలరాశులున్నపుడు రేఖాచిత్రములు ఎట్లు గీయుదుమో తెలుసుకొనబోవుచున్నాము.

y అనునది x కు అనులోమాను పాతములోనున్నట్లయిన $y = kx$ అగును, k అనునది ధనాత్మకము. ఈ సందర్భమున చలరాశులు అనులోమ చలత్వములోనున్నట్లు మరియు వాటి రేఖాచిత్రమును ఒక సరళరేఖ అని చెప్పవచ్చును.

y అనునది x కు విలోమానుపాతములో ఉన్నట్లయిన $y = \frac{k}{x}$ అగును, k అనునది ధనాత్మకము. ఈ సందర్భమున చలరాశులు విలోమచలత్వములో నున్నట్లు మరియు రేఖాచిత్రము ఒక సున్నిత వక్రరేఖ అగును. దీనినే దీర్ఘ చతురస్రాకార అతి పరావలయము అని చెప్పవచ్చును. (దీర్ఘ చతురస్రాకార అతి పరావలయ సమీకరణ రూపము $xy = k,\ k > 0$.)

ఉదాహరణ 10.7

క్రింద ఇవ్వబడిన పట్టికకు రేఖా చిత్రమును గీయుము మరియు చలత్వమును గుర్తించుము.

x	2	3	5	8	10
y	8	12	20	32	40

మరియు, $x = 4$ అయినప్పుడు y విలువను కనుగొనుము.

సాధన

పట్టిక నుండి, x అధికమైనప్పుడు y కూడా అధికమగుటను గమనింపవచ్చును. కావున, ఈ చలత్వమును అనులోమ చలత్వమగును.

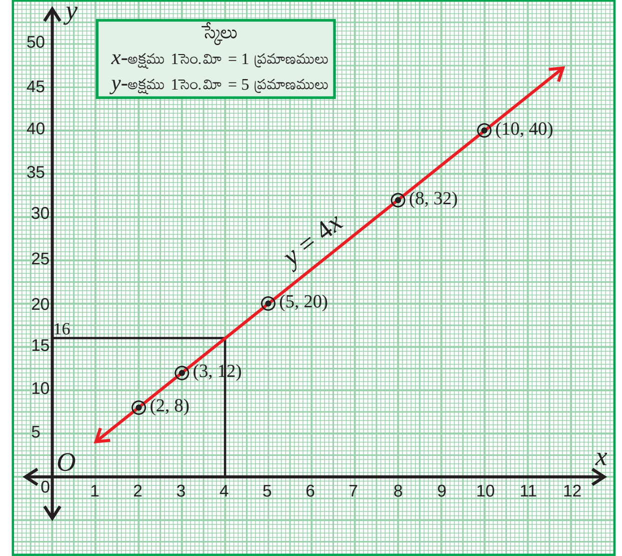
$y = kx$ అనుకొనిన

$\implies \frac{y}{x} = k$

ఇందు k అనునది అనుపాత స్థిరాంకము.

ఇచ్చిన విలువల నుండి

$k = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \cdots = \frac{40}{10}$. $\therefore k = 4$



పటము. 10.7

$y = 4x$ అను సంబంధము ఒక సరళరేఖాచిత్రమగును.

(2, 8), (3, 12), (5, 20), (8, 32) మరియు (10, 40) బిందువులను గుర్తించి, ఈ బిందువులను కలుపుట ద్వారా సరళరేఖ ఏర్పడును.

$x = 4$ అయినపుడు $y = 4x = 16$ అని స్పష్టమగుచున్నది.

ఉదాహరణ 10.8

ఒక ద్విచక్రవాహన దారుడు సమ వేగముతో స్థలము A నుండి స్థలము B వరకు వేర్వేరు రోజులలో అదే మార్గము గుండా ప్రయాణము చేసెను. అతని ప్రయాణ వేగము మరియు దూరమును చేరుటకు తీసుకొన్న అనురూప కాలము క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది.

వేగము కి.మీ/గం॥లో x	2	4	6	10	12
కాలము గం॥లో y	60	30	20	12	10

వేగము – కాలము రేఖాచిత్రమును గీచి మరియు దానిని ఉపయోగించి

(i) అతని ప్రయాణ వేగము 5 కి.మీ/గం అయినపుడు తీసుకొను ప్రయాణ కాలమును,

(ii) అతను 40 గం॥లలో దూరమును చేరుటకు అతని ప్రయాణ వేగమును కనుగొనుము.

సాధన

పట్టిక నుండి, x అధికమైన y తగ్గుటను గమనింపుము. ఈ రకమైన చలత్వమును విలోమ చలత్వము అందురు.

ఇచ్చుట, $xy = 120$.

కనుక, $y = \frac{120}{x}$.

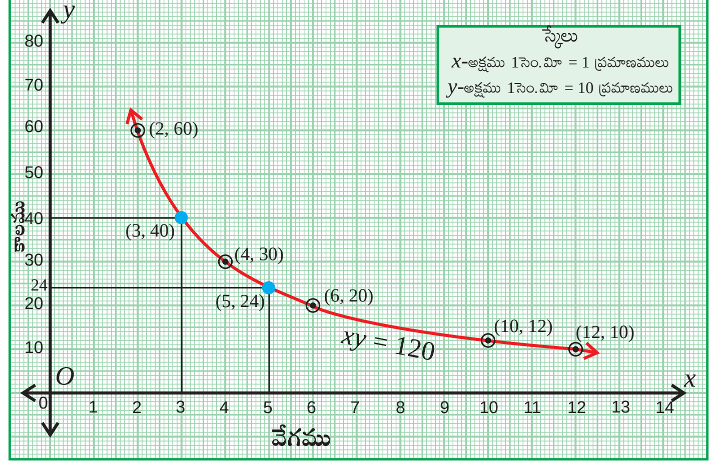
(2 , 60), (4 , 30), (6 , 20), (10 , 12) మరియు (12 , 10) బిందువులను గుర్తింపుము.

ఈ బిందువులను కలుపుటచే వక్రరేఖ ఏర్పడును.

రేఖా చిత్రము నుండి,

(i) 5 కి.మీ/గం వేగముతో ప్రయాణము చేసిన అతని ప్రయాణకాలము 24 గం॥ అగును.

(ii) 40 గం॥లలో గమ్యస్థానము చేరుటకు కావలసిన వేగము 3 కి.మీ/గం అగును.



పటము. 10.8

ఉదాహరణ 10.9

ఒక బ్యాంకు (bank) వృద్ధ పౌరులకు (Senior Citizens) నిర్దిష్ట ఖాతాలపై (Deposits) 10% సాధారణ వడ్డీని ఇచ్చును. ఒక సంవత్సరమునకు నిర్దిష్ట ఖాతాల మొత్తమునకు మరియు లభించు వడ్డీల మధ్య గల సంబంధమును తెలుపు రేఖా చిత్రమును గీయుము. దాని ద్వారా

(i) నిర్ధిష్ట ఖాతా ₹ 650 కు లభించు వడ్డీ

(ii) ₹45 వడ్డీ లభించుటకు చేయవలసిన నిర్ధిష్ట ఖాతా మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన క్రింది పట్టికను ఏర్పరచుము.

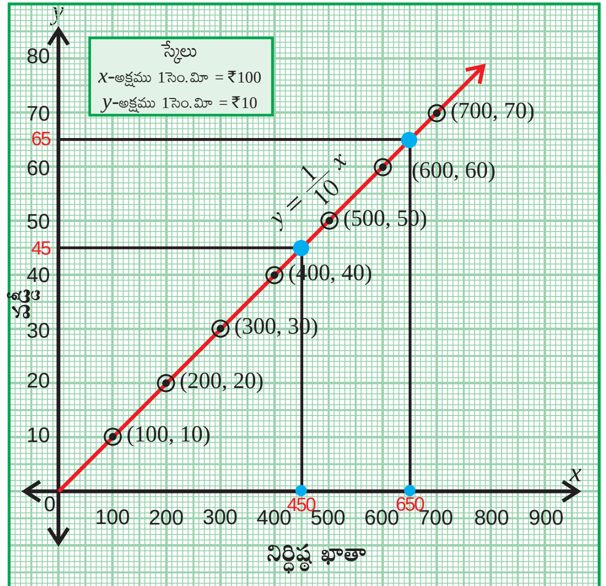
నిర్ధిష్ట ఖాతా ₹ x	100	200	300	400	500	600	700
S.I. సంపాదించు ₹ y	10	20	30	40	50	60	70

$y = \frac{1}{10}x$ మరియు ఈ రేఖా చిత్రము ఒక సరళరేఖయని స్పష్టమగుచున్నది.

పట్టికలో ఇచ్చిన బిందువులనుపయోగించి రేఖా చిత్రమును గీయుము. రేఖా చిత్రము నుండి

(i) నిర్ధిష్ట ఖాతా ₹650 లకు వడ్డీ ₹65

(ii) ₹45 వడ్డీ వచ్చుటకు కావలసిన నిర్ధష్ట ఖాతా ₹450 అగును.



పటము. 10.9

అభ్యాసము 10.2

1. ఒక బస్సు గంటకు 40 కి.మీ వేగముతో ప్రయాణించును. దూరము – కాలముల సూత్రమును వ్రాసి, వాటి రేఖా చిత్రమును గీయుము, దాని ద్వారా 3 గంటలలో ప్రయాణించిన దూరమును కనుగొనుము.

2. కొనబడిన నోటు పుస్తకముల సంఖ్య మరియు ధరలు క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడెను.

నోటు పుస్తకముల సంఖ్య x	2	4	6	8	10	12
ధర ₹ y	30	60	90	120	150	180

రేఖా చిత్రమును గీచి దాని ద్వారా (i) ఏడు పుస్తకముల ధరను కనుగొనుము.
(ii) ₹ 165 లకు ఎన్ని నోటు పుస్తకములను కొనవచ్చును.

3.

x	1	3	5	7	8
y	2	6	10	14	16

పై పట్టికకు రేఖా చిత్రమును గీయుము మరియు దాని ద్వారా

(i) $x = 4$ అయిన y విలువ.

(ii) $y = 12$ అయిన x విలువ కనుగొనుము.

4. ఒక లీటరు పాల ధర ₹ 15. పాల పరిమాణము మరియు ధరల సంబంధమును తెలుపు రేఖా చిత్రమును గీయుము. దాని ద్వారా

(i) అనుపాత స్థిరాంకమును.

(ii) 3 లీటర్ల పాలధరను కనుగొనుము.

5. $xy = 20$, $x, y > 0$ ఉండునట్లు రేఖా చిత్రమును గీయుము. రేఖా చిత్రమును ఉపయోగించి $x = 5$ అయినపుడు y మరియు $y = 10$ అయినపుడు x విలువలను కనుగొనుము.

6.

పని వారి సంఖ్య x	3	4	6	8	9	16
రోజుల సంఖ్య y	96	72	48	36	32	18

పట్టికలో ఇచ్చిన వివరములకు రేఖా చిత్రమును గీయుము. దాని ద్వారా పనిని పూర్తిచేయుటకు 12 మంది పనివారు తీసుకొను రోజుల సంఖ్యను కనుగొనుము.

గుర్తుంచుకొనదగిన చలోక్తులు:

1. గణితశాస్త్రంలో ప్రశ్న ఏర్పరుచుట అనునది దానిని సాధించుటకన్నా మిన్న–**జార్జ్‌కేంటర్.**
2. గణితశాస్త్రంలోని సూత్రములన్నీ సంపూర్ణంగా ఆనందపరచునదియేగాక వివాదములకు చాలా దూరములో నుండును. కానీ విజ్ఞానశాస్త్రములోని సూత్రములన్నీ కొంతవరకు వివాదాత్మకమైనవి. క్రొత్తగా కనుగొను సూత్రములు మునుపటి సూత్రములను తొలగించుచున్నది–**ఆల్‌బర్ట్ ఐన్‌స్టీన్**

11

సాంఖ్యక శాస్త్రము

"It is easy to lie with statistics. It is hard to tell the truth without it"
-Andrejs Dunkels

- పరిచయము
- విస్తరణ కొలత
  - వ్యాప్తి
  - క్రమచలనము
  - విచలనము
- విచలన గుణకము



కార్ల్ పియర్ సన్

(1857-1936)

ఇంగ్లాండ్

బ్రిటీష్ సాంఖ్యక శాస్త్రవేత్త కార్ల్ పియర్‌సన్ సాంఖ్యక శాస్త్రము యొక్క ఆధునిక క్షేత్రమును స్థాపించెను. సాంఖ్యకశాస్త్ర గణితమును అభివృద్ధి చేయుటకు అతను నిర్ణయించెను. భౌతిక శాస్త్రము నుండి బలభ్రామకము అను అంశమును ఇతను పరిచయం చేసెను.

"The Grammer of Science" అను అతని పుస్తకములో ఆ తరువాతి ఐన్‌స్టీన్ సిద్ధాంతములు మరియు ఇతర శాస్త్రవేత్తల ఉద్దేశ్యములను ముందే ఉంచెను.

11.1 పరిచయము

క్రాక్స్‌టన్ మరియు కౌడెన్ ప్రకారము సాంఖ్యక శాస్త్రము అనునది ఒక సంఖ్యాత్మక దత్తాంశమును సేకరించుట, నివేదించుట, విశ్లేషించుట మరియు వివరించుట. R.A. ఫిషర్ ప్రకారం సాంఖ్యక శాస్త్రము అనునది గణిత శాస్త్రములో ఒక తప్పనిసరి భాగము మరియు సేకరించిన దత్తాంశమును గణితరూపేణ అన్వయించుటయని తెలియజేసెను.

హోరేస్ సెకరిస్ట్ ప్రకారము "సాంఖ్యక శాస్త్రము అనునది విపరీతమైన కారణాల వలన ఏర్పడిన సంబంధాలను సంఖ్యాత్మకముగా తెలియజేయునది, ఖచ్చితత్వమును అంచనావేయుటకు, కొన్ని అంచనాల ను ముందుగానే తెలుసుకొనుటకు క్రమాను సారముగా సేకరించిన దత్తాంశమును ముందే నిశ్చయించిన ఉద్దేశ్యము ప్రకారము ఒకదాని కొకటి సంబంధము వుండు విధంగా ఉంచుదురు."

J.F. భేరాన్ తన " Elements of Universal Erudiation" లో మొట్టమొదట స్టాటిస్టిక్స్ అను పదమును తెలిపి ఉపయోగించెను. నవీన కాలములో సాంఖ్యక శాస్త్రము అనునది కేవలం దత్తాంశమును సేకరించుట మరియు వాటిని పట్టికలలో మరియు పటములలో నివేదించుట మాత్రము కాదు. ఇది విజ్ఞానశాస్త్రమును అలుముకొని సేకరించిన మొత్తము దత్తాంశ తుది నిర్ణయము క్లిష్టతరమైనను దానికొక ముగింపు ఇచ్చుచున్నది.

కేంద్రస్థానపు కొలతలైన అంకమధ్యమము, మధ్యగతము మరియు బాహుళకములను గూర్చి ఇదివరకే నేర్చుకొంటిమి. ఇవి విభాజము యొక్క కేంద్రభాగపు రీత్యా దత్తాంశముపై ఏకాగ్రతతో ఆలోచించునట్లు చేసినది.

కేవలం ఈ కేంద్రస్థానపు కొలతలలోని జ్ఞానము, విభాజనమును గూర్చి పరిపూర్ణ ఆలోచనివ్వడంలేదు. ఉదాహరణకు ఈ క్రింది రెండు వేర్వేరు శ్రేణులను గమనింపుము. (i) 82, 74, 89, 95 మరియు (ii) 20, 62, 28, 30. ఈ రెండు విభాజనములు 85 ను

అంకమధ్యమముగా కలిగియున్నవి. మొదటిదానిలోని అంకెలు అంకమధ్యమము 85 కు చాలా దగ్గరలో నున్నది, కానీ రెండవ శ్రేణిలోమి సంఖ్యలు అంకమధ్యమము 85 కు చాలా దూరముగా వెదజల్లబడియున్నది. కావున కేంద్రస్థానపు కొలతలు మనల్ని తప్పు ద్రోవ పట్టించవచ్చు. అంకమధ్యమము చుట్టు గల అంశములు ఏ విధంగా విస్తరణ చెందియున్నవో తెలుసుకొనుటకు మనకు అవసరమగుచున్నది.

11.2 విస్తరణ కొలతలు (Measures of dispersion)

విస్తరణ కొలతలు, విభాజనములోని దత్తాంశము ఏ విధంగా వెదజల్లబడియున్నదో అను అభిప్రాయము తెలుయజేయును. వ్యాప్తి (R), చతుర్థాంశక విచలనము (Q.D), అంకమధ్య విచలనము (M.D) మరియు క్రమ విచలనము (S.D) అనునది విస్తరణ కొలతలు. ఇక్కడ, మనము కొన్నింటిని విపులముగా నేర్చుకొనెదము.

11.2.1 వ్యాప్తి (Range)

వ్యాప్తి అనునది విచరణ మానములో అతి తేలికగా గణించగలిగినది. ఒక సంఖ్యల సమితిలోని గరిష్ఠ అంశమునకు, కనిష్ఠ అంశమునకు గల బేధమును వ్యాప్తియందురు.

$\therefore$ వ్యాప్తి = గరిష్ఠ విలువ – కనిష్ఠ విలువ

$= L - S.$

వ్యాప్తి గుణకము $= \dfrac{L-S}{L+S}$

ఉదాహరణ 11.1

దత్తాంశము 43, 24, 38, 56, 22, 39, 45 నకు వ్యాప్తి మరియు వ్యాప్తి గుణకమును కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన దత్తాంశమును ఆరోహణ క్రమములో అమర్చగా

22, 24, 38, 39, 43, 45, 56.

ఇవ్వబడిన దత్తాంశము నుండి గరిష్ఠ విలువ, $L = 56$ మరియు కనిష్ఠ విలువ, $S = 22$.

$\therefore$ వ్యాప్తి $= L - S$

$= 56 - 22 = 34$

వ్యాప్తి గుణకము $= \dfrac{L-S}{L+S}$

$= \dfrac{56-22}{56+22} = \dfrac{34}{78} = 0.436.$

ఉదాహరణ 11.2

ఒక తరగతిలోని 13 మంది విద్యార్థుల బరువులు (కి.గ్రా.లలో) 42.5, 47.5, 48.6, 50.5, 49, 46.2, 49.8, 45.8, 43.2, 48, 44.7, 46.9, 42.4. అయిన వ్యాప్తి, వ్యాప్తి గుణకమును కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన దత్తాంశమును ఆరోహణ క్రమములో అమర్చగా

42.4, 42.5, 43.2, 44.7, 45.8, 46.2, 46.9, 47.5, 48, 48.6, 49, 49.8, 50.5

ఇవ్వబడిన దత్తాంశము నుండి గరిష్ఠ విలువ $L = 50.5$ మరియు కనిష్ఠ విలువ $S = 42.4$.

వ్యాప్తి $= L - S = 50.5 - 42.4 = 8.1.$

వ్యాప్తి గుణకము $= \dfrac{L-S}{L+S} = \dfrac{50.5-42.4}{50.5+42.4} = \dfrac{8.1}{92.9}$

$= 0.087.$

ఉదాహరణ 11.3

ఒక దత్తాంశములోని గరిష్ఠ విలువ 7.44 మరియు వ్యాప్తి 2.26 అయిన కనిష్ఠ విలువ కనుగొనుము.

సాధన వ్యాప్తి = గరిష్ఠ విలువ – కనిష్ఠ విలువ

$\Longrightarrow$ 7.44 – కనిష్ఠ విలువ = 2.26

$\therefore$ కనిష్ఠ విలువ = 7.44 – 2.26 = 5.18.

11.2.2 క్రమ విచలనము (Standard deviation)

దత్తాంశమును సరాసరి చేయుటకు ముందు, ప్రతి అంశమును దాని అంకమధ్యమమునకు గల బేధములను వర్గపరచి విస్తరణను కొలుచుటయే సరైన మార్గము. ఈ విస్తరణ మానమునే విస్తృతి అని అందురు. ఈ విస్తృతి యొక్క ధనాత్మక వర్గమూలమును క్రమవిచలనము అని అందురు. విస్తృతి ఎల్లప్పుడు ధనాత్మకముగా నుండును.

గాస్ ఉపయోగించిన "అంకమ దోషము" (Mean Error) అను పదమునకు బదులు "క్రమవిచలనము" అను పదమును మొట్ట మొదట 1894 లో కార్ల్ పియర్సన్ చే ఉపయోగించబడినది.

క్రమవిచలనము దత్తాంశములోని అదే ప్రమాణముతో వ్యక్తపరుచును. ఇది అంకమధ్యమము నుండి ఎంత విచలనము చెందియున్నదో చూపును. క్రమవిచలనము కనిష్ఠముగా ఉండిన, దత్తాంశ విలువలు అంకమధ్యమమునకు అతి సమీపమున ఉండును. అదే విధంగా క్రమవిచలనము గరిష్ఠముగా ఉండిన దత్తాంశ విలువలు అంకమధ్యమము నుండి చాలా దూరములో వ్యాపించి యుండును.

విభాజన అంకమధ్యమము మరియు క్రమవిచలనములను క్రమముగా $\overline{x}$ మరియు σ లతో సూచించెదము. దత్తాంశ స్వభావమును ఆధారముగా చేసుకొని క్రమవిచలనము σ (ఇవ్వబడిన దత్తాంశమును ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమములో అమర్చిన పిదప) ను క్రింది సూత్రములను (నిరూపణ ఇవ్వలేదు) ఉపయోగించి వివిధ పద్ధతులలో గణించెదము.

దత్తాంశము	ప్రత్యక్ష పద్ధతి	నిజ అంక మధ్య పద్ధతి	ఉజ్జాయింపు అంకమధ్య పద్ధతి	సోపాన విచలన పద్ధతి
వర్గీకరించబడిన	$\sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$	$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$ $d = x - \overline{x}$	$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$ $d = x - A$	$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2} \times c$ $d = \frac{x-A}{c}$
వర్గీకరించబడని		$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$	$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$	$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2} \times c$

గమనిక n అంశముల (సంఖ్యల) సముదాయములో, ఎల్లప్పుడూ $\sum(x-\overline{x}) = 0$, $\sum x = n\overline{x}$ మరియు $\sum \overline{x} = n\overline{x}$ గా నుండును.

(i) ప్రత్యక్ష పద్ధతి (Direct method)

అంశముల యొక్క వర్గములు సులభముగా లభించినట్లయితే ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించెదము.

ఉదాహరణ 11.4

ఒక నెలలో 8 మంది విద్యార్థులు చదివిన పుస్తకముల సంఖ్య 2, 5, 8, 11, 14, 6, 12, 10. ఈ దత్తాంశమునకు క్రమవిచలనము గణించుము.

సాధన

x	x^2
2	4
5	25
6	36
8	64
10	100
11	121
12	144
14	196
$\sum x=68$	$\sum x^2=690$

ఇక్కడ అంశముల సంఖ్య, $n = 8$

క్రమవిచలనము, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{690}{8} - \left(\frac{68}{8}\right)^2}$

$= \sqrt{86.25 - (8.5)^2}$

$= \sqrt{86.25 - 72.25}$

$= \sqrt{14} \simeq 3.74.$

(ii) నిజ అంకమధ్యమ పద్ధతి (Actual mean method)

అంకమధ్యమము భిన్న రూపము లేని పక్షంలో అనగా పూర్ణాంకముగా నున్నపుడు ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించవచ్చు.

క్రమ విచలనము, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x-\overline{x})^2}{n}}$ లేక $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$ ఇక్కడ $d = x - \overline{x}$.

ఉదాహరణ 11.5

ఒక తరగతిలో సాధారణ పరిజ్ఞానముపై పరీక్ష జరపబడినది. 6 మంది విద్యార్థులు 40 మార్కులకు, 20, 14, 16, 30, 21, 25 మార్కులను పొందిరి. ఈ దత్తాంశమునకు క్రమవిచలనమును కనుగొనుము.

సాధన అంకమధ్యమము $= \frac{\sum x}{n} = \frac{20+14+16+30+21+25}{6}$

$\Longrightarrow \quad \overline{x} = \frac{126}{6} = 21.$

ఇప్పుడు పట్టికను ఏర్పరిచెదము.

x	$d = x - \overline{x}$	d^2
14	-7	49
16	-5	25
20	-1	1
21	0	0
25	4	16
30	9	81
$\sum x = 126$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 172$

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\frac{172}{6}}$

$= \sqrt{28.67}$

కావున, $\sigma \simeq 5.36$.

(iii) ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమ పద్ధతి (Assumed mean method)

ఇవ్వబడిన దత్తాంశము యొక్క అంకమధ్యమము పూర్ణాంకముగా లేని పక్షంలో క్రమవిచలనమును గణించుటకు ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమ పద్ధతిని ఉపయోగించెదము. వీలైనంత వరకు $x–A$ అనునది చిన్నదిగాను, పూర్ణాంకముగాను ఉండునట్లు ఒక సరైన అంశము A ని ఎన్నుకొనవలెను. ఇక్కడ A ని ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమము అని అందురు. ఇది అనేకముగా అంకమధ్యమమునకు దగ్గరగా నుండును.

విచలనమును $d = x–A$ నుపయోగించి గణించెదము.

$$\text{క్రమవిచలనము, } \sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}.$$

గమనిక

ప్రత్యక్ష పద్ధతి యొక్క సూక్ష్మీకరణ రూపములే ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమ పద్ధతి మరియు సోపాన విచలన పద్ధతి అగును.

ఉదాహరణ 11.6

62, 58, 53, 50, 63, 52, 55 అను సంఖ్యల క్రమవిచలనమును కనుగొనుము.

సాధన A=55 ని ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమముగా తీసుకొని క్రింది పట్టికను తయారుచేసెదము.

x	$d = x - A$ $= x - 55$	d^2
50	-5	25
52	-3	9
53	-2	4
55	0	0
58	3	9
62	7	49
63	8	64
	$\sum d = 8$	$\sum d^2 = 160$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{160}{7} - \left(\frac{8}{7}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{160}{7} - \frac{64}{49}}$$

$$= \sqrt{\frac{1056}{49}}$$

$$= \frac{32.49}{7}$$

$\therefore$ క్రమ విచలనము $\sigma \simeq 4.64$

(iv) సోపాన విచలన పద్ధతి (Step deviation method)

దత్తాంశములోని అంశములు పెద్దవిగాను, ఒక ఉమ్మడి కారణాంకము కలిగియున్నపుడు ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించి క్రమవిచలనము కనుగొనెదము. మొదట ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమము A ని ఎన్నుకొని, $d = \frac{x-A}{c}$ సూత్రమును ఉపయోగించి d ని కనుగొనెదము. ఇచట c అనునది $x–A$ లోని అన్ని విలువలకు ఉమ్మడి కారణాంకము. ఈ పద్ధతిలో క్రమవిచలనము కనుగొనుటకు ఉపయోగపడు సూత్రము

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2} \times c.$$

ఉదాహరణ 11.7

గణిత శాస్త్రము పరీక్షలో 10 మంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులు 80, 70, 40, 50, 90, 60, 100, 60, 30, 80. అయిన క్రమవిచలనమును కనుగొనుము.

సాధన పై దత్తాంశమును పరిశీలించిన అన్ని విలువలకు 10 ఉమ్మడి కారణాంకముగా ఉన్నది. $A = 70$ ని ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమముగా తీసుకొనుము.

ఇక్కడ విలువల సంఖ్య, $n = 10$.

$c = 10$ గా తీసుకొనిన, $d = \frac{x - A}{10}$ అగును. కావున పట్టికను ఏర్పరిచెదము.

x	$d = \frac{x-70}{10}$	d^2
30	-4	16
40	-3	9
50	-2	4
60	-1	1
60	-1	1
70	0	0
80	1	1
80	1	1
90	2	4
100	3	9
	$\sum d = -4$	$\sum d^2 = 46$

ఇప్పుడు $$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{46}{10} - \left(\frac{-4}{10}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{\frac{46}{10} - \frac{16}{100}} \times 10 = \sqrt{\frac{460 - 16}{100}} \times 10$$

$\therefore$ క్రమ విచలనము, $\sigma \simeq 21.07$.

సేకరించిన దత్తాంశమునకు క్రమ విచలనము పొందుటకు పై నాలుగు పద్ధతులలోని ఏదేని ఒక పద్ధతిని ఉపయోగించవచ్చు. అవి ప్రత్యక్ష పద్ధతి, నిజ అంకమధ్య పద్ధతి, ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమ పద్ధతి మరియు సోపాన విచలన పద్ధతి. మనమనుకున్నట్లు, ఒకే దత్తాంశమునకు వేర్వేరు పద్ధతులలో σ సమాధానములు వేర్వేరుగా నుండదు. ఈ నిజమును క్రింది ఉదాహరణతో విశదపరిచెదము. పై పద్ధతులలోని ఏదేని ఒక పద్ధతిని పాటించమని విద్యార్థులకు సూచించడమైనది.

ఫలితములు

(i) విభాజములోని ప్రతి విలువకు ఏదేని ఒక రాశిని కూడుట లేక తీసివేయుట వలన క్రమవిచలనములో ఎటువంటి మార్పుండదు.

(ii) దత్తాంశములోని ప్రతి విలువను శూన్యేతర స్థిరసంఖ్య k తో గుణించిన లేక భాగించిన, క్రొత్తగా ఏర్పడు దత్తాంశము యొక్క క్రమవిచలనమును కూడా k తో గుణించుట లేక భాగించుట చేయవలెను.

ఉదాహరణ 11.8

3, 5, 6, 7 దత్తాంశమునకు క్రవిచలనము కనుగొనుము. ఆ తర్వాత ప్రతి విలువకు 4 ను కూడగా వచ్చు దత్తాంశము యొక్క క్రమవిచలనమును కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన దత్తాంశము 3, 5, 6, 7

$A = 6$ గా తీసుకొనుము.

x	$d = x - 6$	d^2
3	−3	9
5	−1	1
6	0	0
7	1	1
	$\sum d = -3$	$\sum d^2 = 11$

క్రమవిచలనము, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{11}{4} - \left(\frac{-3}{4}\right)^2}$

$\sigma = \sqrt{\frac{11}{4} - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{35}}{4}$

ఇచ్చిన దత్తాంశము యొక్క ప్రతి విలువకు 4 ను కూడగా వచ్చు దత్తాంశము 7, 9, 10, 11.

$A = 10$ ని తీసుకొనుము

x	$d = x - 10$	d^2
7	−3	9
9	−1	1
10	0	0
11	1	1
	$\sum d = -3$	$\sum d^2 = 11$

క్రమవిచలనము $\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{11}{4} - \left(\frac{-3}{4}\right)^2}$

$\sigma_1 = \sqrt{\frac{11}{4} - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{35}}{4}$

పై ఉదాహరణ నుండి తెలియునది ఏమనగా దత్తాంశములోని ప్రతి విలువకు, స్థిరాంకము 4 ను కూడగా క్రమవిచలనములో మార్పులేదు.

ఉదాహరణ 11.9

40, 42, 48 ల క్రమవిచలనమును కనుగొనుము. ప్రతి విలువను 3 చే గుణించగా ఏర్పడు దత్తాంశమునకు క్రమవిచలనము కనుగొనుము.

సాధన ఇచ్చిన దత్తాంశము 40, 42, 48

$A = 4$ ని ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమముగా తీసుకొనుము

x	$d = x - 44$	d^2
40	−4	16
42	−2	4
48	4	16
	$\sum d = -2$	$\sum d^2 = 36$

క్రమవిచలనము, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$

$\sigma = \sqrt{\frac{36}{3} - \left(\frac{-2}{3}\right)^2}$

$= \frac{\sqrt{104}}{3}$

విలువలను 3 చే గుణించగా కొత్త దత్తాంశము 120, 126, 144.

$A = 132$ ని ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమముగా తీసుకొనుము

x	$d = x - 132$	d^2
120	−12	144
126	−6	36
144	12	144
	$\sum d = -6$	$\sum d^2 = 324$

క్రమవిచలనము, $= \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{324}{3} - \left(\frac{-6}{3}\right)^2}$

$\sigma_1 = \sqrt{\frac{312}{3}} = \sqrt{104}$

పై ఉదాహరణ నుండి తెలియునది ఏమనగా ప్రతి విలువను 3 చే గుణించగా క్రమవిచలనమును 3 చే గుణించబడినది.

ఉదాహరణ 11.10

మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల క్రమవిచలనము $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$ అని నిరూపించుము.

సాధన మొదటి n సహజ సంఖ్యలు $1, 2, 3, \cdots, n$.

వాటి అంకమధ్యమము,
$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}.$$

మొదటి n సహజ సంఖ్యల వర్గముల మొత్తము
$$\sum x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

క్రమవిచలనము
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\frac{(2n+1)}{3} - \frac{(n+1)}{2}\right]}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\frac{2(2n+1)-3(n+1)}{6}\right]}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{4n+2-3n-3}{6}\right)}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{6}\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}.$$

మొదటి n సహజ సంఖ్యల క్రమవిచలనము $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$.

సూచన

ఈ క్రింది వాటిని గమనింపుము:

d సామాన్య భేదము గల ఒక అంకశ్రేఢిలో n వరుస పదముల క్రమవిచలనము $\sigma = d\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$ కనుక,

(i) $i, i+1, i+2, \cdots, i+n$ ల క్రమ విచలనము $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$, $i \in \mathbb{N}$

(ii) n వరుస సరి పూర్ణాంకముల క్రమవిచలనము $\sigma = 2\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$, $n \in \mathbb{N}$

(iii) n వరుస బేసి పూర్ణాంకముల క్రమవిచలనము $\sigma = 2\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$, $n \in \mathbb{N}$

ఉదాహరణ 11.11

మొదటి 10 సహజ సంఖ్యల క్రమవిచలనమును కనుగొనుము.

సాధన మొదటి n సహజ సంఖ్యల క్రమవిచలనము $= \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$

మొదటి 10 సహజ సంఖ్యల క్రమవిచలనము

$$= \sqrt{\frac{10^2-1}{12}} = \sqrt{\frac{100-1}{12}} \simeq 2.87.$$

వర్గీకరించబడిన దత్తాంశమునకు క్రమవిచలనము (Standard Deviation of grouped data)

(i) నిజ అంకమధ్యమ పద్ధతి (Actual Mean Method)

విచ్చిన్న దత్తాంశములో అమకమధ్యమము నుండి విచలనములను తీసుకొని క్రమవిచలనమును $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$, అను సూత్రమునుపయోగించి గణించవచ్చును. ఇందు $d = x - \overline{x}$.

ఉదాహరణ 11.12

గణిత శాస్త్రంలోని మౌఖిక ప్రశ్నల పోటీ (Quiz) కార్యక్రమంలో 48 మంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులను క్రింది పట్టికలో చూపబడినవి. అయిన క్రమవిచలనమును గణించుము.

దత్తాంశము x	6	7	8	9	10	11	12
పౌన:పున్యము f	3	6	9	13	8	5	4

సాధన ఇవ్వబడిన దత్తాంశమును ఉపయోగించి ఈ క్రింది పట్టికను రూపొందించుము.

x	f	fx	$d = x - \overline{x}$ $= x - 9$	fd	fd^2
6	3	18	-3	-9	27
7	6	42	-2	-12	24
8	9	72	-1	-9	9
9	13	117	0	0	0
10	8	80	1	8	8
11	5	55	2	10	20
12	4	48	3	12	36
	$\sum f = 48$	$\sum fx = 432$	$\sum d = 0$	$\sum fd = 0$	$\sum fd^2 = 124$

అంక మధ్యమము, $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{432}{48} = 9.$

క్రమవిచలనము, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$

$$= \sqrt{\frac{124}{48}}$$

$$= \sqrt{2.58} \simeq 1.61.$$

(ii) ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమ పద్ధతి (Assumed mean method)

విచలనములను ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమమునుండి తీసుకొనిన, క్రమవిచలనమును గణించుటకు సూత్రము

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd}{\Sigma f}\right)^2} \text{ ఇక్కడ } d = x - A.$$

ఉదాహరణ 11.13

క్రింది విభాజనమునకు క్రమవిచలనమును కనుగొనుము.

x	70	74	78	82	86	90
f	1	3	5	7	8	12

సాధన ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమము $A = 82$ గా తీసుకొనుము.

x	f	$d = x - 82$	fd	fd^2
70	1	-12	-12	144
74	3	-8	-24	192
78	5	-4	-20	80
82	7	0	0	0
86	8	4	32	128
90	12	8	96	768
	$\sum f = 36$		$\sum fd = 72$	$\sum fd^2 = 1312$

క్రమవిచలనము σ $= \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{1312}{36} - \left(\frac{72}{36}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{328}{9} - 2^2}$$

$$= \sqrt{\frac{328 - 36}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{292}{9}} = \sqrt{32.44}$$

$$\therefore \quad \sigma \simeq 5.7$$

ఉదాహరణ 11.14

క్రింది విభాజనమునకు విస్తృతిని కనుగొనుము.

తరగతి అంతరము	3.5–4.5	4.5–5.5	5.5–6.5	6.5–7.5	7.5–8.5
పౌన:పున్యము	9	14	22	11	17

సాధన ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమము $A = 6$ అనుకొనుము.

తరగతి అంతరము	మధ్యవిలువ x	f	$d = x - 6$	fd	fd^2
3.5–4.5	4	9	−2	−18	36
4.5–5.5	5	14	−1	−14	14
5.5–6.5	6	22	0	0	0
6.5–7.5	7	11	1	11	11
7.5–8.5	8	17	2	34	68
		$\sum f = 73$		$\sum fd = 13$	$\sum fd^2 = 129$

విస్తృతి, $\sigma^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2$

$$= \frac{129}{73} - \left(\frac{13}{73}\right)^2 = \frac{129}{73} - \frac{169}{5329}$$

$$= \frac{9417 - 169}{5329} = \frac{9248}{5329}$$

కావున, విస్తృతి $\sigma^2 \simeq 1.74.$

(iii) సోపాన విభజన పద్ధతి (Step deviation method)

ఉదాహరణ 11.15

అంతర్జాతీయ కాలి బంతి ఆటలలో 71 ప్రసిద్ధిగాంచిన ఆటగాళ్ళు చేసిన గోల్స్ సంఖ్య క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది. ఈ దత్తాంశమునకు క్రమవిచలనమును కనుగొనుము.

తరగతి అంతరము	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
పౌన:పున్యము	8	12	17	14	9	7	4

సాధన $A = 35$ అనుకొనుము. 4 వ నిలువ వరుసలోని అన్ని విలువల ఉమ్మడి కారణాంకము $c = 10$.

తరగతి అంతరము	మధ్యవిలువ x	f	x–A	$d = \frac{x-A}{c}$	fd	fd^2
0–10	5	8	−30	−3	−24	72
10–20	15	12	−20	−2	−24	48
20–30	25	17	−10	−1	−17	17
30–40	35	14	0	0	0	0
40–50	45	9	10	1	9	9
50–60	55	7	20	2	14	28
60–70	65	4	30	3	12	36
		$\sum f = 71$			$\sum fd = -30$	$\sum fd^2 = 210$

క్రమవిచలనము $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2} \times c$

$$= \sqrt{\frac{210}{71} - \left(\frac{-30}{71}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{\frac{210}{71} - \frac{900}{5041}} \times 10$$

$$= \sqrt{\frac{14910 - 900}{5041}} \times 10$$

$$= \sqrt{\frac{14010}{5041}} \times 10 = \sqrt{2.7792} \times 10$$

క్రమవిచలనము, $\sigma \simeq 16.67.$

ఉదాహరణ 11.16

సెంటీ మీటరుకు దగ్గరగా సవరించబడిన 40 ముక్కల తీగ పొడవులు క్రిందివ్వబడినవి. విస్తృతిని గణించుము.

పొడవు (సెం.మీ)	1–10	11–20	21–30	31–40	41–50	51–60	61–70
ముక్కల సంఖ్య	2	3	8	12	9	5	1

సాధన ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమము A = 35.5 అనుకొనుము.

పొడవు	మధ్యవిలువ x	ముక్కల సంఖ్య (f)	$d = x - A$	fd	fd^2
1–10	5.5	2	− 30	− 60	1800
11–20	15.5	3	− 20	− 60	1200
21–30	25.5	8	− 10	− 80	800
31–40	35.5	12	0	0	0
41–50	45.5	9	10	90	900
51–60	55.5	5	20	100	2000
61–70	65.5	1	30	30	900
		$\sum f = 40$		$\sum fd = 20$	$\sum fd^2 = 7600$

విస్తృతి, $\sigma^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2 = \frac{7600}{40} - \left(\frac{20}{40}\right)^2$

$$= 190 - \frac{1}{4} = \frac{760 - 1}{4} = \frac{759}{4}$$

$\therefore \quad \sigma^2 = 189.75.$

11.2.3 విచలన గుణకం (Coefficient of variation)

విచలన గుణకమును C.V = $\frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100$ అని నిర్వచించెదరు. ఇచ్చట σ మరియు $\overline{x}$ అనునది ఇవ్వబడిన దత్తాంశము యొక్క క్రమవిచలనము మరియు అంకమధ్యమము అగును. దీనినే సాపేక్ష క్రమవిచలనము అని అందురు.

సూచనలు

(i) రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ సేకరణల దత్తాంశ స్థిరత్వమును (consistency) పోల్చుటకు విచలన గుణకం ఉపయోగపడును.

(ii) విచలన గుణకం అధికముగా ఉన్నట్లయితే, ఆ దత్తాంశము తక్కువ స్థిరత్వమును కలిగియుండును.

(iii) విచలన గుణకం తక్కువగా ఉన్నట్లయితే, ఆ దత్తాంశము ఎక్కువ స్థిరత్వమును కలిగియుండును.

ఉదాహరణ 11.17

18, 20, 15, 12, 25. దత్తాంశమునకు విచలన గుణకమును కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన దత్తాంశము యొక్క అంకమధ్యమమును కనుగొనెదము.

$$\text{అంకమధ్యమము } \overline{x} = \frac{12 + 15 + 18 + 20 + 25}{5}$$

$$= \frac{90}{5} = 18.$$

x	$d = x - 18$	d^2
12	-6	36
15	-3	9
18	0	0
20	2	4
25	7	49
	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 98$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\frac{98}{5}}$$

$$= \sqrt{19.6} \simeq 4.427.$$

$$\therefore \text{ విచలన గుణకము } = \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100$$

$$= \frac{4.427}{18} \times 100 = \frac{442.7}{18}.$$

$$\therefore \text{ విచలన గుణకము } = 24.6$$

ఉదాహరణ 11.18

5 క్రికెట్ ఆటలలో ఇరువురు ఆటగాళ్ళు చేసిన పరుగులు క్రింద ఇవ్వబడినది. అయిన పరుగులు చేయుటలో ఎవరు స్థిరత్వమును కలిగియున్నారో కనుగొనుము.

ఆటగాడు A	38	47	34	18	33
ఆటగాడు B	37	35	41	27	35

సాధన

ఆటగాడు A

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
18	–16	256
33	–1	1
34	0	0
38	4	16
47	13	169
170	0	442

$$\bar{x} = \frac{170}{5} = 34$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{442}{5}} = \sqrt{88.4}$$

$$\simeq 9.4..$$

విచలన గుణకము, $C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

$$= \frac{9.4}{34} \times 100$$

$$= \frac{940}{34}$$

$$= 27.65.$$

$\therefore$ ఆటగాడు A చేసిన పరుగులకు

విచలన గుణకము = 27.65 (1)

ఆటగాడు B

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
27	–8	64
35	0	0
35	0	0
37	2	4
41	6	36
175	0	104

$$\bar{x} = \frac{175}{5} = 35$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{104}{5}} = \sqrt{20.8}$$

$$\simeq 4.6.$$

విచలన గుణకము

$$= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

$$= \frac{4.6}{35} \times 100$$

$$= \frac{460}{35} = \frac{92}{7} = 13.14.$$

$\therefore$ ఆటగాడు B చేసిన పరుగులకు

విచలన గుణకము = 13.14 (2)

(1) మరియు (1) ల నుంచి, B విచలన గుణకం A విచలన గుణకం కన్నా తక్కువగా ఉన్నది.

$\therefore$ పరుగులు చేయుటలో B ఆటగాడు స్థిరత్వమును కలిగియున్నాడు.

ఉదాహరణ 11.19

30 అంశముల అంకమధ్యమము 18 మరియు వాటి క్రమవిచలనము 3 అయిన అంశముల మొత్తం మరియు అంశముల వర్గముల మొత్తంను కనుగొనుము.

సాధన 30 అంశముల అంకమధ్యమము, $\bar{x} = 18$

30 అంశముల మొత్తం , $\sum x = 30 \times 18 = 540$ $\left(\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \right)$

క్రమవిచలనము, $\sigma = 3$ అని ఇవ్వబడినది.

$$\therefore \quad \sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sum x^2}{30} - 18^2 = 9$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sum x^2}{30} - 324 = 9$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x^2 - 9720 = 270$$

$$\sum x^2 = 9990$$

$\therefore \quad \sum x = 540$ మరియు $\sum x^2 = 9990.$

ఉదాహరణ 11.20

ఒక సమూహములోని 20 అంశముల అంకమధ్యమము మరియు క్రమవిచలనము క్రమముగా 40 మరియు 15 గా కనుగొనబడినది. వాటిని తిరిగి తనిఖీచేయునపుడు అంశము 43 ను 53 గా వ్రాసినట్లు కనుగొనబడినది. అయిన సరైన అంకమధ్యమము మరియు క్రమవిచలనము కనుగొనుము.

సాధన సరైన అంకమధ్యమమును కనుగొనెదము.

20 అంశముల అంకమధ్యమము, $\overline{x} = \dfrac{\sum x}{n} = 40$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sum x}{20} = 40$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x = 20 \times 40 = 800$$

ఇప్పుడు, సరైనది $\sum x = 800 + 43 - 53 = 790.$

$\therefore$ సరైన అంకమధ్యమము $= \dfrac{790}{20} = 39.5$ (1)

విస్తృతి $\sigma^2 = \dfrac{\sum x^2}{n} - \left(\dfrac{\sum x}{n}\right)^2 = 225$ (ఇవ్వబడినది)

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sum x^2}{20} - 40^2 = 225$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x^2 - 32000 = 225 \times 20 = 4500.$$

$$\therefore \quad \sum x^2 = 32000 + 4500 = 36500$$

సరైన $\sum x^2 = 36500 - 53^2 + 43^2 = 36500 - 2809 + 1849$

$= 36500 - 960 = 35540.$

ఇప్పుడు సరైన $\sigma^2 = \dfrac{\text{సరైన } \sum x^2}{n} - (\text{సరైన అంకమధ్యమము})^2$

$= \dfrac{35540}{20} - (39.5)^2$

$= 1777 - 1560.25 = 216.75.$

సరైన $\sigma = \sqrt{216.75} \simeq 14.72.$

$\therefore$ సరైన అంకమధ్యమము = 39.95 మరియు సరైన క్రమవిచలనము $\simeq$ 14.72.

ఉదాహరణ 11.21

ఒక సేకరించిన దత్తాంశములో $\sum x = 35$, $n = 5$, $\sum(x-9)^2 = 82$, అయిన $\sum x^2$ మరియు $\sum(x-\overline{x})^2$ లను కనుగొనుము.

సాధన $\sum x = 35$ మరియు $n = 5$ అని ఇవ్వబడినది.

$$\therefore \quad \overline{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{35}{5} = 7.$$

$\sum x^2$ ను కనుగొనెదము

$$\sum(x-9)^2 = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum(x^2 - 18x + 81) = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x^2 - \left(18\sum x\right) + \left(81\sum 1\right) = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x^2 - 630 + 405 = 82 \qquad \therefore \sum x = 35 \text{ మరియు } \sum 1 = 5$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x^2 = 307.$$

$\sum(x-\overline{x})^2$ ను కనుగొనుటకు,

$\sum(x-9)^2 = 82$ ను తీసుకొనెదము.

$$\Longrightarrow \quad \sum(x-7-2)^2 = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum[(x-7)-2]^2 = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum(x-7)^2 - 2\sum[(x-7)\times 2] + \sum 4 = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum(x-\overline{x})^2 - 4\sum(x-\overline{x}) + 4\sum 1 = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum(x-\overline{x})^2 - 4(0) + (4\times 5) = 82 \qquad \because \sum 1 = 5 \text{ మరియు } \sum(x-\overline{x}) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \sum(x-\overline{x})^2 = 62$$

$$\therefore \quad \sum x^2 = 307 \text{ మరియు } \sum(x-\overline{x})^2 = 62.$$

ఉదాహరణ 11.22

రెండు శ్రేణుల విచలన గుణకాలు 58 మరియు 69 వాటి క్రమవిచలనములు క్రమముగా 21.2 మరియు 15.6 అయిన వాటి అంకమధ్యమములను కనుగొనుము.

సాధన విచలన గుణకము, $C.V = \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100.$

$$\therefore \quad \overline{x} = \frac{\sigma}{C.V} \times 100.$$

మొదటి శ్రేణి అంకమధ్యమము $\bar{x} = \frac{\sigma}{C.V} \times 100.$

$$= \frac{21.2}{58} \times 100 \qquad \because \quad C.V = 58 \text{ మరియు } \sigma = 21.2$$

$$= \frac{2120}{58} = 36.6.$$

రెండవ శ్రేణి అంకమధ్యమము $\bar{x} = \frac{\sigma}{C.V} \times 100$

$= \frac{15.6}{69} \times 100$ $\quad \because$ C.V = 69 మరియు σ = 15.6

$= \frac{1560}{69}$

= 22.6.

మొదట శ్రేణి అంకమధ్యమము = 36.6 మరియు రెండవ శ్రేణి అంకమధ్యమము = 22.6.

అభ్యాసము 11.1

1. క్రింది వాటికి వ్యాప్తి మరియు వ్యాప్తి గుణకమును కనుగొనుము.

   (i) 59, 46, 30, 23, 27, 40, 52,35, 29

   (ii) 41.2, 33.7, 29.1, 34.5, 25.7, 24.8, 56.5, 12.5

2. ఒక దత్తాంశములోని కనిష్ఠ విలువ 12 మరియు వ్యాప్తి 59 అయిన గరిష్ఠ విలువను కనుగొనుము.

3. 50 కొలతలలో గరిష్ఠము 3.84 కి.గ్రా. వ్యాప్తి 0.46 కి.గ్రా అయిన కనిష్ఠ కొలతను కనుగొనుము.

4. 20 పరిశీలనల క్రమవిచలనము $\sqrt{5}$. ప్రతి పరిశీలనను 2 చే గుణించగా, ఫలిత పరిశీలనల క్రమ విచలనము మరియు విస్తృతిని కనుగొనుము.

5. మొదటి 13 సహజ సంఖ్యల క్రమవిచలనమును కనుగొనుము.

6. క్రింది దాత్తాంశమునకు క్రమవిచలనమును గణించుము.

   (i) 10, 20, 15, 8, 3, 4 (ii) 38, 40, 34 ,31, 28, 26, 34

7. క్రింది పట్టికకు క్రమవిచలనము గణించుము.

x	3	8	13	18	23
f	7	10	15	10	8

8. ఒక పుస్తక ప్రదర్శనలో ఒక పాఠశాలకు చెందిన 200 మంది విద్యార్థులు కొన్న పుస్తకముల సంఖ్య ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది. అయిన క్రమవిచలనమును గణించుము.

పుస్తకముల సంఖ్య	0	1	2	3	4
విద్యార్థుల సంఖ్య	35	64	68	18	15

9. క్రింది దత్తాంశమునకు విస్తృతిని గణించుము.

x	2	4	6	8	10	12	14	16
f	4	4	5	15	8	5	4	5

10. ఒక ప్రజా సమూహము, ఒక బాటసారి మార్గమును దాటుటకు తీసుకొన్న కాలము (సెకనులలో) ను క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది. అయిన ఈ దత్తాంశమునకు విస్తృతి మరియు క్రమవిచలనమును గణించుము.

కాలము (సెకనులలో)	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30
ప్రజల సంఖ్య	4	8	15	12	11

11. 45 గృహముల యజమానులు తమ వీధిలోని పచ్చదనపు పర్యావరణము కొరకు చందా వేసుకొనిరి. క్రింది పట్టికలో వసూలైన రొక్కము ఇవ్వబడినది. అయిన విస్తృతి మరియు క్రమవిచలనము లను కనుగొనుము.

రొక్కము (₹)	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100
గృహముల యజమానుల సంఖ్య	2	7	12	19	5

12. క్రింది విభాజనమునకు విస్తృతిని కనుగొనుము.

తరగతి అంతరము	20–24	25–29	30–34	35–39	40–44	45–49
పౌన:పున్యము	15	25	28	12	12	8

13. 100 అంశముల అంకమధ్యమము 48 మరియు వాటి క్రమవిచలనము 10 అయిన అంశముల మొత్తం మరియు అంశముల వర్గముల మొత్తంను కనుగొనుము.

14. 20 అంశముల అంకమధ్యమము మరియు క్రమవిచలనము క్రమముగా 10 మరియు 2 యని కనుగొనబడినది. దత్తాంశమును తనిఖీ చేయునపుడు అంశము 12 ను 8 గా చేర్చబడియున్నది. అయిన సరైన అంకమధ్యమము మరియు క్రమవిచలనమును గణించుము.

15. $n = 10$, $\overline{x} = 12$ మరియు $\sum x^2 = 1530$, అయిన విచలన గుణకమును గణించుము.

16. 20, 18, 32, 24, 26 దత్తాంశమునకు విచలన గుణకమును గణించుము.

17. ఒక దత్తాంశము యొక్క విచలన గుణకము 57 మరియు దాని క్రమవిచలనము 6.84 అయిన అంకమధ్యమమును కనుగొనుము.

18. ఒక సమూహములోని 100 మంది ఎత్తుల సరాసరి 163.8 సెం.మీ మరియు విచలన గుణకం 3.2 అయిన వారి ఎత్తుల క్రమవిచలనమును కనుగొనుము.

19. $\sum x = 99$, $n = 9$ మరియు $\sum (x-10)^2 = 79$ అని ఇవ్వబడినది. అయిన $\sum x^2$ మరియు $\sum (x-\overline{x})^2$ ను కనుగొనుము.

20. ఒక తరగతిలో ఇరువురు విద్యార్థులు తీసిన మార్కులు క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది. వారిలో ఎవరు ఎక్కువ స్థిరత్వమును కలిగియున్నారో కనుగొనుము.

A	58	51	60	65	66
B	56	87	88	46	43

అభ్యాసము 11.2

సరైన సమాధానమును ఎన్నుకొనుము.

1. మొదటి 10 ప్రధానాంకములు 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 ల వ్యాప్తి

   (A) 28 (B) 26 (C) 29 (D) 27

2. ఒక దత్తాంశము యొక్క కనిష్ఠ విలువ 14.1 మరియు దాని వ్యాప్తి 28.4 అయిన గరిష్ఠ విలువ

   (A) 42.5 (B) 43.5 (C) 42.4 (D) 42.1

3. ఒక దత్తాంశము యొక్క గరిష్ఠ విలువ 72 మరియు కనిష్ఠ విలువ 28 అయిన వ్యాప్తి గుణకం

   (A) 44 (B) 0.72 (C) 0.44 (D) 0.28

4 11 అంశముల సేకరణలో $\Sigma x = 132$ అయిన అంకమధ్యమము.

   (A) 11 (B) 12 (C) 14 (D) 13

5. ఏదేని n అంశముల సేకరణలో $\Sigma(x-\overline{x}) =$

   (A) Σx (B) $\bar{x}$ (C) $n\overline{x}$ (D) 0

6. ఏదేని n అంశముల సేకరణలో $(\Sigma x)-\overline{x} =$

   (A) $n\overline{x}$ (B) $(n-2)\overline{x}$ (C) $(n-1)\overline{x}$ (D) 0

7. $x, y. z$ ల క్రమవిచలనము t అయిన $x+5,\ y+5,\ z+5$ క్రమవిచలనము.

   (A) $\frac{t}{3}$ (B) $t+5$ (C) t (D) $x\,y\,z$

8. ఒక దత్తాంశము యొక్క క్రమవిచలనము 1.6 అయిన విస్తృతి.

   (A) 0.4 (B) 2.56 (C) 1.96 (D) 0.04

9. ఒక దత్తాంశము యొక్క విస్తృతి 12.25 అయిన క్రమవిచలనము

   (A) 3.5 (B) 3 (C) 2.5 (D) 3.25

10. మొదటి 11 సహజ సంఖ్యల విస్తృతి

   (A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) $5\sqrt{2}$ (D) 10

11. 10, 10, 10, 10 ల విస్తృతి

   (A) 10 (B) $\sqrt{10}$ (C) 5 (D) 0

12. 14, 18, 22, 26, 30 ల విస్తృతి 32 అయిన 28, 36, 44, 52, 60 ల విస్తృతి

   (A) 64 (B) 128 (C) $32\sqrt{2}$ (D) 32

13. ఒక దత్తాంశము యొక్క క్రమవిచలనము $2\sqrt{2}$. దత్తాంశములోని ప్రతి విలువను 3 చే గుణించిన, క్రొత్తగా ఏర్పడు దత్తాంశము యొక్క క్రమవిచలనము

(A) $\sqrt{12}$ (B) $4\sqrt{2}$ (C) $6\sqrt{2}$ (D) $9\sqrt{2}$

14. $\sum(x-\overline{x})^2 = 48$, $\overline{x} = 20$ మరియు $n = 12$ అని ఇవ్వబడిన విచలన గుణకం

(A) 25 (B) 20 (C) 30 (D) 10

15. ఒక దత్తాంశము యొక్క అంకమధ్యమము మరియు క్రమవిచలనము క్రమముగా 48 మరియు 12 అయిన విచలన గుణకం

(A) 42 (B) 25 (C) 28 (D) 48

ముఖ్యాంశములు

- (i) వ్యాప్తి $= L - S$, అనగా దత్తాంశములోని గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలకు గల భేదము.

  (ii) వ్యాప్తి గుణకం $= \dfrac{L-S}{L+S}$.

- వర్గీకరించబడిన దత్తాంశమునకు క్రమవిచలనము.

  (i) $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma x^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma x}{n}\right)^2}$ (ii) $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum d^2}{n}}$

  (iii) $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum d^2}{n} - \left(\dfrac{\sum d}{n}\right)^2}$ (iv) $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma d^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma d}{n}\right)^2} \times c$

- వర్గీకరించబడిన దత్తాంశమునకు క్రమవిచలనము.

  (i) $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum fd^2}{\sum f}}$ ఇచట $d = x - \overline{x}$ మరియు $\overline{x}$ అనునది అంకమధ్యమము.

  (ii) $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\dfrac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$ (iii) $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma fd^2}{\Sigma f} - \left(\dfrac{\Sigma fd}{\Sigma f}\right)^2} \times c$

- దత్తాంశములోని ప్రతి విలువకు ఒక స్థిరాంకము కూడుట లేక తీసివేయుట వలన క్రమవిచలనములో ఎటువంటి మార్పుండదు.
- దత్తాంశములోని ప్రతి విలువను ఒక స్థిరాంకము k తో గుణించిన లేక భాగించిన క్రమవిచలనమును ఆ స్థిరాంకము k తో గుణించుటో లేక భాగించుటో చేయవలెను.
- మొదటి n సహజ సంఖ్యల క్రమవిచలనము $\sigma = \sqrt{\dfrac{n^2-1}{12}}$.
- క్రమవిచలనము యొక్క వర్గమే విస్తృతి.
- విచలన గుణకం, C.V $= \dfrac{\sigma}{\overline{x}} \times 100$. ఇది రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ దత్తాంశముల స్థిరత్వమును పోల్చుటకుపయోగపడును.

12

సంభావ్యత

"It is remarkable that a science which began with the consideration of games of chance should have become the most important object of human knowledge" -P.D. Laplace.

- పరిచయం
- సాంప్రదాయక నిర్వచనం
- సంకలన సిద్ధాంతము



పియరి డి లాప్లాస్
(1749-1827)
ఫ్రాన్స్

ఎల్లవేళల జ్ఞాపకముండు గొప్ప శాస్త్రవేత్తలలో లాప్లాస్ ఒకడు. కొన్నిసార్లు ఇతనిని ఫ్రెంచి న్యూటన్ అని అందురు.

1812 లో లాప్లాస్ సాంఖ్యక శాస్త్రమునకు చెందిన అనేక ప్రాథమిక ఫలితములను ఆవిష్కరించెను. ఇతను సంభావ్యతను యుక్తిబద్ధముగా, ప్రణాళికగా, గణిత శాస్త్రములో ఒక పద్ధతిగా నిర్మించెను. ఇతను సంభావ్యత యొక్క నియమములను మాత్రము పరిచయం చేసెను. అందులో ఒకటి "సంభావ్యత అనునది అనుకూలమైన ఘటనలకు, అవకాశం గల మొత్తము ఘటనలకు గల నిష్పత్తియే" అనునది.

12.1 పరిచయం

నిత్య జీవితంలో అనేకంగా మనము చూసినది లేక చేయునది అవకాశము అనుదానిపై ఆధారపడియున్నవి. భూకంపాలు, తుఫానులు, సునామి, మెరుపులు, అంటువ్యాధులు మొదలగు సంఘటనలు సంభవించడం ఊహాకందనివిగా ఉన్నది. అనేక ఘటనలు ఊహాకందని విధముగా ఉంటూ జరుగుచున్నవి. దీని ఫలితము మానవాళికి విపరీతమైన నష్టము కలుగుచున్నది. పూర్వానుభవములను ఖచ్చితంగా లెక్కించి, ఇటువంటి ఘటనలు సంభవించుటను ముందుగానే ఊహించినట్లైన వాటిని నివారించి మరియు నష్టాన్ని తగ్గించి మానవాళికి దోహదపడునట్లుగా, ఎవరైనను ఆలోచించవలయును. వాస్తవంగా జరిగిన ఇటువంటి సంఘటనలను ముందుగానే ఊహించుటకు మనకు "సంభావ్యత సిద్ధాంతము" అవసరమగుచున్నది.

1654 లో చెవాలిమె డిమియర్ లేవదీసిన ఒక జూదము సమస్యవలన ఇద్దరు ఫ్రెంచి గణితశాస్త్రవేత్తలైన బ్లాసీ పాస్కల్ మరియు పియరిడీ ఫెర్మాట్ ల మధ్య లేఖల ద్వారా వివరణలు జరిగి సంభావ్యత గణిత సిద్ధాంతమునకు నాంది పలికినది. ఈ సంభావ్యత సిద్ధాంతము యొక్క అభివృద్ధికి దోహదపడిన వారిలో క్రిష్టియన్ హగన్స్ (1629 – 1695), బెర్నోలీ (1654 – 1705), డీమోరీ (1667 – 1754), పియరీ డీ లాప్లాస్ (1749 – 1827), గాస్ (1777 – 1855), పాయిసాన్ (1781 – 1845), చెబిచేవ్ (1821 – 1894), మార్కోవ్ (1856 – 1922), వంటి గణిత శాస్త్రవేత్తలు ముఖ్యపాత్ర వహించిరి. 1933 లో రష్యాకు చెందిన గణిత శాస్త్రవేత్త కొల్‌మోగ్రోవ్ దీనిని ఒక ప్రణాళికాబద్ధంగా తీసుకొని నవీన సంభావ్యతా సిద్ధాంతమునకు పునాది వేసెను.

సంభావ్యత అనునది ఎల్లప్పుడూ ఘటనలు సంభవించుట లేక సంభవించకుండుట గూర్చి తెలియజేయును. మనమిప్పుడు యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము, ప్రయత్నములు, ప్రతిరూప ఆవరణ మరియు సంభావ్యత అధ్యయనములో ఉపయోగించు వివిధ రకముల ఘటనలను నిర్వచించెదము.

గణిత శాస్త్రవేత్తలు "ప్రయోగము" మరియు "వెలువడు ఫలితములు" వంటి పదములను విరివిగా ఉపయోగింతురు. ఏదైనా పద్ధతిని పరిశీలించుట లేక కొలుచుటను ప్రయోగము అని అందురు. పుట్టబోవు బిడ్డ ఆడ లేక మగ అనునది, నాణెమును ఎగురవేయుట, వివిధ రంగుల బంతులున్న సంచి నుంచి ఒక బంతిని తీయుట మరియు ఒకరోజు ఒక ప్రత్యేక స్థలములో జరుగు ప్రమాదములను పరిశీలించుట, మున్నగునవి ప్రయోగములకు ఉదాహరణలు.

ఒక ప్రయోగమును నిర్వహించుటకు ముందే వెలువడు ఫలితమును ఖచ్చితముగా చెప్పలేము. ఇటువంటి ప్రయోగమునే యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము అని అందురు. కానీ ఆ ప్రయోగము ద్వారా వెలువడుటకు అవకాశముగల అన్ని ఫలితములను ఎవరైన చెప్పవచ్చును.

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములో వెలువడుటకు అవకాశముగల అన్ని ఫలితముల సమితిని ప్రతిరూప ఆవరణ అందురు. దీనిని 'S' అను అక్షరముతో సూచింతురు. ప్రయోగమును పలుమార్లు నిర్వహించడాన్ని ప్రయత్నము అని అందురు.

ప్రతిరూప ఆవరణ యొక్క ఉపసమితిని ఘటన అని అందురు.

S యొక్క ఉపసమితిని A అనుకొనుము. ఒక ప్రయోగమును నిర్వహించినపుడు వెలువడు ఫలితము A కి చెందినదిగా యున్న యెడల, అప్పుడు ఘటన A సంభవించినదని చెప్పెదము.

కొన్ని ఉదాహరణలతో యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము, ప్రతిరూప ఆవరణ, ఘటనలను విశదపరచెదము.

యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము	ప్రతిరూప ఆవరణ	కొన్ని ఘటనలు
నిష్పాక్షికమైన నాణెమును ఒకసారి ఎగుర వేయుట	$S = \{H, T\}$	బొమ్మ $\{H\}$ సంభవించుట ఒక ఘటన, బొరుసు $\{T\}$ సంభవించుట మరొక ఘటన.
నిష్పాక్షికమైన నాణెమును రెండు సార్లు ఎగురవేయుట	$S = \{HT, HH, TT, TH\}$	$\{HT, HH\}$ మరియు $\{TT\}$ అనునవి కొన్ని ఘటనలు
నిష్పాక్షికమైన పాచికను ఒకసారి దొర్లించుట	$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$\{1, 3, 5\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{3\}$ మరియు $\{6\}$ అనునవి కొన్ని ఘటనలు

సమ సంభవ ఘటనలు (Equally likely events)

రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ ఘటనలు సమసంభవ ఘటనలనిన, ప్రతి ఘటన సంభవించుటకు సమాన అవకాశమును కలిగియుండును.

ఒక నాణెమును ఎగురవేయుటలో బొమ్మ సంభవించుట మరియు బొరుసు సంభవించుట అనునవి సమసంభవ ఘటనలు.

పరస్పర వర్జిత ఘటనలు (Mutually exclusive events)

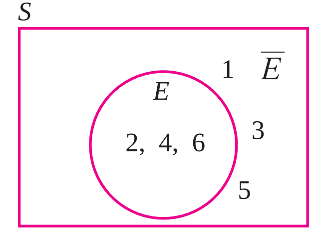
రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ ఘటనలు పరస్పర వర్జిత ఘటనలనిన, ఒక ఘటన సంభవించుట అనునది మిగిలిన ఘటనలు సంభవించకుండా అడ్డుకొనును. పరస్పర వర్జిత ఘటనలు ఒకేసారి సంభవించవు. కావున A మరియు B అనునవి రెండు పరస్పర వర్జిత ఘటనలైన $A \cap B = \phi$.



పటము 12.1

ఒక నాణెమును ఎగురవేసినపుడు, బొమ్మ సంభవించుట అనునది బొరుసు సంభవించుటను అడ్డుకొనును. అదే విధంగా ఒక నిష్పాక్షికమైన పాచికను దొర్లించినపుడు వెలువడుటకు అవకాశముగల ఆరు ఫలితములు పరస్పర వర్జితములు. ఎందుకనగా ఒకేసారి రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ ముఖవిలువలు పడుటకు వీలుకాదు.

పూరక ఘటనలు (Complementary events)



పటము 12.2

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము యొక్క ఘటనను E మరియు ప్రతిరూప ఆవరణను S అనుకొనుము. ప్రతిరూప ఆవరణలో E కి చెందిన ఫలితములు తప్ప మిగిలిన అన్ని ఫలితముల సమితిని E యొక్క పూరక ఘటన అని అందురు. దీనిని $\overline{E}$ తో సూచింతురు కనుక $\overline{E} = S - E$, E మరియు $\overline{E}$ అనునవి పరస్పరవర్జిత ఘటనలగుటను గమనింపుము.

ఒక పాచికను విసిరినపుడు $E = \{2, 4, 6\}$ అనునది 2 యొక్క గుణిజములు సంభవించు ఘటన అనుకొనుము. ఘటన E యొక్క పూరకఘటన $\overline{E} = \{1, 3, 5\}$ అగును. (పటము 12.2 చూడుము)

పూర్ణఘటనలు (Exhaustive events)

ఘటనలు $E_1, E_2, \cdots, E_n$ అనునవి పూర్ణఘటనలనిన వాటి సమ్మేళనము, ప్రతిరూప ఆవరణ S అగును.

ఖచ్ఛిత లేక దృఢ ఘటన (Sure event)

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములో ప్రతిరూప ఆవరణలోని ఏదేని ఘటనలను ఖచ్ఛిత లేక దృఢ ఘటనలనిన ఆ ప్రయోగ ప్రయత్నములో ఖచ్ఛితముగా ఆ ఘటనకు చెందిన మూలకములే లభించవలెను.

ఉదాహరణకు ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు 1, 2, 3, 4, 5, 6 లలో ఏదేని ఒక దానిని పొందుటను దృఢ ఘటన అగును.

అసాధ్య ఘటనలు (Impossible event)

ఎట్టి పరిస్థితులలోను సంభవించని ఘటనను అసాధ్య ఘటన అందురు. దీనిని ϕ తో సూచింతురు.

ఉదాహరణకు, ఒక పాచికను విసిరినపుడు 7 సంభవించుట అనునది ఒక అసాధ్య ఘటన.

అనుకూల ఫలితములు (Favourable outcomes)

అనుకున్న ఘటనలు సంభవించుటకు అనుగుణముగా వెలువడు ఫలితములను ఆ ఘటన యొక్క అనుకూల ఫలితములు అని అందురు. ఉదాహరణకు, ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు బేసి సంఖ్య పొందు ఘటన E అయిన వెలువడు ఫలితము 1, 3, 5 లను E కి అనుకూల ఫలితములు అందురు.

గమనిక

ఈ పాఠ్యాంశములో యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములో వెలువడు ఫలితములు సమసంభవమైనదిగాను మరియు ప్రతిరూప ఆవరణ పరిమితమైనదిగాను మాత్రము పరిగణించెదము. కనుక, నాణెములు లేక పాచికలను తీసుకొన్నపుడు అవి నిష్పాక్షికమైనవిగా పరిగణింపబడుచున్నవి.

12.2 సంభావ్యత యొక్క సాంప్రదాయక నిర్వచనం (Classical definition of probability)

ఒక ప్రతిరూప ఆవరణలోని n ఫలితములలో m ఫలితములు ఘటన A కు అనుకూలమైన, $n(S) = n$, $n(A) = m$ అని వ్రాసెదము. ఘటన A సంభావ్యత $P(A)$ అనునది, m కు n కు గల నిష్పత్తి.

$$i.e. \quad P(A) = \frac{A \text{ కు అనుకూలమైన ఫలితముల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం ఫలితముల సంఖ్య}}$$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{m}{n}.$$

గమనిక

(i) వీలైన ఫలితముల సంఖ్య అనంతమైన మరియు ఫలితములు సమసంభవము కానిచో పై సాంప్రదాయక సంభావ్యత నిర్వచనం వర్తించదు.

(ii) ఘటన A యొక్క సంభావ్యత 0 మరియు 1 మధ్య నుండును, (0, 1 ని చేర్చి); $i.e.\ 0 \le P(A) \le 1$.

(iii) దృఢఘటన సంభావ్యత 1. $i.e.\ P(S) = 1$.

(iv) అసాధ్య ఘటన సంభావ్యత 0. $i.e.\ P(\phi) = 0$.

(v) ఘటన A లభించకుండుటకు గల సంభావ్యత

$$P(A \text{ కానిది}) = P(\overline{A}) \text{ లేక } P(A') = \frac{n-m}{n} = \frac{n}{n} - \frac{m}{n}$$

$$\Longrightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A).$$

(vi) $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

ఉదాహరణ 12.1



పటము 12.3

ఒక క్రమమైన పాచికను విసిరినపుడు

(i) సంఖ్య 4 (ii) సరి సంఖ్య

(iii) 6 యొక్క ప్రధాన కారణాంకము (iv) 4 కన్నా ఎక్కువగా నుండు సంఖ్యలను

పొందుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన ఒక పాచికను విసిరినపుడు ఏర్పడు ప్రతిరూప ఆవరణ $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

$\therefore n(S) = 6$.

(i) సంఖ్య 4 ను పొందు ఘటనను A అనుకొనుము.

$A = \{4\}$ $\therefore n(A) = 1$.

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}.$$

(ii) సరిసంఖ్యను పొందు ఘటనను B అనుకొనుము.

$B = \{2,4,6\}$ $\therefore n(B) = 3$.

$$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

(iii) 6 యొక్క ప్రధాన కారణాంకము పొందు ఘటనను C అనుకొనుము.

$C = \{2,3\} \quad \therefore\ n(C) = 2.$

$\therefore P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$

(iv) 4 కన్నా ఎక్కువగానుండు సంఖ్యను పొందు ఘటనను D అనుకొనుము.

$D = \{5,6\} \quad n(D) = 2.$

$\therefore\ P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$

ఉదాహరణ 12.2

ఒక క్రమమైన నాణెమును రెండు సార్లు ఎగురవేసినపుడు

(i) రెండు బొమ్మలు (ii) కనీసము ఒక బొమ్మ (iii) ఒకే ఒక బొరుసు

పొందుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన ఒక నాణెమును రెండు సార్లు ఎగురవేసినపుడు ఏర్పడు ప్రతిరూప ఆవరణ

$S = \{HH, HT, TH, TT\}.$

$\therefore\ n(S) = 4.$

(i) రెండు బొమ్మలు పొందు ఘటనను A అనుకొనుము. $A = \{ HH \}.$

$n(A) = 1.$

$\therefore \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}.$

(ii) కనీసము ఒక బొమ్మను పొందు ఘటనను B అనుకొనుము. $B = \{ HH, HT, TH \}$

$n(B) = 3.$

$\therefore \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{4}.$

(iii) ఒకే ఒక బొరుసు పొందు ఘటనను C అనుకొనుము. $C = \{ HT, TH \}$

$n(C) = 2.$

$\therefore \quad P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$

ఉదాహరణ 12.3

మొదటి ఇరవై సహజసంఖ్యల నుండి ఒక పూర్ణాంకమును ఎన్నుకొనబడిన, అది ప్రధానాంకముగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన ఇక్కడ $S = \{1, 2, 3, \cdots, 20\}.$

$\therefore \quad n(S) = 20.$

ప్రధానాంకము ఎన్నుకొను ఘటనను A అనుకొనుము.

$A = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}.$

$n(A) = 8.$

కావున, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$

ఉదాహరణ 12.4

35 వస్తువులుగల ఒక సాంపిల్‌లో 7 వస్తువులు లోపమైనవి. యాదృచ్ఛికముగా ఒక వస్తువును తీసిన అది లోపము లేని వస్తువుగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన వస్తువుల మొత్తం సంఖ్య $n(S) = 35$.

లోపము గల వస్తువుల సంఖ్య = 7.

లోపము లేని వస్తువుల ఘటనను A అనుకొనుము.

లోపము లేని వస్తువుల సంఖ్య, $n(A) = 35 - 7 = 28$.

$\therefore$ లోపము లేని వస్తువు ఎన్నుకొనుటకు గల సంభావ్యత

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{28}{35} = \frac{4}{5}.$$

ఉదాహరణ 12.5

రెండు క్రమమైన పాచికలను ఒకేసారి విసిరినపుడు ముఖ విలువలు

(i) మొత్తం 8 (ii) జంటలు (Doublet) (iii) మొత్తం 8 కన్నా ఎక్కువగా పొందుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన రెండు పాచికలను విసిరినపుడు ఏర్పడు ప్రతిరూప ఆవరణ

$$S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$$
$$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$$
$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$$
$$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$$
$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$$
$$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}$$



పటము 12.4

$\therefore n(S) = 6 \times 6 = 36$.

(i) మొత్తం 8 గా నుండు ఘటనను A అనుకొనుము.

$\therefore \quad A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$.

$n(A) = 5$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}.$$

(ii) ఒకే రకపు జంటను పొందు ఘటనను B అనుకొనుము.

$\therefore \quad B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$.

$n(B) = 6$.

$$\therefore \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

(iii) మొత్తం 8 కన్నా ఎక్కువగా నుండు ఘటనను C అనుకొనుము.

$C = \{(3,6), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$.

$n(C) = 10$.

$$\therefore \quad P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

ఉదాహరణ 12.6

బాగుగా కలుపబడిన 52 పేకాట ముక్కల నుండి, ఒక ముక్కను యాదృచ్ఛికముగా తీయబడినది. అయిన క్రింది వాటిని పొందుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

(i) రాజు (ii) నలుపు రాజు

(iii) స్పేడ్ (iv) డైమండ్ 10.

52 పేకాట ముక్కల వర్గీకరణ

Spade ♠	Hearts ♥	Clavor ♣	Diamond ♦
A	A	A	A
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9
10	10	10	10
J	J	J	J
Q	Q	Q	Q
K	K	K	K
13	13	13	13

సాధన ఇక్కడ, $n(S) = 52$.

(i) రాజు ముక్క పొందు ఘటనను A అనుకొనుము.

$\therefore n(A) = 4$.

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

(ii) నలుపు రాజు ముక్క పొందు ఘటనను B అనుకొనుము.

$n(B) = 2$.

$$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}.$$

(iii) స్పేడ్ ముక్క తీయు ఘటనను C అనుకొనుము.

$n(C) = 13$.

$$\therefore P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

(iv) డైమండ్ 10 పొందు ఘటనను D అనుకొనుము.

$n(D) = 1$.

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{1}{52}.$$

ఉదాహరణ 12.7

ఒక తరగతిలోని 35 మంది విద్యార్థులలో 20 మంది బాలురు మరియు 15 మంది బాలికలు గలరు. యాదృచ్ఛికముగా ఒక విద్యార్థిని ఎన్నుకొనబడినది. ఎన్నుకొనబడిన విద్యార్థి (i) బాలుడు (ii) బాలికగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన ప్రయోగము యొక్క ప్రతిరూప ఆవరణను S అనుకొనుము.

బాలుడు మరియు బాలికలను ఎన్నుకొను ఘటనను క్రమముగా B మరియు G అనుకొనుము.

$$\therefore n(S) = 35, \ n(B) = 20, \ n(G) = 15.$$

(i) బాలుడిని ఎన్నుకొనుటకు గల సంభావ్యత $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{20}{35}$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{4}{7}.$$

(ii) బాలికని ఎన్నుకొనుటకు గల సంభావ్యత $P(G) = \frac{n(G)}{n(S)} = \frac{15}{35}$

$$\Rightarrow P(G) = \frac{3}{7}.$$

ఉదాహరణ 12.8

ఒకానొక రోజు వర్షము పడుటకు గల సంభావ్యత 0.76 అయిన ఆ రోజు వర్షము పడకుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన వర్షము పడు ఘటనను A అనుకొనుము. అప్పుడు $\overline{A}$ అనునది వర్షము పడకుండుటకు గల ఘటన.

$$P(A) = 0.76$$

$$\therefore\ P(\overline{A}) = 1 - 0.76 \quad \because P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

$$= 0.24.$$

$\therefore$ వర్షము పడకుండుటకు గల సంభావ్యత $= 0.24$.

ఉదాహరణ 12.9

ఒక సంచిలో 5 ఎరుపు రంగు మరియు కొన్ని నీలి రంగు బంతులు గలవు. నీలి రంగు బంతి తీయుటకు గల సంభావ్యత, ఎరుపు రంగు బంతి తీయుటకు గల సంభావ్యతకు మూడు రెట్లయిన సంచిలోని నీలి రంగు బంతుల సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన నీలి రంగు బంతుల సంఖ్యను x అనుకొనుము.

$\therefore$ మొత్తం బంతుల సంఖ్య, $n(S) = 5 + x$.

నీలి రంగు బంతి తీయు ఘటనను B మరియు ఎరుపు రంగు బంతి తీయు ఘటనను R అనుకొనుము.

$P(B) = 3P(R)$ అని ఇవ్వబడినది.

$$\Longrightarrow \quad \frac{n(B)}{n(S)} = 3\frac{n(R)}{n(S)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x}{5+x} = 3\left(\frac{5}{5+x}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad x = 15$$

$\therefore$ నీలి రంగు బంతుల సంఖ్య $= 15$.

ఉదాహరణ 12.10

క్రింది వాటి సంభావ్యతను కనుగొనుము.

(i) యాదృచ్ఛికముగా ఎన్నుకొనబడిన లీపు సంవత్సరములో 53 శుక్రవారములు నుండుట;

(ii) యాదృచ్ఛికముగా ఎన్నుకొనబడిన లీపు సంవత్సరములో 52 శుక్రవారములు మాత్రమే నుండుట;

(iii) యాదృచ్ఛికముగా ఎన్నుకొనబడిన సాధారణ సంవత్సరములో 53 శుక్రవారములు నుండుట;

సాధన (i) లీపు సంవత్సరములోని రోజుల సంఖ్య $= 366$ అనగా 52 వారములు మరియు 2 రోజులు.

52 వారములు 52 శుక్రవారములను కలిగియుండును. మిగిలిన రెండు రోజులు ఈ క్రింది ఏడు అవకాశములలో ఏదేని ఒకటుండవచ్చును.

(ఆది, సోమ), (సోమ, మంగళ), మంగళ, బుధ), (బుధ, గురు), (గురు, శుక్ర), (శుక్ర, శని), (శని, ఆది).

లీపు సంవత్సరములో 53 శుక్రవారములు పొందుటకు గల సంభావ్యత, పై ఏడు అవకాశములలో ఒక శుక్రవారము పొందుటకు గల సంభావ్యత ఒకటేయగును. ఇక్కడ,

S = {(ఆది, సోమ), (సోమ, మంగళ), మంగళ, బుధ), (బుధ, గురు), (గురు, శుక్ర), (శుక్ర, శని), (శని, ఆది)}.

$\therefore\ n(S) = 7.$

పై ఏడు అవకాశములలో ఒక శుక్రవారము పొందు ఘటనను A అనుకొనుము.

A = {(గురు, శుక్ర), (శుక్ర, శని)} $\quad\therefore\ n(A) = 2.$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{7}.$$

(ii) లీపు సంవత్సరములో 52 శుక్రవారములు మాత్రమే పొందుటకు ఆ మిగిలిన రెండు రోజులలో శుక్రవారము ఉండరాదు.

మిగిలిన రెండు రోజులలో శుక్రవారము లేని ఘటనను B అనుకొనుము.

$\therefore\ B$ = {(ఆది, సోమ), (సోమ, మంగళ), (మంగళ, బుధ), (బుధ, గురు), (శని, ఆది)}.

$n(B) = 5.$

$$\therefore\ P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{7}.$$

A మరియు B అనునవి పూరక ఘటనలగుటను గమనింపుము.

(iii) సాధారణ సంవత్సరములోని రోజుల సంఖ్య = 365 రోజులు అనగా 52 వారములు 1 రోజు.

సాధారణ సంవత్సరములో 53 శుక్రవారములు పొందుటకు ఆది, సోమ, మంగళ, బుధ, గురు, శుక్ర, శని అను ఏడు అవకాశములలో ఒక శుక్రవారము ఉండవలెను.

ఇక్కడ S = {ఆది, సోమ, మంగళ, బుధ, గురు, శుక్ర మరియు శని}.

$\therefore\ n(S) = 7.$

పై ఏడు అవకాశములలో ఒక రోజు శుక్రవారము పొందు ఘటనను C అనుకొనుము.

C = {శుక్ర} $\implies n(C) = 1.$

$$\therefore P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{7}.$$

ఉదాహరణ 12.11

A అనునది ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగ ఘటన మరియు $P(A):P(\bar{A}) = 7:12$ అయిన $P(A)$ ని కనుగొనుము.

సాధన $P(A):P(\bar{A}) = 7:12$ అని ఇవ్వబడినది.

$P(A) = 7k$ మరియు $P(\bar{A}) = 12k$., $k > 0$.

$P(A) + P(\bar{A}) = 1$ అని తెలుసు.

$7k + 12k = 1 \implies 19k = 1.$

$$k = \frac{1}{19}$$

$$\therefore\ P(A) = 7k = \frac{7}{19}.$$

మరొక పద్ధతి

$$\frac{P(A)}{P(\bar{A})} = \frac{7}{12}$$

$$12P(A) = 7\times P(\bar{A})$$

$$= 7\,[1-P(A)]$$

$$19P(A) = 7$$

కనుక, $P(A) = \frac{7}{19}$

అభ్యాసము 12.1

1. ఒకటి నుండి నూరు వరకు సంఖ్యలు వేయబడిన 100 చీటీలు గల ఒక సంచి నుండి ఒక చీటీని తీసిన అది 10 చే భాగించబడు సంఖ్య గల చీటీగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.
2. ఒక పాచికను రెండుసార్లు విసరబడినది. మొత్తం 9 గా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.
3. రెండు పాచికలు ఒకేమారు విసరబడినవి. రెండు పాచికలపై పడిన రెండు సంఖ్యలను చేర్చి రెండు అంకములు గల సంఖ్యగా ఏర్పరచిన అది 3 చే భాగించబడు సంఖ్యగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.
4. 12 మంచి గ్రుడ్లతో 2 పాడైన గ్రుడ్లు కలసిపోయినవి. యాదృచ్ఛికంగా ఒక గ్రుడ్డు తీయబడిన, అది పాడైన గ్రుడ్డుగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.
5. రెండు నాణెములను ఎగురవేసినపుడు గరిష్ఠంగా ఒక బొమ్మ పొందుటకు గల సంభావ్యత కనుగొనుము.
6. బాగుగా కలుపబడిన 52 పేకాట ముక్కల నుండి ఒక ముక్కను తీయగా అది (i) డైమండ్ (ii) డైమండ్ కానిది (iii) ఏస్ కానిదిగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.
7. మూడు నాణెములను ఒకేసారి ఎగురవేయబడిన (i) కనీసము ఒక బొమ్మ (ii) ఖచ్చితంగా రెండు బొరుసులు (iii) కనీసము రెండు బొమ్మలు పొందుటకు గల సంభావ్యత కనుగొనుము.
8. ఒక సంచిలో 1 నుండి 6 వరకు సంఖ్యలు కల్గిన తెల్లబంతులు మరియు 7 నుండి 10 వరకు సంఖ్యలు కల్గిన ఎరుపు బంతులు గలవు. యాదృచ్ఛికంగా ఒక బంతిని తీసిన అది (i) సరి సంఖ్య గల బంతి (ii) తెల్ల బంతి పొందుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.
9. 1 నుండి 100 వరకు గల పూర్ణాంకములలో యాదృచ్ఛికముగా ఒక సంఖ్యను ఎన్నుకొనిన అది (i) సంపూర్ణ వర్గము (ii) సంపూర్ణ ఘనము కానిదిగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.
10. విదేశీ పర్యటనకై ఒక యాత్రికుడు అర్జెంటీనా, బంగ్లాదేశ్, చైనా, అంగోళా, రష్యా మరియు అల్జీరియా దేశములలో ఒక దేశమును యాదృచ్ఛికముగా ఎన్నుకొనిన అది 'అ' తో మొదలగు దేశముగా నుండుటకుగల సంభావ్యత ఏమి?
11. ఒక పెట్టెలో 4 పచ్చ, 5 నీలము మరియు 3 ఎరుపు రంగు బంతులు గలవు. యాదృచ్ఛికముగా ఒక బంతిని తీసిన అది (i) ఎరుపు రంగు (ii) పచ్చరంగు బంతిగా నుండుటకు గల సంభావ్యత కనుగొనుము.
12. 20 కార్డులపై 1 నుండి 20 వరకు అంకెలు వేయబడియున్నవి. యాదృచ్ఛికముగా ఒక కార్డును తీసిన అది (i) 4 గుణిజము (ii) 6 గుణిజము కాకుండుటకు గల సంభావ్యత కనుగొనుము.
13. అంకెలు 3, 5, 7 లతో రెండంకెల సంఖ్యను రూపొందించిన అది 57 కన్నా ఎక్కువగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము. (ఉపయోగించిన అంకెలను మరొకసారి ఉపయోగించరాదు).
14. మూడు పాచికలను ఒకేసారి విసరబడినవి. మూడు పాచికలపై ఒకే సంఖ్యను పొందుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.
15. రెండు పాచికలను దొర్లించిన వాటిపై కనబడు అంకెల లబ్ధము కనుగొనబడినది. ఆ కనుగొనబడిన లబ్ధము ప్రధానాంకముగా నుండుటకు గల సంభావ్యత ఏమి?

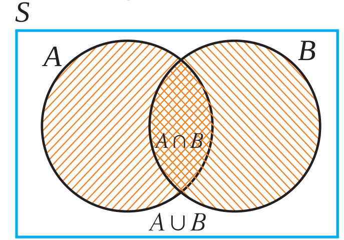
16. ఒక జాడీలో నీలము, పచ్చ మరియు తెలుపు రంగులలో 54 గోళీలున్నవి. నీలము గోళీ పొందుటకు గల సంభావ్యత $\frac{1}{3}$ మరియు పచ్చగోళీ పొందుటకు గల సంభావ్యత $\frac{4}{9}$ అయిన ఆ జాడీలో ఎన్ని తెలుపు రంగు గోళీలుండును.

17. ఒక సంచిలోని 100 చొక్కాలలో 88 బాగున్నవి. 8 చిన్న లోపము మరియు 4 ఎక్కువ లోపము కలిగియున్నవి. A అను సంస్థ బాగుగా ఉన్న చొక్కాలను మాత్రము అంగీకరించెను. కానీ B సంస్థ ఎక్కువగా లోపమున్న చొక్కాలను అంగీకరించలేదు. యాదృచ్ఛికంగా ఒక చొక్కాను తీసిన (i) A (ii) B అంగీకరించుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

18. 12 బంతులు గల ఒక సంచిలో x బంతులు తెల్లనివి (i) యాదృచ్ఛికంగా ఒకే ఒక బంతిని తీసిన అది తెల్లని బంతిగా నుండుటకు గల సంభావ్యత ఏమి? (ii) మరో 6 తెల్లని బంతులను ఆ సంచిలో వేసిన, తెల్లని బంతి పొందుటకు గల సంభావ్యత (i) లో వచ్చుదాని కన్నా రెండింతలుగా ఉండును. అయిన x ను కనుగొనుము.

19. పిగ్గీ హుండీలో 100 ఏభైపైసల నాణెములు, 50 ఒక రూపాయి నాణెములు, 20 రెండు రూపాయల నాణెములు మరియు 10 ఐదు రూపాయల నాణెములున్నవి. యాదృచ్ఛికముగా ఒక నాణెమును తీసిన అది (i) ఏభైపైసల నాణెము (ii) ఐదు రూపాయల నాణెము కాకుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

12.3 సంభావ్యత సంకలన సిద్ధాంతము (Addition theorem on probability)



పటము 12.5

శూన్యేతర పరిమితి సమితి S యొక్క ఉపసమితిలు A మరియు B అనుకొనిన

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

ఇరువైపుల $n(S)$ చే భాగించగా,

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}. \qquad (1)$$

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములో ఉపసమితులు A మరియు B కి అనుగుణముగా A మరియు B అను ఘటనలు మరియు సమితి S కి అనుగుణముగా ప్రతిరూప ఆవరణ S అయిన (1) నుంచి

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ అగును.}$$

ఈ ఫలితమునే **సంభావ్యత సంకలన సిద్ధాంతము** అని అందురు.

గమనిక

(i) ఘటన $A \cup B$ సంభవించుటకు, ఘటన A సంభవించును లేక ఘటన B సంభవించును లేక A మరియు B ఒకేసారి సంభవించును. ఘటన $A \cap B$ సంభవించుటకు ఘటనలు A, B రెండునూ ఒకేసారి సంభవించును.

(ii) A మరియు B అనునవి పరస్పర వర్జిత ఘటనలు అయిన $A \cap B = \emptyset$

కావున $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \because P(A \cap B) = 0.$

(iii) $A \cap \overline{B}$ అనునది సమితి సిద్ధాంత పరిభాషలో $A \setminus B$ కి సమానము.

ఫలితములు (నిరూపణ లేకుండా)

(i) ప్రతిరూప ఆవరణ S కు సంబంధించిన A, B మరియు C అనునవి ఏవేని 3 ఘటనలైన

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

(ii) A_1 A_2 మరియు A_3 అను మూడు పరస్పర వర్జిత ఘటనలైన

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

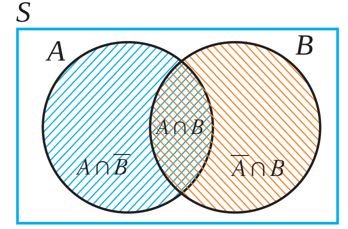
(iii) $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ అనునవి పరస్పర వర్జిత ఘటనలైన

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n).$$

(iv) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$,

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

ఇక్కడ $A \cap \overline{B}$ అనగా A మాత్రము B లో లేనిదని అర్థము. అదేవిధంగా $\overline{A} \cap B$ అనగా B మాత్రము A కానిదని అర్థము.



పటము 12.6

ఉదాహరణ 12.12

మూడు నాణెములు ఒకేసారి ఎగురవేయబడినవి. సంభావ్యత సంకలన సిద్ధాంతమునుపయోగించి, ఖచ్చితంగా రెండు బొరుసులు లేక కనీసము ఒక బొమ్మ పడుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన ప్రతిరూప ఆవరణ $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, TTT, TTH, THT, THH\}$.

$\Longrightarrow \quad n(S) = 8.$

A అనునది ఖచ్చితంగా రెండు బొరుసులు పొందు ఘటననుకొనిన

$A = \{HTT, TTH, THT\}$ కావున $n(A) = 3$.

$$\therefore \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}.$$

B అనునది కనీసము ఒక బొమ్మ పొందు ఘటననుకొనిన

$B = \{HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH\}$ కావున $n(B) = 7$.

$$\therefore \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7}{8}.$$

A మరియు B అనునవి పరస్పరవర్జిత ఘటనలు కావు.

$A \cap B = A$, అగుటచే $\quad P(A \cap B) = P(A) = \frac{3}{8}$.

$\therefore \quad P(A$ లేక $B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{8} + \frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{7}{8}.$$

గమనిక: పై సమస్యలో సంభావ్యత సంకలన సిద్ధాంతము అన్వయించబడినది. అయినను ఇక్కడ గుర్తించవలసినది $A \cup B = B$ కనుక $P(A \cup B) = P(B) = \frac{7}{8}$

ఉదాహరణ 12.13

ఒక పాచిక రెండుసార్లు విసరబడినది. కనీసము ఒక ఒకసారి విసరబడిన, దానిలో సంఖ్య 5 వచ్చుటకు గల సంభ్యాత కనుగొనుము. (సంభావ్యత సంకలన సిద్ధాంతమునుపయోగించుము).

సాధన ఒకపాచికను రెండు సార్లు విసిరినపుడు ప్రతిరూప ఆవరణ పరిమాణం, $n(S) = 36$.

మొదట విసిరిన దానిలో 5 పొందు ఘటనను A అనుకొనుము.

$\therefore \quad A = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}$.

కావున, $\quad n(A) = 6, \quad P(A) = \frac{6}{36}$.

రెండవసారి విసిరిన దానిలో 5 పొందు ఘటనను B అనుకొనుము.

$\therefore \quad B = \{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5)\}$.

కావున, $\quad n(B) = 6, \quad P(B) = \frac{6}{36}$.

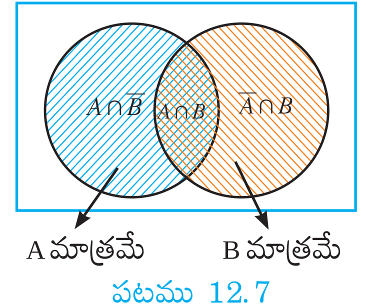
$A \cap B = \{(5,5)\}$ అగుటచే, A మరియు B పరస్పరవర్జిత ఘటనలు కావు.

$\therefore \quad n(A \cap B) = 1, \; P(A \cap B) = \frac{1}{36}$.

$\therefore$ సంకలన సిద్ధాంతము ప్రకారము,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
$$= \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

ఉదాహరణ 12.14



పటము 12.7

ఒక బాలిక వైద్యకళాశాలలో ప్రవేశము పొందుటకు గల సంభావ్యత 0.16. సాంకేతిక కళాశాలలో ప్రవేశము పొందుటకు గల సంభావ్యత 0.24 మరియు రెండింటిలోను ప్రవేశము పొందుటకు గల సంభావ్యత 0.11 అయిన ఆమె

(i) ఆ రెండు కళాశాలలో కనీసము ఒకదానిలో ప్రవేశము పొందుటకు గల సంభావ్యత కనుగొనుము.

(ii) వైద్య కళాశాలలో మాత్రము లేక సాంకేతి కళాశాలలో మాత్రము ప్రవేశము పొందుటకు గల సంభ్యాతను కనుగొనుము.

సాధన వైద్య కళాశాలలో ప్రవేశము పొందు ఘటనను A మరియు సాంకేతిక కళాశాలలో ప్రవేశము పొందు ఘటనను B అనుకొనుము.

(i) $\quad P(A) = 0.16, \quad P(B) = 0.24, \quad P(A \cap B) = 0.11$

$P($ ఏదేని ఒక కళాశాలలో ప్రవేశము పొందుట$)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.16 + 0.24 - 0.11 = 0.29.$$

(ii) P(ఏదేని ఒక కళాశాలలో మాత్రము ప్రవేశము పొందుట)

$= P$ (A మాత్రము లేక B మాత్రము)

$= P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$

$= [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(A \cap B)]$

$= (0.16 - 0.11) + (0.24 - 0.11) = 0.18.$

ఉదాహరణ 12.15

"ENTERTAINMENT" అను పదము నుండి ఒక అక్షరమును యాదృచ్ఛికముగా ఎన్నుకొనిన అది అచ్చు (vowel) లేక T గా నుండుటకు గల సంభావ్యత కనుగొనుము. (ఉపయోగించిన అక్షరములను తిరిగి ఉపయోగించవచ్చు)

సాధన ENTERTAINMENT అను పదములో 13 అక్షరములున్నవి.

$\therefore \quad n(S) = 13.$

A అనునది అచ్చుపొందు ఘటననుకొనుము.

$\therefore \quad n(A) = 5.$

కావున $\quad P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{5}{13}.$

B అనునది అక్షరము T పొందు ఘటననుకొనుము.

$\therefore \quad n(B) = 3$

కావున $\quad P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{3}{13}.$

$P(A$ లేక $B) = P(A) + P(B)$ $\quad$ ($\because$ A మరియు B పరస్పర వర్జిత ఘటనలు.)

$= \dfrac{5}{13} + \dfrac{3}{13} = \dfrac{8}{13}.$

ఉదాహరణ 12.16

A, B, C అనునవి ఏవేని మూడు పరస్పర వర్జిత ఘటనలు మరియు పూర్ణఘటనలు అయినప్పుడు $P(B) = \frac{3}{2}P(A)$ మరియు $P(C) = \frac{1}{2}P(B)$గా ఉన్నది. $P(A)$ ని కనుగొనుము.

సాధన $\quad P(A) = p$ అనుకొనుము.

$\therefore P(B) = \dfrac{3}{2}P(A) = \dfrac{3}{2}p.$

మరియు $P(C) = \dfrac{1}{2}P(B) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}p\right) = \dfrac{3}{4}p.$

A, B మరియు C అనునవి పరస్పర వర్జిత ఘటనలు మరియు పూర్ణ ఘటనలని ఇవ్వబడినది.

$\therefore P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ మరియు $S = A \cup B \cup C$.

$P(S) = 1$ అగును.

$\Longrightarrow \quad P(A) + P(B) + P(C) = 1$

$\Longrightarrow \quad p + \dfrac{3}{2}p + \dfrac{3}{4}p = 1$

$$\Longrightarrow \quad 4p + 6p + 3p = 4$$

కాబట్టి, $p = \frac{4}{13}$.

కనుక, $P(A) = \frac{4}{13}$.

ఉదాహరణ 12.17

52 ముక్కలున్న కట్ట నుంచి ఒక ముక్కను యాదృచ్ఛికముగా తీసిన అది రాజు లేక హార్ట్ లేక ఎరుపు ముక్కగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన A, B మరియు C అనునవి క్రమముగా రాజు, హార్ట్ మరియు ఎరుపు ముక్కను పొందు ఘటనలనుకొనుము.

$n(S) = 52$, $n(A) = 4$, $n(B) = 13$, $n(C) = 26$.

$n(A \cap B) = 1$, $n(B \cap C) = 13$, $n(C \cap A) = 2$ మరియు $n(A \cap B \cap C) = 1$.

$\therefore\ P(A) = \frac{4}{52}$, $P(B) = \frac{13}{52}$, $P(C) = \frac{26}{52}$.

$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$, $P(B \cap C) = \frac{13}{52}$, $P(C \cap A) = \frac{2}{52}$ మరియు $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{52}$.

$$\therefore\ P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} + \frac{26}{52} - \frac{1}{52} - \frac{13}{52} - \frac{2}{52} + \frac{1}{52} = \frac{44 - 16}{52}$$

$$= \frac{7}{13}.$$

ఉదాహరణ 12.18

ఒక సంచిలో 10 తెలుపు, 5 నలుపు, 3 పచ్చ మరియు 2 ఎరుపు బంతులున్నవి. యాదృచ్ఛికముగా ఒక బంతిని తీసిన అది తెలుపు లేక నలుపు లేక పచ్చ బంతిగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన S ను ప్రతిరూప ఆవరణ అనుకొనుము.

$$\therefore\ n(S) = 20.$$

W, B మరియు G అనునవి క్రమముగా తెలుపు, నలుపు మరియు పచ్చ బంతిని ఎన్నుకొను ఘటనలనుకొనుము.

తెలుపు బంతిని పొందు సంభావ్యత, $P(W) = \frac{n(W)}{n(S)} = \frac{10}{20}$.

నలుపు బంతిని పొందు సంభావ్యత, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{20}$.

పచ్చ బంతిని పొందు సంభావ్యత, $P(G) = \frac{n(G)}{n(S)} = \frac{3}{20}$.

$\therefore$ తెలుపు లేక నలుపు లేక పచ్చ బంతిని పొందుటకు గల సంభావ్యత,

$P(W \cup B \cup G) = P(W) + P(B) + P(G)$ ($\because$ W, B మరియు G లు పరస్పర వర్జిత ఘటనలు.)

$$= \frac{10}{20} + \frac{5}{20} + \frac{3}{20} = \frac{9}{10}.$$

(గమనిక: $P(W \cup B \cup G) = P(R') = 1 - P(R) = 1 - \frac{2}{20} = \frac{9}{20}$ యని సమాధానము పొందవచ్చు.)

అభ్యాసము 12.2

1. A మరియు B అనునవి పరస్పర వర్జిత ఘటనలు $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ అయిన $P(A \cup B)$ ని కనుగొనుము.
2. A మరియు B అను రెండు ఘటనలలో $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{2}{5}$ మరియు $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ అయిన $P(A \cap B)$ ని కనుగొనుము.
3. $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{7}{10}, P(A \cup B) = 1$. అయిన (i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A' \cup B')$ లను కనుగొనుము.
4. ఒక పాచికను రెండు సార్లు దొర్లించిన మొదటి సారి సరిసంఖ్య లేక ముఖవిలువల మొత్తము 8 పొందుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.
5. 1 నుండి 50 వరకు గల పూర్ణాంకములలో ఒక సంఖ్యను యాదృచ్ఛికముగా ఎన్నుకొనిన అది 4 లేక 6 చే భాగింపబడునదిగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.
6. ఒక సంచిలో 50 బోల్టులు మరియు 150 నట్లు గలవు. వాటిలో సగం బోల్టులు మరియు సగం నట్లు త్రుప్పు పట్టినవి. వాటిలో ఒకదానిని యాదృచ్ఛికముగా ఎన్నుకొనిన, అది త్రుప్పుపట్టిన నట్టు లేక బోల్టుగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.
7. రెండు పాచికలను ఒకేసారి విసరిన వాటి ముఖ విలువలు మొత్తం 3 చే మరియు 4 చే భాగింపబడినదిగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.
8. ఒక బుట్టలో 20 ఆపిల్‌లు మరియు 10 ఆరంజ్‌లు గలవు. వాటిలో 5 ఆపిల్‌లు మరియు 3 ఆరంజిలు పాడైనవి. యాదృచ్ఛికముగా ఒక పండును తీసిన అది ఆపిల్ పండుగాని లేక మంచి పండుగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.
9. ఒక తరగతిలో 40% విద్యార్థులు గణితశాస్త్రము, 30% విద్యార్థులు విజ్ఞాన శాస్త్రము, 10% విద్యార్థులు రెండింటిలో జరుగు క్విజ్ కార్యక్రమములలో పాల్గొనిరి. ఆ తరగతి నుండి యాదృచ్ఛికముగా ఒక విద్యార్థిని ఎన్నుకొనిన, ఆ విద్యార్థి గణితశాస్త్రము లేక విజ్ఞాన శాస్త్రము లేక రెండింటిలో జరుగు క్విజ్ కార్యక్రమములో పాల్గొనుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.
10. బాగుగా కలుపబడిన 52 ముక్కలు గల కట్టనుండి ఒక ముక్కను యాదృచ్ఛికముగా తీసిన అది స్పేడుగా లేక రాజుగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.
11. ఒక పెట్టెలో 10 తెలుపు, 6 ఎరుపు మరియు 10 నలుపు బంతులున్నవి. ఒక బంతిని యాదృచ్ఛికముగా తీసిన అది తెలుపు లేక ఎరుపు బంతిగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.
12. 2, 5, 9 అంకెలనుపయోగించి రెండు అంకెల సంఖ్యను ఏర్పరిచిన (ఉపయోగించిన అంకెను తిరిగి ఉపయోగించవచ్చు), అది 2 లేక 5 చే భాగించబడు సంఖ్యగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.
13. "ACCOMMODATION" అను పదములోని ఒక్కొక్క అక్షరమును ఒక కాగితపు ముక్కపై వ్రాసి, ఆ 13 కాగితపు ముక్కలను ఒక కూజాలో ఉంచిరి. యాదృచ్ఛికముగా ఒక కాగితపు ముక్కను తీసిన అది (i) 'A' లేక 'O' అక్షరము (ii) 'M' లేక 'C' అక్షరముగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

14. ఒక క్రొత్త కారు దాని ఆకృతికై బహుమతి పొందుటకు గల సంభావ్యత 0.25, ఇంధనమును క్రమబద్ధముగా ఉపయోగించుటకై బహుమతి పొందుటకు గల సంభావ్యత 0.35 మరియు రెండు బహుమతులు పొందుటకు గల సంభావ్యత 0.5 అయిన క్రింది వాటికి సంభావ్యత కనుగొనుము.

(i) బహుమతులలో కనీసము ఒక బహుమతిని పొందుట;

(ii) ఒకే ఒక బహుమతి మాత్రము పొందుట.

15. ఒక సమస్యను A, B మరియు C లు సాధించుటకు గల సంభావ్యతలు క్రమముగా $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ మరియు $\frac{3}{7}$. A మరియు B సాధించుటకు గల సంభావ్యత $\frac{8}{15}$, B మరియు C సాధించుటకు గల సంభావ్యత $\frac{2}{7}$, A మరియు C సాధించుటకు గల సంభావ్యత $\frac{12}{35}$. ముగ్గురూ సాధించుటకు గల సంభావ్యత $\frac{8}{35}$ అయిన ఆ సమస్యను వారిలో కనీసము ఒకరు సాధించుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

అభ్యాసము 12.3

సరైన సమాధానమును ఎన్నుకొనుము.

1. ϕ అనునది ఒక అసాధ్యఘటనైన $P(\phi) =$

(A) 1 (B) $\frac{1}{4}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

2. S అనునది యాదృచ్ఛిక ప్రయోగ ప్రతిరూప ఆవరణ అయిన $P(S) =$

(A) 0 (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

3. ఘటన A యొక్క సంభావ్యత p అయిన, క్రింది వాటిలో p ని తృప్తిపరచునది

(A) $0 < p < 1$ (B) $0 \le p \le 1$ (C) $0 \le p < 1$ (D) $0 < p \le 1$

4. A మరియు B అనునవి ఏవేని రెండు ఘటనలు మరియు S అనునది ప్రతిరూప ఆవరణ అయిన $P(\overline{A} \cap B) =$

(A) $P(B) - P(A \cap B)$ (B) $P(A \cap B) - P(B)$

(C) $P(S)$ (D) $P[(A \cup B)']$

5. ఒక విద్యార్థి గణితశాస్త్రములో నూటికి నూరు మార్కులు తీయుటకు గల సంభావ్యత $\frac{4}{5}$ అయిన నూటికి నూరు మార్కులు రాకుండుటకు గల సంభావ్యత

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

6. A మరియు B అనునవి రెండు ఘటనలలో, $P(A)=0.25$, $P(B) = 0.05$, $P(A \cap B)=0.14$ అయిన $P(A \cup B) =$

(A) 0.61 (B) 0.16 (C) 0.14 (D) 0.6

7. 20 వస్తువులు గల ఒక మాదిరిలో 6 లోపమైనవి. యాదృచ్ఛికముగా ఒక వస్తువు తీసిన అది లోపము లేనిదిగా నుండుటకు గల సంభావ్యత.

(A) $\frac{7}{10}$ (B) 0 (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{2}{3}$

8. A మరియు B అనునవి పరస్పర వర్జిత ఘటనలు, S అనునది ప్రతిరూప ఆవరణ మరియు $P(A) = \frac{1}{3}P(B)$, $S = A \cup B$ అయిన $P(A) =$
(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{8}$

9. A, B మరియు C అను మూడు పరస్పర వర్జిత ఘటనల సంభావ్యతలు క్రమముగా $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ మరియు $\frac{5}{12}$ అయిన $P(A \cup B \cup C)$ అనునది
(A) $\frac{19}{12}$ (B) $\frac{11}{12}$ (C) $\frac{7}{12}$ (D) 1

10. $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.50$, $P(A \cap B) = 0.14$ అయిన $P(A$ ను కానిది మరియు B ను కానిది$) =$
(A) 0.39 (B) 0.25 (C) 0.11 (D) 0.24

11. ఒక సంచిలో 5 నలుపు, 4 తెలుపు మరియు 3 ఎరుపు బంతులున్నవి. యాదృచ్ఛికముగా ఒక బంతిని ఎన్నుకొనిన అది ఎరుపు బంతి కాకుండుటకు గల సంభావ్యత.
(A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{4}{12}$ (C) $\frac{3}{12}$ (D) $\frac{3}{4}$

12. రెండు పాచికలు ఒకేసారి విసరబడిన, రెండు ముఖ విలువలు ఒకే సంఖ్యగా నుండుటకు గల సంభావ్యత
(A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{2}{3}$

13. ఒక క్రమమైన నాణెమును విసిరినపుడు ప్రధానాంకము లేక సంయుక్త సంఖ్యగా నుండుటకు గల సంభావ్యత
(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{1}{6}$

14. ఒక నాణెమును 3 సార్లు ఎగురవేసినపుడు 3 బొమ్మలు లేక 3 బొరుసులు పొందుటకు గల సంభావ్యత
(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{1}{2}$

15. 52 ముక్కలు గల కట్టనుండి ఒక ముక్కను తీసిన అది ఏస్ మరియు రాజు ముక్కగా లేకుండుటకు గల సంభావ్యత
(A) $\frac{2}{13}$ (B) $\frac{11}{13}$ (C) $\frac{4}{13}$ (D) $\frac{8}{13}$

16. ఒక లీఫ్ సంవత్సరములో 53 శుక్రవారములు లేక 53 శనివారములు ఉండుటకు గల సంభావ్యత
(A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{1}{7}$ (C) $\frac{4}{7}$ (D) $\frac{3}{7}$

17. ఒక సాధారణ సంవత్సరములో 53 ఆదివారములు మరియు 53 సోమవారములు ఉండుటకు గల సంభావ్యత
(A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) 0

18. 52 ముక్కలున్న కట్టనుండి ఒక ముక్కను తీసిన అది హార్ట్‌రాణిగా నుండుటకు గల సంభావ్యత
(A) $\frac{1}{52}$ (B) $\frac{16}{52}$ (C) $\frac{1}{13}$ (D) $\frac{1}{26}$

19. ఖచ్చిత ఘటన యొక్క సంభావ్యత
(A) 1 (B) 0 (C) 100 (D) 0.1

20. ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములో వెలువడు ఫలితము గెలుపు లేక ఓటమిగా నుండును. గెలుపొందుటకు గల సంభావ్యత, ఓడిపోవుటకు గల సంభావ్యతకు రెండు రెట్లు అయిన, గెలుపొందుటకు గల సంభావ్యత
(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 1 (D) 0

జవాబులు

1. సమితులు మరియు ప్రమేయములు

అభ్యాసము 1.1

2. (i) A (ii) ϕ **3.** (i) {b, c} (ii) ϕ (iii) $\{a, e, f, s\}$

4. (i) {2, 4, 6, 7, 8, 9} (ii) {4, 6} (iii) {4, 6, 7, 8, 9}

10. {–5, –3, –2}, {–5, –3}, సహచర్యము వర్తించదు

అభ్యాసము 1.2

2. (i) నుండి (iv) వరకు వివిధ రకముల సమాధానములను పొందవచ్చు. వాటిలోని ఒక సమాధానము

(i) $A' \cup (A \cap B)$ or $(A \backslash B)'$ (ii) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ (iii) $A \backslash (B \cup C)$ (iv) $(A \cap B) \backslash C$

5. (i) {12} (ii) {4, 8, 12, 20, 24, 28}

అభ్యాసము 1.3

1. 300 **2.** 430 **3.** 35 **5.** 100 **6.** 30 **7.** (i) 10 (ii) 25 (iii) 15

8. (i) 450 (ii) 3550 (iii) 1850 **9.** 15

అభ్యాసము 1.4

1. (i) ప్రమేయం కాదు (ii) ప్రమేయం **2.** ప్రదేశము ={1, 2, 3, 4, 5};వ్యాప్తి ={1, 3, 5, 7, 9}

3. (i) అన్వేకము కాదు, సంగ్రస్తము కాదు (ii) స్థిర ప్రమేయం (iii) అన్వేక మరియు సంగ్రస్త ప్రమేయం

4. (i) ప్రమేయం కాదు (ii) అన్వేక ప్రమేయం (iii) ప్రమేయం కాదు (iv) ద్విగుణ

5. $a = -2,\ b = -5,\ c = 8,\ d = -1$ **6.** వ్యాప్తి $\left\{-\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2}\right\}$; A నుండి A కు f ప్రమేయం కాదు.

7. ఏక–ఏక మరియు సంగ్రస్త ప్రమేయం **8.** (i) 12 మరియు 14 (ii) 13 మరియు 15 **9.** $a = 9,\ b = 15$

10. (i) $f = \{(5, -7), (6, -9), (7, -11), (8, -13)\}$

(ii) సహ ప్రదేశము $= \{-11, 4, 7, -10, -7, -9, -13\}$

(iii) వ్యాప్తి $= \{-7, -9, -11, -13\}$ (iv) అన్వేక ప్రమేయం

11. (i) ప్రమేయం (ii) ప్రమేయం (iii) ప్రమేయం కాదు (iv) ప్రమేయం కాదు (v) ప్రమేయం

12.

x	–1	–3	–5	–4
$f(x)$	2	1	6	3

13. $\{(6, 1), (9, 2), (15, 4), (18, 5), (21, 6)\}$

x	6	9	15	18	21
$f(x)$	1	2	4	5	6

14. $\{(4,3),(6,4),(8,5),(10,6)\}$

x	4	6	8	10
$f(x)$	3	4	5	6

15. (i) 16 (ii) –32 (iii) 5 (iv) $\frac{2}{3}$ **16.** (i) 23 (ii) 34 (iii) 2

అభ్యాసము 1.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	C	A	A	B	A	B	B	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	B	C	D	A	D	D	B	A	C

2. వాస్తవ సంఖ్యల క్రమానుగత శ్రేణులు

అభ్యాసము 2.1

1. (i) $-\frac{1}{3}, 0, 1$ (ii) $-27,\ 81,\ -243$ (iii) $-\frac{3}{4},\ 2,\ -\frac{15}{4}$

2. (i) $\frac{9}{17}, \frac{11}{21}$ (ii) –1536, 18432 (iii) 36, 78 (iv) –21,57

3. 378, $\frac{25}{313}$ **4.** 195, 256 **5.** 2, 5, 15, 35, 75 **6.** 1, 1, 1, 2, 3, 5

అభ్యాసము 2.2

1. A.P : 6, 11, 16, $\cdots$; సామాన్య పదము $5n+1$ **2.** సామాన్య భేదము –5, $t_{15} = 55$

3. $t_{29} = 3$ **4.** $t_{12} = 23\sqrt{2}$ **5.** $t_{17} = 84$ **6.** (i) 27 పదములు (ii) 34 పదములు

8. $t_{27} = 109$ **9.** $n = 10$ **10.** 7 **11.** మొదటి సంవత్సరము : 100, $t_{15} = 2200$

12. 2560 **13.** 10, 2, –6 లేక –6, 2, 10 **14.** 2, 6, 10 లేక 10, 6, 2 **16.** A.P., ₹91,500

అభ్యాసము 2.3

1. (i) గుణశ్రేఢి, $r = 2$ (ii) గుణశ్రేఢి, $r = 5$ (iii) గుణశ్రేఢి, $r = \frac{2}{3}$ (iv) గుణశ్రేఢి, $r = \frac{1}{12}$

(v) గుణశ్రేఢి, $r = \frac{1}{2}$ (vi) గుణశ్రేఢి కాదు

2. -2^7 **3.** 2, 6, 18 , $\cdots$ **4.** $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots$ **5.** (i) $n = 8$ (ii) $n = 11$ **6.** $n = 5$ **7.** $r = 5$

8. $r = \frac{5}{2}$ or $\frac{2}{5}$; ఆ పదములు : $\frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}$. (or) $\frac{5}{2}, 1, \frac{2}{5}$. **9.** 18, 6, 2 (or) 2, 6, 18

10. 4, 2, 1 (or) 1, 2, 4 **11.** $1, 3, 9, \cdots$ (or) $9, 3, 1, \cdots$ **12.** $1000\left(\frac{105}{100}\right)^{12}$ **13.** $50,000 \times \left(\frac{55}{100}\right)^{15}$

అభ్యాసము 2.4

1. (i) 2850 (ii) 7875 **2.** 1020 **3.** (i) 260 (ii) 375 **4.** (i) 1890 (ii) 50 **5.** –3240

6. $\frac{39}{11} + \frac{40}{11} + \frac{41}{11} + \cdots$ **7.** 8 పదములు **8.** 55350 **9.** 740 **10.** 7227 **11.** 36

12. 13995 **13.** 15 రోజులు **14.** అంకశ్రేఢి, ₹37,200 **15.** అంకశ్రేణి కాదు

16. 156 సార్లు **20.** 1225 ఇటుకలు

అభ్యాసము 2.5

1. $s_{20} = \frac{15}{4}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right]$ **2.** $s_{27} = \frac{1}{6}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{27}\right]$ **3.** (i) 765 (ii) $\frac{5}{2}(3^{12} - 1)$

4. (i) $\frac{1-(0.1)^{10}}{0.9}$ (ii) $\frac{10}{81}(10^{20} - 1) - \frac{20}{9}$ **5.** (i) $n = 6$ (ii) $n = 6$ **6.** $\frac{75}{4}\left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{23}\right]$

7. $3 + 6 + 12 + \cdots$ **8.** (i) $\frac{70}{81}[10^n - 1] - \frac{7n}{9}$ (ii) $1 - \frac{2}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right]$

9. $s_{15} = \frac{5(4^{15} - 1)}{3}$ **10.** రెండవ అవకాశము, మామిడి పండ్ల సంఖ్య 1023. **11.** $r = 2$

అభ్యాసము 2.6

1. (i) 1035 (ii) 4285 (iii) 2550 (iv) 17395 (v) 10630 (vi) 382500

2. (i) $k = 12$ (ii) $k = 9$ **3.** 29241 **4.** 91 **5.** 3818 cm^2 **6.** 201825 cm^3

అభ్యాసము 2.7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	D	C	D	D	A	B	B	B	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	A	B	D	A	B	B	A	C	A

3. బీజగణితము

అభ్యాసము 3.1

1. $(4, \frac{3}{2})$ **2.** $(1, 5)$ **3.** $(3, 2)$ **4.** $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ **5.** $(1, 5)$ **6.** $(\frac{11}{23}, \frac{22}{31})$

7. $(2, 4)$ **8.** $(2, 1)$ **9.** $(5, \frac{1}{7})$ **10.** $(6, -4)$

అభ్యాసము 3.2

1. (i) $(4, 3)$ (ii) $(0.4, 0.3)$ (iii) $(2, 3)$ (iv) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

2. (i) 23 , 7 (ii) ₹18,000 , ₹14,000 (iii) 42 (iv) ₹800 (v) 253 చ.సెం.మీ (vi) 720 కి.మీ

అభ్యాసము 3.3

1. (i) $4, -2$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}$ (iv) $0, -2$ (v) $\sqrt{15}, -\sqrt{15}$ (vi) $\frac{2}{3}, 1$

(vii) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ (viii) $-13, 11$

2. (i) $x^2 - 3x + 1$ (ii) $x^2 - 2x + 4$ (iii) $x^2 + 4$ (iv) $x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{5}$

(v) $x^2 - \frac{x}{3} + 1$ (vi) $x^2 - \frac{x}{2} - 4$ (vii) $x^2 - \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$ (viii) $x^2 - \sqrt{3}x + 2$

అభ్యాసము 3.4

1. (i) $x^2 + 2x - 1, \; 4$ (ii) $3x^2 - 11x + 40, \; -125$ (iii) $x^2 + 2x - 2, \; 2$

(iv) $x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{5}{9}, \; -\frac{50}{9}$ (v) $2x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}x + \frac{51}{32}, \; -\frac{211}{32}$

(vi) $x^3 - 3x^2 - 8x + \frac{55}{2}, \; -\frac{41}{2}$

2. $a = -6,\ b = 11,$ శేషము 5 **3.** $p = -2,\ q = 0,$ శేషము -10 –

అభ్యాసము 3.5

1. (i) $(x-1)(x+2)(x-3)$ (ii) $(x-1)(2x+3)(2x-1)$ (iii) $(x-1)(x-12)(x-10)$
(iv) $(x-1)(4x^2-x+6)$ (v) $(x-1)(x-2)(x+3)$ (vi) $(x+1)(x+2)(x+10)$
(vii) $(x-2)(x-3)(2x+1)$ (viii) $(x-1)(x^2+x-4)$ (ix) $(x-1)(x+1)(x-10)$
(x) $(x-1)(x+6)(2x+1)$ (xi) $(x-2)(x^2+3x+7)$ (xii) $(x+2)(x-3)(x-4)$

అభ్యాసము 3.6

1. (i) $7x^2yz^3$ (ii) x^2y (iii) $5c^3$ (iv) $7xyz^2$

2. (i) $c-d$ (ii) $x-3a$ (iii) $m+3$ (iv) $x+11$ (v) $x+2y$
(vi) $2x+1$ (vii) $x-2$ (viii) $(x-1)(x^2+1)$ (ix) $4x^2(2x+1)$ (x) $(a-1)^3(a+3)^2$

3. (i) x^2-4x+3 (ii) $x+1$ (iii) $2(x^2+1)$ (iv) x^2+4

అభ్యాసము 3.7

1. x^3y^2z **2.** $12x^3y^3z$ **3.** $a^2b^2c^2$ **4.** $264a^4b^4c^4$ **5.** a^{m+3}

6. $xy(x+y)$ **7.** $6(a-1)^2(a+1)$ **8.** $10xy(x+3y)(x-3y)(x^2-3xy+9y^2)$

9. $(x+4)^2(x-3)^3(x-1)$ **10.** $420x^3(3x+y)^2(x-2y)(3x+1)$

అభ్యాసము 3.8

1. (i) $(x-3)(x-2)(x+6)$ (ii) $(x^2+2x+3)(x^4+2x^2+x+2)$
(iii) $(2x^2+x-5)(x^3+8x^2+4x-21)$ (iv) $(x^3-5x-8)(2x^3-3x^2-9x+5)$

2. (i) $(x+1)(x+2)^2$ (ii) $(3x-7)^3(4x+5)$ (iii) $(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$
(iv) $x(x+2)(5x+1)$ (v) $(x-2)(x-1)$ (vi) $2(x+1)(x+2)$

అభ్యాసము 3.9

1. (i) $\frac{2x+3}{x-4}$ (ii) $\frac{1}{x^2-1}$ (iii) $(x-1)$ (iv) $\frac{x^2+3x+9}{x+3}$
(v) x^2-x+1 (vi) $\frac{x+2}{x^2+2x+4}$ (vii) $\frac{x-1}{x+1}$ (viii) $(x+3)$
(ix) $\frac{(x-1)}{(x+1)}$ (x) 1 (xi) $\frac{(x+1)}{(2x-1)}$ (xii) $(x-2)$

అభ్యాసము 3.10

1. (i) $3x$ (ii) $\frac{x+9}{x-2}$ (iii) $\frac{1}{x+4}$ (iv) $\frac{1}{x-1}$ (v) $\frac{2x+1}{x+2}$ (vi) 1

2. (i) $\frac{x-1}{x}$ (ii) $\frac{x-6}{x-7}$ (iii) $\frac{x+1}{x-5}$ (iv) $\frac{x-5}{x-11}$ (v) 1 (vi) $\frac{3x+1}{4(3x+4)}$ (vii) $\frac{x-1}{x+1}$

అభ్యాసము 3.11

1. (i) $x^2 + 2x + 4$ (ii) $\frac{2}{x+1}$ (iii) $\frac{2(x+4)}{x+3}$ (iv) $\frac{2}{x-5}$

(v) $\frac{x+1}{x-2}$ (vi) $\frac{4}{x+4}$ (vii) $\frac{2}{x+1}$ (viii) 0

2. $\frac{2x^3 + 2x^2 + 5}{x^2 + 2}$ **3.** $\frac{5x^2 - 7x + 6}{2x - 1}$ **4.** 1

అభ్యాసము 3.12

1. (i) $14|a^3b^4c^5|$ (ii) $17|(a-b)^2(b-c)^3|$ (iii) $|x-11|$

(iv) $|x+y|$ (v) $\frac{11}{9}\left|\frac{x^2}{y}\right|$ (vi) $\frac{8}{5}\left|\frac{(a+b)^2(x-y)^4(b-c)^3}{(x+y)^2(a-b)^3(b+c)^5}\right|$

2. (i) $|4x-3|$ (ii) $|(x+5)(x-5)(x+3)|$ (iii) $|2x-3y-5z|$

(iv) $\left|x^2 + \frac{1}{x^2}\right|$ (v) $|(2x+3)(3x-2)(2x+1)|$ (vi) $|(2x-1)(x-2)(3x+1)|$

అభ్యాసము 3.13

1. (i) $|x^2 - 2x + 3|$ (ii) $|2x^2 + 2x + 1|$ (iii) $|3x^2 - x + 1|$ (iv) $|4x^2 - 3x + 2|$

2. (i) $a = -42, b = 49$ (ii) $a = 12, b = 9$ (iii) $a = 49, b = -70$ (iv) $a = 9, b = -12$

అభ్యాసము 3.14

1. $\{-6, 3\}$ **2.** $\left\{-\frac{4}{3}, 3\right\}$ **3.** $\left\{-\sqrt{5}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right\}$ **4.** $\left\{-\frac{3}{2}, 5\right\}$ **5.** $\left\{-\frac{4}{3}, 2\right\}$

6. $\left\{5, \frac{1}{5}\right\}$ **7.** $\left\{-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right\}$ **8.** $\left\{\frac{1}{b^2}, \frac{1}{a^2}\right\}$ **9.** $\left\{-\frac{5}{2}, 3\right\}$ **10.** $\left\{7, \frac{8}{3}\right\}$

అభ్యాసము 3.15

1. (i) $\{-7, 1\}$ (ii) $\left\{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right\}$ (iii) $\left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$

(iv) $\left\{\frac{a-b}{2}, -\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\}$ (v) $\{\sqrt{3}, 1\}$ (vi) $\{-1, 3\}$

2. (i) $\{4, 3\}$ (ii) $\left\{\frac{2}{5}, \frac{1}{3}\right\}$ (iii) $\left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$ (iv) $\left\{-\frac{2b}{3a}, \frac{b}{a}\right\}$

(v) $\left\{\frac{1}{a}, a\right\}$ (vi) $\left\{\frac{a+b}{6}, \frac{a-b}{6}\right\}$ (vii) $\frac{(9+\sqrt{769})}{8}, \frac{(9-\sqrt{769})}{8}$ (viii) $\left\{-1, \frac{b^2}{a^2}\right\}$

అభ్యాసము 3.16

1. 8 లేక $\frac{1}{8}$ **2.** 9 మరియు 6 **3.** 20 మీ, 5మీ లేక 10మీ, 10మీ **4.** $\frac{3}{2}$ మీ

5. 45 కి.మీ/గం **6.** 5 కి.మీ/గం **7.** 49 సం॥లు, 7 సం॥లు **8.** 24 సెం.మీ **9.** 12 రోజులు

10. మొదటి రైలు వేగము 20 కి.మీ/గం మరియు రెండవ రైలు వేగము 15 కి.మీ/గం

అభ్యాసము 3.17

1. (i) వాస్తవం (ii) అవాస్తవం (iii) వాస్తవములు మరియు సమానములు (iv) వాస్తవములు మరియు సమానములు (v) అవాస్తవములు (vi) వాస్తవం

2. (i) $\frac{25}{2}$ (ii) ± 3 (iii) -5 or 1 (iv) 0 or 3

అభ్యాసము 3.18

1. (i) 6,5 (ii) $-\frac{r}{k}, p$ (iii) $\frac{5}{3}, 0$ (iv) $0, -\frac{25}{8}$

2. (i) $x^2 - 7x + 12 = 0$ (ii) $x^2 - 6x + 2 = 0$ (iii) $4x^2 - 16x + 9 = 0$

3. (i) $\frac{13}{6}$ (ii) $\pm\frac{1}{3}$ (iii) $\frac{35}{18}$ **4.** $\frac{4}{3}$ **5.** $4x^2 - 29x + 25 = 0$

6. $x^2 + 3x + 2$ **7.** $x^2 - 11x + 1 = 0$ **8.** (i) $x^2 - 6x + 3 = 0$

(ii) $27x^2 - 18x + 1 = 0$ (iii) $3x^2 - 18x + 25 = 0$ **9.** $x^2 + 3x - 4 = 0$

10. $k = -18$ **11.** $a = \pm 24$ **12.** $p = \pm 3\sqrt{5}$

అభ్యాసము 3.19

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	A	A	C	D	B	C	C	C
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	B	A	A	A	D	D	D	B	C
21	22	23	24	25					
D	A	C	C	A					

4. మాత్రికలు

అభ్యాసము 4.1

1. $\begin{pmatrix} 400 & 500 \\ 200 & 250 \\ 300 & 400 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 400 & 200 & 300 \\ 500 & 250 & 400 \end{pmatrix}, 3 \times 2,\ 2 \times 3$ **2.** $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 8 & 13 \end{pmatrix}$

3. (i) 2×3 (ii) 3×1 (iii) 3×3 (iv) 1×3 (v) 4×2

4. $1 \times 8,\ 8 \times 1,\ 2 \times 4,\ 4 \times 2$

5. $1 \times 30, 30 \times 1, 2 \times 15, 15 \times 2, 3 \times 10, 10 \times 3, 5 \times 6, 6 \times 5, 10 \times 1, 1 \times 10, 15 \times 1, 1 \times 15$

6. (i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$ **7.** (i) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$

8. (i) 3×4 (ii) 4, 0 (iii) 2వ అడ్డు వరుస మరియు 3వ నిలువ వరుస **9.** $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

అభ్యాసము 4.2

1. $x = 2,\ y = -4,\ z = -1$ **2.** $x = 4,\ y = -3$

3. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 16 & -6 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 14 & 5 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 0 & -18 \\ 33 & -45 \end{pmatrix}$ **6.** $a = 3,\ b = -4$

7. $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{12}{5} \\ -\frac{11}{5} & 3 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{14}{5} & -2 \end{pmatrix}$ **8.** $x = -3, -3,\ \ y = -1, 4$

11. $\begin{array}{c} \\ \end{array}$

	TV	DVD	Video	CD	
	55	27	20	16	దుకాణంI
	72	30	25	27	దుకాణంII
	47	33	18	22	దుకాణంIII

12.

పిల్లలు	పెద్దలు	
5	5	2pm ముందు
10	10	2pm తరువాత

అభ్యాసము 4.3

1. (i) 4×2 (ii) నిర్వచింపలేము (iii) 3×5 (iv) 2×2

2. (i) (6) (ii) $\begin{pmatrix} 8 & -11 \\ 22 & 12 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} -40 & 64 \\ 22 & 1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 12 & -42 \\ -6 & 21 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1750 \\ 1600 \\ 1650 \end{pmatrix}$ రోజు I, రోజు II, రోజు III , (5000) **4.** $x = 3,\ y = 0$ **5.** $x = 2,\ y = -5$

7. $AB = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 12 & 0 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 17 & 6 \end{pmatrix},\ AB \neq BA$ **11.** $x = -3, 5$

అభ్యాసము 4.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	D	A	D	B	D	B	C	C	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	D	D	B	C	B	A	C	B	D

5. నిరూపకజ్యామితి

అభ్యాసము 5.1

1. (i) (–2, 1) (ii) (0,2) **2.** (i) (5,–2) (ii) (2, –1) **3.** (–12, 8)

4. (2, –2) **6.** (–24,–2) **7.** (–2, 3) **8.** (–6,–3) **9.** (–1, 0), (–4, 2)

10. $\left(-3, \frac{3}{2}\right),\ (-2, 3),\ \left(-1, \frac{9}{2}\right)$ **11.** 4 : 7 అంతరంగా

12. 5:2 అంతరంగా , $\left(0, \frac{17}{7}\right)$ **13.** $\frac{\sqrt{130}}{2},\ \sqrt{13},\ \frac{\sqrt{130}}{2}$

అభ్యాసము 5.2

1. (i) 3 చ.యూనిట్లు (ii) 32 చ.యూనిట్లు (iii) 19 చ.యూనిట్లు

2. (i) $a = -3$ (ii) $a = \frac{13}{2}$ (iii) $a = 1, 3$

3. (i) ఏకరేఖీయములు (ii) ఏకరేఖీయములు కాదు (iii) ఏకరేఖీయములు

4. (i) k = 1 (ii) k = 2 (iii) $k = \frac{7}{3}$

5. (i) 17 చ.యూనిట్లు (ii) 43 చ.యూనిట్లు (iii) 60.5 చ.యూనిట్లు **7.** 1 చ.యూనిట్లు, 1 : 4

అభ్యాసము 5.3

1. (i) 45° (ii) 60° (iii) 0° **2.** (i) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) $\sqrt{3}$ (iii) నిర్వచింపలేము

3. (i) 1 (ii) –2 (iii) 1 **4.** (i) 45° (ii) 30° (iii) $\tan\theta = \frac{b}{a}$

5. $-\frac{1}{2}$ **6.** (i) 0 (ii) నిర్వచింపలేము (iii) 1 **7.** $\sqrt{3}$, 0 **10.** $a = -1$

11. $b = 6$ **12.** $-\frac{9}{10}$ **13.** $\frac{11}{7}, -13, -\frac{1}{4}$ **14.** $\frac{1}{12}, -\frac{4}{5}, \frac{9}{2}$

అభ్యాసము 5.4

1. $y = 5$, $y = -5$ **2.** $y = -2$, $x = -5$ **3.** (i) $3x + y - 4 = 0$ (ii) $\sqrt{3}x - y + 3 = 0$

4. $x - 2y + 6 = 0$ **5.** (i) వాలు 1, y-అంతరఖండము 1 (ii) వాలు $\frac{5}{3}$, y-అంతరఖండము 0

(iii) వాలు 2, y-అంతరఖండము $\frac{1}{2}$ (iv) వాలు $-\frac{2}{3}$, y-అంతరఖండము $-\frac{2}{5}$

6. (i) $4x + y - 6 = 0$ (ii) $2x - 3y - 22 = 0$ **7.** $2x - 2\sqrt{3}y + (3\sqrt{3} - 7) = 0$

8. (i) $x - 5y + 27 = 0$ (ii) $x + y + 6 = 0$ **9.** $6x + 5y - 2 = 0$

11. (i) $3x + 2y - 6 = 0$ (ii) $9x - 2y + 3 = 0$ (iii) $15x - 8y - 6 = 0$

12. (i) 3,5 (ii) –8, 16 (iii) $-\frac{4}{3}, -\frac{2}{5}$, **13.** $2x + 3y - 18 = 0$

14. $2x + y - 6 = 0$, $x + 2y - 6 = 0$ **15.** $x - y - 8 = 0$

16. $x + 3y - 6 = 0$ **17.** $2x + 3y - 12 = 0$ **18.** $x + 2y - 10 = 0$, $6x + 11y - 66 = 0$

19. $x + y - 5 = 0$ **20.** $3x - 2y + 4 = 0$

అభ్యాసము 5.5

1. (i) $-\frac{3}{4}$ (ii) 7 (iii) $\frac{4}{5}$ **4.** $a = 6$ **5.** $a = 5$ **6.** $p = 1,2$ **7.** $h = \frac{22}{9}$

8. $3x - y - 5 = 0$ **9.** $2x + y = 0$ **10.** $2x + y - 5 = 0$ **11.** $x + y - 2 = 0$

12. $5x + 3y + 8 = 0$ **13.** $x + 3y - 7 = 0$ **14.** $x - 3y + 6 = 0$

15. $x - 4y + 20 = 0$ **16.** (3, 2) **17.** 5 యూనిట్లు **18.** $x + 2y - 5 = 0$

19. $2x + 3y - 9 = 0$

అభ్యాసము 5.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	B	A	D	A	B	D	A	D	C	C	B
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
C	C	C	D	B	B	D	A	A	B	B	

6. రేఖాగణితం

అభ్యాసము 6.1

1. (i) 20సెం.మీ (ii) 6సెం.మీ (iii) 1 **2.** 7.5సెం.మీ **3.** (i) కాదు (ii) అవును **4.** 10.5 సెం.మీ **6.** 12సెం.మీ, 10సెం.మీ **9.** (i) 7.5సెం.మీ (ii) 5.8సెం.మీ (iii) 4 **10.** (i) అవును (ii) కాదు **11.** 18 సెం.మీ

అభ్యాసము 6.2

1. (i) $x = 4$సెం.మీ, $y = 9$సెం.మీ (ii) $x = 3.6$ సెం.మీ, $y = 2.4$ సెం.మీ, $z = 10$సెం.మీ

(iii) $x = 8.4$ సెం.మీ, $y = 2.5$ సెం.మీ

2. 3.6మీ **3.** 1.2మీ **4.** 140మీ **6.** 6 సెం.మీ **7.** 64చ.సెం.మీ **8.** 166.25 సెం.మీ

9. (i) $\frac{9}{64}$ (ii) $\frac{55}{64}$ **10.** 6.3చ.కి.మీ **11.** 72 సెం.మీ **12.** 9మీ

13. (i) $\triangle XWY$, $\triangle YWZ$, $\triangle XYZ$ (ii) 4.8మీ

అభ్యాసము 6.3

1. 65° **2.** (i) 4 సెం.మీ (ii) 12 సెం.మీ **3.** (i) 12 సెం.మీ (ii) 1 సెం.మీ **6.** 30 సెం.మీ

అభ్యాసము 6.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	A	D	B	C	B	D	B	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	D	C	D	D	A	B	B	D	C

7. త్రికోణమితి

అభ్యాసము 7.1

1. (i) కాదు (ii) కాదు

అభ్యాసము 7.2

1. 1.8మీ **2.** 30° **3.** కాదు **4.** 174.7 మీ **5.** 40 సెం.మీ **6.** కాకి B

7. $5\sqrt{6}$ మీ **8.** 1912.40మీ **9.** $30\sqrt{2}$ మీ **10.** 1.098 మీ **11.** $19\sqrt{3}$ మీ

12. అవును **13.** 87 మీ **14.** 3 నిమిషములు **15.** 3464 కి.మీ **16.** 40 మీ

17. 60 మీ; $40\sqrt{3}$ మీ **18.** 90మీ

అభ్యాసము 7.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	C	A	A	B	A	A	C	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	C	A	D	C	C	D	B	B	D

8. గణనము

అభ్యాసము 8.1

1. 704చ.సెం.మీ, 1936 చ.సెం.మీ **2.** h = 8 సెం.మీ, 352 చ.సెం.మీ **3.** h = 40 సెం.మీ, d = 35 సెం.మీ
4. ₹ 2640 **5.** r = 3.5 సెం.మీ, h = 7 సెం.మీ **6.** h = 28 సెం.మీ
7. $C_1 : C_2 = 5 : 2$ **8.** 612π చ.సెం.మీ **9.** 3168 చ.సెం.మీ
10. 550చ.సెం.మీ, 704చ.సెం.మీ **11.** $h = 15\sqrt{3}$ సెం.మీ, l = 30 సెం.మీ **12.** 1416చ.సెం.మీ
13. 23.1m^2 **14.** 10.5 సెం.మీ **15.** $301\frac{5}{7}$ చ.సెం.మీ **16.** 2.8 సెం.మీ
17. 4158చ.సెం.మీ **18.** $C_1 : C_2 = 9 : 25$, $T_1 : T_2 = 9 : 25$
19. 44.1π చ.సెం.మీ, 57.33π చ.సెం.మీ **20.** ₹ 246.40

అభ్యాసము 8.2

1. 18480 ఘ.సెం.మీ **2.** 38.5 లీటర్లు **3.** 4620 ఘ.సెం.మీ **4.** r = 2.1 సెం.మీ
5. $V_1 : V_2 = 20 : 27$ **6.** 10 సెం.మీ **7.** 4158 ఘ.సెం.మీ **8.** 7.04 ఘ.సెం.మీ
9. 8800 ఘ.సెం.మీ **10.** 616 ఘ.సెం.మీ **11.** 5సెం.మీ **12.** 1408.6 ఘ.సెం.మీ
13. $314\frac{2}{7}$ ఘ.సెం.మీ **14.** $2\sqrt{13}$ సెం.మీ **15.** 8 సెం.మీ **16.** 2.29 కి.గ్రా
17. $3050\frac{2}{3}$ ఘ.సెం.మీ **18.** 288π చ.సెం.మీ **19.** $718\frac{2}{3}$ ఘ.సెం.మీ **20.** 1: 8

అభ్యాసము 8.3

1. 11.88π చ.సెం.మీ **2.** 7623ఘ.సెం.మీ **3.** 220 చ.సెం.మీ **4.** 1034 చ.మీ
5. 12 సెం.మీ **6.** 12.8 కి.మీ **7.** 2 సెం.మీ **8.** 1 సెం.మీ
9. 1386 లీటర్లు **10.** 3 గంటలు. 12 నిమిషములు. **11.** 16 సెం.మీ **12.** 16 సెం.మీ
13. 750 సీసపు గుండ్లు **14.** 10 శంఖువులు **15.** 70 సెం.మీ
16. r = 36 సెం.మీ, $l = 12\sqrt{13}$ సెం.మీ **17.** 11మీ

అభ్యాసము 8.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B	C	A	A	B	C	A	B	D	C	C
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
D	D	B	D	B	C	B	D	A	D	C

10. రేఖాచిత్రములు

అభ్యాసము 10.1

2. (i) $\{-2, 2\}$ (ii) $\{-2, 5\}$ (iii) $\{5, 1\}$ (iv) $\{-\frac{1}{2}, 3\}$
3. {–1, 5} **4.** {–2, 3} **5.** {–2.5, 2} **6.** {–3, 5} **7.** సాధన లేదు

అభ్యాసము 10.2

1. 120 కి.మీ **2.** (i) ₹105 (ii) 11 **3.** (i) $y = 8$ (ii) $x = 6$
4. (i) $k = 15$ (ii) ₹ 45 **5.** $y = 4$; $x = 2$ **6.** 24 రోజులు

11. సాంఖ్యాక శాస్త్రము

అభ్యాసము 11.1

1. (i) 36, 0.44 (ii) 44, 0.64 **2.** 71 **3.** 3.38 కి.గ్రా **4.** $2\sqrt{5}$, 20 **5.** 3.74

6. (i) 5.97 (ii) 4.69 **7.** 6.32 **8.** 1.107 **9.** 15.08

10. 36.76, 6.06 **11.** 416, 20. 39 **12.** 54.19 **13.** 4800, 240400 **14.** 10.2, 1.99

15. 25 **16.** 20.42 **17.** 12 **18.** 5.24 **19.** 1159, 70

20. *A* ఎక్కువ స్థిరమైనది

అభ్యాసము 11.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	A	C	B	D	C	C	B	A	D
11	12	13	14	15					
D	B	C	D	B					

12. సంభావ్యత

అభ్యాసము 12.1

1. $\frac{1}{10}$ **2.** $\frac{1}{9}$ **3.** $\frac{1}{3}$ **4.** $\frac{1}{5}$ **5.** $\frac{3}{4}$

6. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{12}{13}$ **7.** (i) $\frac{7}{8}$ (ii) $\frac{3}{8}$ (iii) $\frac{1}{2}$

8. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{5}$ **9.** (i) $\frac{1}{10}$ (ii) $\frac{24}{25}$ **10.** $\frac{1}{2}$ **11.** (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{2}{3}$

12. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{17}{20}$ **13.** $\frac{1}{3}$ **14.** $\frac{1}{36}$ **15.** $\frac{1}{6}$ **16.** 12

17. (i) $\frac{22}{25}$ (ii) $\frac{24}{25}$ **18.** (i) $\frac{1}{4}$, (ii) 3 **19.** (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{17}{18}$

అభ్యాసము 12. 2

1. $\frac{4}{5}$ **2.** $\frac{3}{20}$ **3.** (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{4}{5}$ **4.** $\frac{5}{9}$ **5.** $\frac{8}{25}$

6. $\frac{5}{8}$ **7.** $\frac{4}{9}$ **8.** $\frac{9}{10}$ **9.** $\frac{3}{5}$ **10.** $\frac{4}{13}$

11. $\frac{8}{13}$ **12.** $\frac{2}{3}$ **13.** $\frac{5}{13}, \frac{4}{13}$ **14.** (i) 0.45 (ii) 0.3 **15.** $\frac{101}{105}$

అభ్యాసము 12. 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	D	B	A	A	B	A	A	D	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	C	C	B	B	C	D	A	A	B

మిశ్రమ సమస్యలు

(పరీక్షకు కాదు)

1. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $x \neq 1$ అయిన, $f(2x) = \frac{3f(x)+1}{f(x)+3}$ అని నిరూపించుము.

2. వాస్తవ విలువల x కు $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 15$ సమీకరణమును సాధించుము..

   (జవాబు: $x = \frac{5 \pm \sqrt{2}}{2}$)

3. x యొక్క ఏ విలువకు $\log_{10} 2, \log_{10}(2^x - 1)$ మరియు $\log_{10}(2^x + 3)$ అను మూడు సంఖ్యలను క్రమముగా తీసుకొనిన ఒక A.P. ని ఏర్పరుచును? (జవాబు: $x = \log_5 2$)

4. సామాన్య నిష్పత్తి r ను కలిగిన ఒక G.P. లో మొదటి నాలుగు పదముల మొత్తము 15 మరియు వాటి వర్గముల మొత్తము 85 అయిన, $14r^4 - 17r^3 - 17r^2 - 17r + 14 = 0$ అని నిరూపింపుము.

5. $b_n^2 = b_{n-1}\, b_{n+1}$, $n > 1$ అయినట్లయిన, $\{b_n\}$ అను వరుస ఒక G.P. అగునని నిరూపింపుము.

6. 17, 21 .... మరియు 16, 21....... అను రెండు అంకశ్రేఢిలలో కొన్ని సంఖ్యలు కనబడును. రెండు శ్రేణిలలో కనబడు మొదటి పది సంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనుము.

7. $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n > 1$ అయినట్లయిన, $\{a_n\}$ అను వరుస ఒక A.P. అగునని నిరూపింపుము.

8. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$ అని నిరూపింపుము.

9. $\frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x} = \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$ అని నిరూపింపుము.

10. ఒక రెండంకెల సంఖ్యను వాటి అంకెల మొత్తముతో భాగించిన, భాగఫలము 4 మరియు శేషము 3 వచ్చును. అదే రెండంకెల సంఖ్యను వాటి అంకెల లబ్ధముతో భాగించిన, భాగఫలము 3 మరియు శేషము 5 వచ్చును. అయిన ఆ రెండంకెల సంఖ్యను కనుగొనుము. (జవాబు : 23)

11. 4 చే భాగించగా శేషము 1 గా వచ్చు రెండంకెల సంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనుము.

    (జవాబు : 1210)

12. $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}} \times \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)(a+b+c)^{-2}$ సమాసమును సూక్ష్మీకరింపుము.

    (జవాబు : $\frac{1}{2bc}$)

13. $ax^2 + bx + c = 0$ అను ద్విఘాత సమీకరణమునకు వాస్తవ మూలములు లేవు మరియు $a + b + c < 0$ గా వుండును. అయిన c అను సంఖ్య గుర్తును కనుగొనుము. (సూచన: $f(x) = 0$ నకు వాస్తవ మూలములు లేనట్లయిన, $f(x)$ యందు కు ఒకే గుర్తును కలిగియుండును)

    (జవాబు: $c < 0$)

14. $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - x + 6} > 0$ అగునట్లు, x యొక్క అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

    (జవాబు $x > 1$)

15. సాధించుము: $1 + a + a^2 + \cdots + a^x = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)(1 + a^8)$

(జవాబు: $x = 15$)

16. గణించుము: $\dfrac{6x_1^2x_2 - 4x_1^3 + 6x_1x_2^2 - 4x_2^3}{3x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2}$ యందు x_1 మరియు x_2 అనునవి $x^2 - 5x + 2 = 0$ సమీకరణము యొక్క మూలములు. (జవాబు : $-\dfrac{320}{73}$)

17. సర్వసమానతను నిరూపింపుము: $\operatorname{cosec}\alpha - \cot\alpha - \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sec\alpha - 1}{\sin\alpha} = -1$

18. ఒక ఒంటెల మందలోని నాల్గవ వంతు అడవిలో చూడబడినవి. ఆ మందలోని ఒంటెల సంఖ్య వర్గమూలమునకు రెండింతలు పర్వతములకు వెళ్ళెను మరియు మిగిలిన 15 ఒంటెలు ఒక నది ఒడ్డున ఉన్నవి. అయిన ఒంటెల మొత్తమును కనుగొనుము. (జవాబు: ఒంటెల సంఖ్య 36)

19. సమవేగముతో పోవు రైలు 30 కి.మీ దూరము దాటిన తరువాత ఇంజనులోపము వలన వేగము దాని అసలు వేగములో $\dfrac{4}{5}$ కు తగ్గెను. ఫలితముగా రైలు గమ్యంను చేరుటకు 45 నిమిషములు ఆలస్యమయ్యెను. అదే ఇంకా 18 కిలోమీటర్లు ప్రయాణించిన తర్వాత జరిగియుండిన 9 నిమిషముల ముందుగానే చేరియుండును. అయిన రైలు వేగమును మరియు ప్రయాణ దూరమును కనుగొనుము.

(జవాబు: రైలు వేగము 30 కి.మీ/గంట మరియు ప్రయాణ దూరము 120 కి.మీ)

20. $\sin\theta + \sin^2\theta + \sin^3\theta = 1$ అయిన, $\cos^6\theta - 4\cos^4\theta + 8\cos^2\theta = 4$ అని నిరూపింపుము.

21. $\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta = l$ మరియు $\sec\theta - \cos\theta = m$ అయిన $l^2m^2(l^2 + m^2 + 3) = 1$ అని నిరూపింపుము.

22. పర్వత పాదము నుండి దాని శిఖరమునకు 45^0 ఊర్ధ్వములోనున్నది. 30^0 వాలు కోణముతో పర్వతం వైపు 1000 మీ. అధిరోహించిన శిఖరము 60^0 ఊర్ధ్వములో ఉండును. పర్వతము యొక్క ఎత్తును కనుగొనుము. (జవాబు: 1.366 కి.మీ)

23. ఒక చతురస్రము యొక్క ఎదిటెదుటి కోణీయ బిందువులు (3, 4) మరియు (1, –1) అయిన, మిగిలిన కోణీయ బిందువుల నిరూపకములు కనుగొనుము. (జవాబు: $\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$ మరియు $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$)

24. ఒక ఆరోహణ G.P. యందు మొదటి పదము మరియు చివరి పదముల మొత్తము 66, రెండవ మరియు చివరి పదము ముందున్న పదముల లబ్ధము 128, మరియు అన్ని పదముల మొత్తము 126 అయిన ఆ శ్రేణిలో గల పదములు ఎన్ని? (జవాబు : 6)

25. ఒక గోపురం పాదతలమునందు ఒక బిందువు A వద్ద α కోణము చేయుచున్నది మరియు ఎత్తు A కు పైన b నుండి గోపుర పాదము చేయు నిమ్నకోణము β అగును. గోపురం ఎత్తు $b\cot\beta\tan\alpha$ అని నిరూపింపుము.

26. ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకారపు కొలను కొలతలు 40 అడుగులు మరియు 20 అడుగులు. ఆ గుంట సరిహద్దు చుట్టూ క్రమ వెడల్పుతో మరియు లోతున 99 ఘనపు అడుగులు కాంక్రీటును ఉపయోగించవలయును. ఆ సరిహద్దు చుట్టూ 3 అంగుళముల లోతున కాంక్రీటు మొత్తమునుపయోగించెను. ఆ సరిహద్దు వెడల్పు ఎంతగానుండును? (జవాబు : 3 అడుగులు)

27. సూక్ష్మీకరింపుము: $(1+\frac{2}{2})(1+\frac{2}{3})(1+\frac{2}{4})\cdots(1+\frac{2}{n})$. (జవాబు : $\frac{(n+1)(n+2)}{6}$)

28. మూడు వృత్తాకార డిస్క్‌లు గలవు. వాటిలో రెండింటి వ్యాసార్థములు r అంగుళములు మరియు మూడవ దాని వ్యాసార్థము $2r$ అంగుళములు. మూడు డిస్కులను ఒక తలముపై ఒకదానినొకటి సరిహద్దులు తాకునట్లు అమర్చిన, వాటి కేంద్రములను కలుపుట ద్వారా ఏర్పడు త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము. (జవాబు : $2\sqrt{2}\, r^2$ చ.అంగుళములు)

29. 8 అంగుళముల వ్యాసార్థము గల 6 వృత్తాకార డిస్క్‌లను నేలపై వృత్తాకారములో అమర్చిన, ఆ మధ్య భాగములో ఆరు డిస్కులన్నింటిని తాకునట్లు ఏడవ డిస్కును అమర్చుము. ప్రతి డిస్కు మరొక రెండు డిస్కులను తాకునట్లుండవలెను. ఆరు డిస్కుల కేంద్రములతో ఏర్పడిన భాగము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము. (జవాబు : $192\sqrt{3}$ చ.అంగుళములు)

30. 4 సెం.మీ వాసార్థము మరియు 5 సెం.మీ ఎత్తు గల ఒక స్థూపాకార కొయ్య ముక్కనుండి అదే వ్యాసార్థము మరియు 3 సెం.మీ ఎత్తు గల వృత్త శంఖువును కత్తిరించి తీసివేయబడినది. మిగిలిన కొయ్యముక్క ఉపరితల వైశాల్యము 76 సెం.మీ2 అని నిరూపింపుము.

31. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$ అని చూపుము.
ఇందు $n! = 1\times 2\times 3\times\cdots\times n$.

Reference

1. Peter J. Eccles, Introduction to Mathematical Reasoning, Cambridge University Press 2007
2. Ann Xavier Gantert, Algebra 2 and Trigonometry, Amsco School Publications Inc., 2009
3. Boris A Kordemsky, The Moscow Puzzles: 359 Mathematical Recreations, Dover Publications
4. Imre Lakatos, Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery, January 1976
5. Krishnan Namboodiri, Richard G. Niemi, Matrix Algebra, An Introduction, Sage Publications 1984
6. Alfred S. Posamentier, Charles T. Salkind, Challenging Problems in Geometry, Dover Publications
7. Alfred S. Posamentier, Charles T. Salkind, Challenging Problems in Algebra, Dover Publications
8. James Stewart, Lothar Redlin, Saleem Watson, College Algebra, Thomson Brooks/Cole, Jan 2010
9. Michael Sullivan, College Algebra, Pearson Publishing, January 2007
10. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BiogIndex.html
11. V.Govorov, P.Dybov, N.Miroshin, S.Smirnova, Problems in Mathematics, G.K. Publications 2010
12. H.S.Hall, S.R. Knight, Elementary Algebra for Schools, Surjeet Publications 2007
13. H.S.Hall, S.R. Knight, Higher Algebra, A.I.T.B.S Publishers 2009
14. D.Dorokhin, Z.Plaksenko, G.Bazhora, Collection of Problems and Exercises in Mathematics, Mir Publications 1990

ప్రశ్నాపత్ర ప్రణాళిక

పాఠ్యము: గణితం కాలము: **2.30** గంటలు

తరగతి: **X** మొత్తం మార్కులు: **100**

అభ్యసన ఉద్దేశ్యములకు తగిన మార్కుల విభజన

ఉద్దేశ్యములు	శాతము
జ్ఞానము	19
అర్థము చేసుకొనుట	31
అన్వయించుట	23
సామర్థ్యము	27
మొత్తము	100

ప్రశ్నలకు తగిన మార్కుల విభజన

ప్రశ్నల వివరములు	భాగము-**A** చాలా చిన్న జవాబు	భాగము-**B** చిన్న జవాబు	భాగము-**C** పెద్ద జవాబు	భాగము-**D** చాలా పెద్ద జవాబు	మొత్తము
ప్రశ్నల సంఖ్య	15	10	9	2	36
మార్కులు	15	20	45	20	100
కాలము (నిమిషములలో)	20	35	65	30	2.30 గం॥

ప్రశ్నల స్థాయి

స్థాయి	మార్కుల శాతము
కఠినము	12
మధ్యంతరం	28
సులభం	60

భాగములు మరియు ఎన్నుకొనుట

భాగములు	ప్రశ్నల సంఖ్యలు		ప్రశ్నల సంఖ్య	జవాబులు ఇవ్వవలసిన ప్రశ్నలు
	నుండి	వరకు		
A	1	15	15	15
B	16	30	16 30వ ప్రశ్న ఖచ్చితమైనది మరియు రెండింటిలో ఒకటి వ్రాయవలెను	10
C	31	45	16 45వ ప్రశ్న ఖచ్చితమైనది మరియు రెండింటిలో ఒకటి వ్రాయవలెను	9
D	46		2 రెండింటిలో ఒకటి	1
	47		2 రెండింటిలో ఒకటి	1

విషయ సూచికకు తగిన మార్కుల విభజన

పాఠ్యాంశ సంఖ్య	పాఠ్యాంశము	ప్రశ్నల సంఖ్య				మొత్తం మార్కులు
		1 మార్కు	2 మార్కులు	5 మార్కులు	10 మార్కులు	
1	సమితులు మరియు ప్రమేయములు	1	2	2		15
2	వాస్తవ సంఖ్యల క్రమానుగత శ్రేణులు	2	1	2		14
3	బీజగణితము	2	2	3		21
4	మాత్రికలు	1	2	1		10
5	నిరూపకజ్యామితి	2	2	2		16
6	రేఖాగణితం	2	1	1		9
7	త్రికోణమితి	2	2	1		11
8	గణనము	1	2	2		15
9	ప్రయోగాత్మక రేఖాగణితం				2	20
10	రేఖాచిత్రములు				2	20
11	సాంఖ్యాక శాస్త్రము	1	1	1		8
12	సంభావ్యత	1	1	1		8
మొత్తం		15	16	16	4	167

ఉదాహరణలు, అభ్యాసములు మరియు తయారుచేసిన ప్రశ్నలకు మార్కుల విభజన

	భాగము A (1 మార్కు)	భాగము B (2 మార్కులు)	భాగము C (5 మార్కులు)	భాగము D (10 మార్కులు)	మొత్తం మార్కులు	శాతము
పాఠ్యపుస్తకములోనున్న ఉదాహరణల నుండి	---	6 (2)	6 (5)	1 (10)	52	31
అభ్యాస లెక్కల నుండి	10 (1)	8 (2)	8 (5)	3 (10)	96	58
నిర్దేశింపబడిన అధ్యాయముల నుండి తయారుచేసిన ప్రశ్నలు	5 (1)	2 (2)	2 (5)	---	19	11
మొత్తం	15 (1)	16 (2)	16 (5)	4 (10)	167	100

● కుండలీకరణంలో గల సంఖ్య ఒక్కొక్క ప్రశ్నకు గల మార్కులను తెలుపును.

భాగము - A

1. 1 నుండి 15 వరకు సంఖ్య గల 15 ప్రశ్నలన్నింటికి ఖచ్చితంగా వాటికి తగిన జవాబును ఎన్నుకొను ప్రశ్నలగును. ఒక్కొక్క ప్రశ్నకు ఏకాగ్రతను మార్చు 4 జవాబులను కలిగియుండును. ఒక్కొక్క ప్రశ్నకు ఒక మార్కు.
2. 15 ప్రశ్నలలో 10 ప్రశ్నలు పాఠ్యపుస్తకములో ఇవ్వబడిన సరియైన జవాబును ఎన్నుకొను ప్రశ్నలగును. మిగిలిన ప్రశ్నలు 2, 3, 5, 6 మరియు 7 మొదలగు పాఠ్యభాగముల నుండి తయారుచేయబడిన ప్రశ్నలగును. ఇవి పాఠ్యపుస్తకంలోని సిద్ధాంతములు, ఫలితములు, ఉదాహరణములు మరియు అభ్యాస లెక్కల ఆధారంగానుండును.

భాగము - B

1. 16 నుండి 30 వరకు సంఖ్య గల ప్రశ్నలలో 10 ప్రశ్నలకు జవాబులివ్వవలెను. ఒక్కొక్క ప్రశ్నకు 2 మార్కులు.
2. మొదటి 14 ప్రశ్నలకు ఏవేని 9 ప్రశ్నలకు జవాబులివ్వవలెను. 30వ ప్రశ్న ఖచ్చితమైన ప్రశ్న అగును. ఇది రెండింటిలో ఒకటి అను రకమునకనుండును.
3. 14 ప్రశ్నలు పాఠ్యపుస్తకములో గల పాఠ్యభాగ వరుసలోనుండును.
4. 14 ప్రశ్నలలో 6 ప్రశ్నలు ఉదాహరణల నుండి, 8 ప్రశ్నలు అభ్యాసముల నుండి వచ్చును.
5. 30వ ప్రశ్నలో గల రెండు ప్రశ్నలు తయారుచేయబడిన ప్రశ్నలు అగును. అవి 2, 3, 5 మరియు 8 పాఠ్యభాగములనందు గల ఉదాహరణలు, అభ్యాస లెక్కల ఆధారంగానుండును. ఆ రెండు లెక్కలు వేర్వేరు పాఠ్యభాగములనుండి అడుగబడును.

భాగము - C

1. 31 నుండి 45 వరకు సంఖ్య గల ప్రశ్నల నుండి 9 ప్రశ్నలకు జవాబులివ్వవలెను. ఒక్కొక్క ప్రశ్నకు 5 మార్కులు.
2. మొదటి 14 ప్రశ్నలలో ఏవేని 8 ప్రశ్నలకు జవాబులివ్వవలెను. 45వ ప్రశ్న ఖచ్చితమైన ప్రశ్న అగును. అది రెండింటిలో ఒకటి అను రకము నుండును.
3. మొదటి 14 ప్రశ్నలు పాఠ్యపుస్తకములో గల పాఠ్యభాగ వరుసలో నుండును..
4. మొదటి 14 ప్రశ్నలలో 6 ప్రశ్నలు ఉదాహరణల నుండి, 8 ప్రశ్నలు అభ్యాసముల నుండి వచ్చును.
5. 45వ ప్రశ్నలో గల రెండు ప్రశ్నలు తయారుచేయబడిన ప్రశ్నలు అగును. అవి 2, 3, 5 మరియు 8 వ పాఠ్యభాగములందు గల ఉదాహరణలు, అభ్యాస లెక్కల ఆధారంగా నుండును. ఆ రెండు లెక్కలు వేర్వేరు పాఠ్యభాగముల నుండి అడుగబడును.
6. 30(ఎ), 30(బి), 45(ఎ) మరియు 45(బి) సంఖ్యల ప్రశ్నలు 2, 3, 5 మరియు 8 పాఠ్యభాగములో గల ఉదాహరణలు, అభ్యాస లెక్కల ఆధారంగా తయారుచేయబడును. ఒక్కొక్క ప్రశ్నను వేర్వేరు పాఠ్యభాగము నుండి అడుగబడునను నిబంధనతో తయారుచేయబడును.

భాగము - D

1. ఈ భాగమునందు 9వ పాఠ్యభాగము మరియు 10 వ పాఠ్యభాగముల నుండి ఒక్కొక్క పాఠ్యభాగము నుండి రెండు ప్రశ్నలు అడుగబడును. అవి రెండింటిలో ఒకటి రకమునకనుండును. ఒక్కొక్క ప్రశ్నకు 10 మార్కులు.
2. రెండు ప్రశ్నలకు జవాబులివ్వవలెను.
3. 46(ఎ), 47(ఎ), 46(బి) మరియు 47(బి) సంఖ్య కలిగిన ప్రశ్నలలో ఒక ప్రశ్న, పాఠ్యపుస్తకములో గల ఉదాహరణల నుండి అడుగబడును. మిగిలిన మూడు ప్రశ్నలు అభ్యాసము నుండి అడుగబడును.

BLUE PRINT - X Std.

ఉద్దేశ్యము / అభ్యాసము	జ్ఞానము				అర్థంచేసుకొనుట				అన్వయించుట				సామర్థ్యము				మొత్తం మార్కులు
	VSA	SA	LA	VLA	VSA	SA	LA	VLA	VSA	SA	LA	VLA	VSA	SA	LA	VLA	
సమితులు మరియు ప్రమేయములు	1(1)	2(1)	5(1)			2(1)					5(1)						15
వాస్తవ సంఖ్యల క్రమానుగత శ్రేణులు		2(1)	5(1)		1(1)				1(1)		5(1)						14
బీజగణితము		2(1)	5(1)		1(1)				1(1)	2(1)	5(1)				5(1)		21
మాత్రికలు						4(2)	5(1)		1(1)								10
నిరూపకజ్యామితి		2(1)			1(1)	2(1)	5(1)		1(1)		5(1)						16
రేఖాగణితం					1(1)	2(1)	5(1)		1(1)								9
త్రికోణమితి					1(1)	2(1)	5(1)		1(1)	2(1)							11
గణనము	1(1)					2(1)	5(1)			2(1)	5(1)						15
ప్రయోగాత్మక రేఖాగణితం																10(2)	20
రేఖాచిత్రములు																10(2)	20
సాంఖ్యాక శాస్త్రము			5(1)			2(1)			1(1)								8
సంభావ్యత		2(1)					5(1)		1(1)								8
మొత్తం	2(2)	10(5)	20(4)		5(5)	16(8)	30(6)		8(8)	6(3)	25(5)				5(1)	40(4)	167

- కుండలీకరణములోగల సంఖ్య ప్రశ్నల సంఖ్యను తెలియజేయును.
- మరొక సంఖ్య మార్కులను తెలియజేయును.

VSA – చాలా చిన్న జవాబు **SA** – చిన్న జవాబు
LA – పెద్ద జవాబు **VLA** – చాలా పెద్ద జవాబు